

УДК 517.957

РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНУСА ДЛЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ: СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Р. И. Муллярджанов^{1,2}, *А. А. Гелаши*^{3,4*}

¹ Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, г. Новосибирск;

² Новосибирский госуниверситет, г. Новосибирск;

³ Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск;

⁴ Сколковский институт науки и технологий, г. Москва, Россия

Подробно описано построение численных схем четвертого и шестого порядков сходимости с помощью разложения Магнуса для решения системы Захарова–Шабата, что позволяет аккуратно решить прямую задачу рассеяния для нелинейного уравнения Шрёдингера. Чтобы избежать численных неустойчивостей, присущих процедуре решения прямой задачи рассеяния, используется арифметика высокой точности. На данный момент применение предложенных схем в сочетании с арифметикой высокой точности является уникальным инструментом анализа сложных волновых полей, содержащих большое количество солитонов, и позволяет определить полный дискретный спектр, включая как собственные числа, так и нормировочные константы. В работе исследованы ошибки предложенных схем на примере потенциала в форме гиперболического секанса. Установлено, что время расчёта матрицы рассеяния с помощью алгоритма шестого порядка больше почти в два раза по сравнению со стандартным методом Боффетта–Осборна второго порядка, в то время как выигрыш по времени от снижения числа точек дискретизации волнового поля при сохранении требуемой точности может достигать целого порядка и более. Для точного решения прямой задачи рассеяния волновые поля с большими амплитудами требуют дискретизации, шаг которой сравним с характерной шириной наибольших солитонов, содержащихся в них. При этом шаг дискретизации может быть существенно меньше того, который необходим для восстановления полного спектра Фурье волнового поля. Применение предложенных схем высокого порядка аппроксимации может оказаться принципиальным для успешной работы с большим количеством сложных нелинейных волновых полей, как, например, при статистическом изучении данных рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов, подчиняющихся нелинейным уравнениям в частных производных, является масштабной областью современных исследований в различных разделах физики. В случае слабой нелинейности такие процессы могут быть описаны с использованием разложения по малому параметру задачи, как это делается в теории слабой турбулентности [1]. В большинстве остальных случаев исследования проводятся численно, например, в теории сильной турбулентности [2, 3]. При этом особое значение имеют нелинейные уравнения, которые могут быть полностью проинтегрированы (решены) с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), открытого в 1967 году Гарднером, Грином, Круцкалом и Миурой [4]. К их числу относятся знаменитые модели с одной пространственной и одной эволюционной переменной (одномерные), а именно нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) [5], уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ) [4] и его вариации: модифицированное уравнение КдФ и уравнение Гарднера [6], а также двумерные уравнения Кадомцева–Петвиашвилли (КП) [7, 8] и Дэви–Стюартсона (ДС) [9, 10] с двумя пространственными и одной эволюционной переменной. Интегрируемые модели могут описывать поведение нелинейных когерентных структур — солитонов и бризеров, что привлекает особое внимание исследователей. Последние представляют собой локализованные нелинейные волны, которые могут

* agelash@gmail.com

существовать в системе продолжительное время. Стоит отметить, что их формирование является одним из основных сценариев эволюции нелинейных систем [11].

Область применения нелинейных интегрируемых уравнений охватывает практически все разделы физики. Так, например, уравнение КдФ моделирует волны на поверхности мелкой воды. Уравнение КП, являющееся двумерным обобщением модели КдФ, также используется для описания волн в тонких плёнках. Нелинейное уравнение Шрёдингера является одной из наиболее общих интегрируемых моделей, описывающей в первом приближении по слабой нелинейности и дисперсии огибающую слабомодулированного волнового пакета (см., например, [1]). Это уравнение широко применяется для моделирования нелинейных волн на поверхности жидкости, в оптическом волокне, в плазме и конденсате Бозе—Эйнштейна [12–14], а также в электрических сетях [15, 16].

Ключевую роль в конструкции МОЗР [17, 18] играют два линейных дифференциальных оператора — так называемая пара Лакса [19]. Для одного из этих операторов, \mathcal{L} , содержащего производные только по пространственным переменным, решается прямая задача рассеяния, в которой волновое поле играет роль потенциала, а эволюционная переменная является фиксированным параметром. При этом спектр оператора $\hat{\mathcal{L}}$, т. е. собственные числа λ спектральной задачи $\hat{\mathcal{L}}\psi = \lambda\psi$, остаётся неизменным в процессе эволюции волнового поля, где ψ — собственная функция оператора $\hat{\mathcal{L}}$. Решение прямой задачи рассеяния представляет собой так называемые данные рассеяния, которые для быстроубывающих на бесконечности потенциалов позволяют полностью восстановить волновое поле, решая обратную задачу рассеяния, а именно интегральные уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко (ГЛМ). В нашем случае данные рассеяния представляют собой информацию о дискретном и непрерывном спектре оператора $\hat{\mathcal{L}}$, а именно собственные значения и соответствующие им нормировочные константы (дискретный спектр), а также значение коэффициента отражения (непрерывный спектр).

Как уже отмечалось выше, дискретный спектр и амплитуда комплексного коэффициента рассеяния остаются неизменными в процессе нелинейной эволюции волнового поля, в то время как фаза коэффициента отражения и нормировочные константы эволюционируют тривиальным образом. При этом каждое собственное число дискретного спектра соответствует солитону, который, таким образом, будет постоянно присутствовать в изучаемом волновом поле. Действительные и мнимые части собственного числа отвечают амплитуде и скорости солитона, а соответствующие нормировочные константы описывают его фазу (при наличии) и положение. Таким образом, данные рассеяния полностью характеризуют волновое поле в любой момент его эволюции и представляют собой нелинейное обобщение спектра Фурье волновых полей в линейных задачах. По этой причине МОЗР также часто называют нелинейным преобразованием Фурье, а данные рассеяния — нелинейным спектром волнового поля.

В течение нескольких десятилетий с момента открытия МОЗР были найдены разнообразные классы интегрируемых уравнений, построены и изучены их точные решения, разработаны методы теории возмущений для нелинейных систем, близких к интегрируемым [17, 18, 20]. Однако решение прямой и обратной задач рассеяния далеко не всегда может быть выполнено аналитически. Так, для быстроубывающих потенциалов уравнения ГЛМ могут быть точно решены только в ограниченном числе случаев, например для N -солитонных решений, где N — число солитонов. В общем же случае эти уравнения могут быть исследованы только асимптотически или численно. В то же время решение прямой задачи рассеяния также может быть выполнено аналитически только в ограниченном числе случаев, таких как прямоугольные потенциалы [21–23] или потенциалы в форме гиперболического секанса [24, 25].

Вышеперечисленные успехи в теоретических исследованиях и необходимость выхода за рамки ограниченного класса точных решений привели к динамичному развитию направления, связан-

ного с разработкой численных алгоритмов МОЗР [26–42]. Особой популярностью пользуются методы решения прямой задачи рассеяния, которые позволяют проводить характеризацию нелинейного волнового поля и, что особенно важно, содержащихся в нём нелинейных когерентных структур. Такие подходы уже успешно применяются для изучения нелинейных волновых процессов на поверхности воды [43–50], а также световых волн в оптическом волокне с нелинейностью [44, 51, 52]. Кроме того, прямая задача рассеяния используется для декодирования информации, содержащейся в нелинейных телекоммуникационных сигналах [53–55] и для изучения поведения нелинейных систем, близких к интегрируемым [56, 57].

Отметим, что для уравнения КдФ задача на собственные числа представляет собой стационарное уравнение Шрёдингера. Таким образом, соответствующий оператор $\hat{\mathcal{L}}$ является самосопряжённым и весь его спектр расположен на одной оси, а соответствующая прямая задача рассеяния подробно изучена в квантовой механике [58]. В свою очередь, для НУШ лаксова пара была найдена в 1971 году Захаровым и Шаботом и представлена вместе с полной схемой интегрирования с помощью МОЗР [5]. В настоящее время оператор $\hat{\mathcal{L}}$ в НУШ часто называют оператором Захарова—Шабата (ЗШ), а прямую задачу рассеяния — задачей ЗШ. Задача ЗШ представляет собой систему из двух линейных дифференциальных уравнений, в которую волновое поле входит в качестве коэффициентов, зависящих от пространственной переменной. Отметим, что оператор $\hat{\mathcal{L}}$ в НУШ является самосопряжённым только в случае дефокусирующей нелинейности, которая определяется знаком нелинейного слагаемого. В случае фокусирующей нелинейности оператор $\hat{\mathcal{L}}$ таковым не является и его спектр может быть расположен на всей комплексной плоскости. Таким образом, фокусирующее НУШ является довольно общей моделью как с точки зрения применений в физике, так и с точки зрения развития математических инструментов, что объясняет использование НУШ для демонстрации новых численных подходов МОЗР.

Один из первых численных методов решения прямой задачи рассеяния был предложен в работах Осборна и соавторов [26, 29, 30]. Метод Боффетта—Осборна [26] является классической численной схемой решения прямой задачи рассеяния НУШ, имеет второй порядок сходимости и позволяет найти полный спектр данных рассеяния. За прошедшее время было предложено большое количество альтернативных и улучшенных подходов, включающих методы как второго, так и четвёртого порядков аппроксимации [32, 35, 37, 38, 41, 42], некоторые из которых применимы только для нахождения собственных чисел солитонов. Однако интерес к изучению сложных случайных нелинейных волновых полей с возможным присутствием шума, а также повышенные требования к скорости обработки для приложений в телекоммуникации требуют дальнейшего развития этих методов.

При этом важно отметить особую сложность в создании метода нахождения полного набора данных рассеяния, включающего нормировочные константы солитонов. Так, в наших недавних работах [27, 28] было установлено, что численное интегрирование в пространстве дифференциального уравнения задачи рассеяния (которое позволяет найти полный набор данных рассеяния) приводит к появлению трёх типов численных неустойчивостей. Первый тип неустойчивости является результатом накопления ошибки дискретизации в результате численного решения дифференциальных уравнений на большом интервале и приводит к быстрому росту ошибок идентификации данных рассеяния с ростом протяжённости поля. Второй тип неустойчивости относится к ошибкам округления, которые могут резко повлиять на результат вычисления дискретной части спектра данных рассеяния из-за арифметических операций с большими и малыми числами при нахождении коэффициентов рассеяния. И, наконец, третий тип неустойчивости, который мы назвали аномальными ошибками прямой задачи рассеяния [28], возникает из-за аналитических особенностей одного из коэффициентов рассеяния для мультисолитонных волновых полей, рассматриваемых на конечном интервале. Аномальные ошибки прямой задачи рассеяния приводят

к тому, что при использовании стандартных численных схем идентификация фаз и положений солитонов происходит зачастую совершенно некорректно. Мы установили на примере модели фокусирующего НУШ, что применение численных конечно-разностных схем решения задачи ЗШ высокого порядка аппроксимации в сочетании с арифметикой высокой точности позволяет подавить все указанные неустойчивости и существенно увеличить эффективность идентификации данных рассеяния при работе с большими волновыми полями. В частности, нам удалось продемонстрировать успешную идентификацию фаз и положений для 128-солитонного решения НУШ [27].

Одним из наиболее прямых и простых способов построения численных схем высокого порядка для решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является разложение Магнуса [59]. Впервые это разложение для решения прямой задачи рассеяния было применено в нашей работе [27] и немногим позже (независимо) в работе [39]. Здесь мы приводим полные схемы четвёртого и шестого порядков сходимости для задачи ЗШ, включающие выражения для всех коэффициентов разложения, которые не были представлены ранее [27]. Далее мы исследуем эффективность схем высокого порядка в сочетании с арифметикой высокой точности для определения полного набора данных рассеяния (дискретного и непрерывного спектра) на примере потенциала в форме гиперболического секанса, содержащего до 32 солитонов. Таким образом, мы демонстрируем, что предложенная нами схема решения прямой задачи рассеяния может успешно применяться для изучения полных данных рассеяния сложных волновых полей, содержащих в себе как непрерывный, так и дискретный спектр.

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В этом разделе мы приводим основные факты из конструкции МОЗР для НУШ, необходимые в данной работе. Мы записываем НУШ для затухающего на бесконечности комплексного волнового поля $q(t, x)$ в стандартном безразмерном виде:

$$iq_t + q_{xx}/2 - \sigma |q|^2 q = 0, \quad q \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где t и x — временная и пространственная переменные соответственно, нижний индекс обозначает частную производную. Знак нелинейного слагаемого соответствует фокусирующему НУШ при $\sigma = -1$ и дефокусирующему НУШ при $\sigma = 1$.

Без ограничения общности нашей работы мы фиксируем момент времени $t = 0$. Система Захарова—Шабата [5, 17], играющая центральную роль в прямой задаче рассеяния для НУШ, представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка для искомого вектора $\Psi(x, \zeta) = (\psi_1, \psi_2)$:

$$\Psi_x = \mathbf{Q}(x)\Psi, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -i\zeta & q(x) \\ \sigma q^*(x) & i\zeta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где величина $\zeta = \xi + i\eta$ является комплексным спектральным параметром задачи. Уравнение (2) можно переписать в виде задачи на собственные значения оператора $\hat{\mathcal{L}}$, о котором говорилось во введении:

$$\hat{\mathcal{L}}\Psi = \zeta\Psi, \quad \hat{\mathcal{L}} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_x - i \begin{pmatrix} 0 & q \\ \sigma q^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для локализованных потенциалов $q(x)$ в случае $\sigma = -1$ собственные значения ζ уравнения (3) представляют конечный набор дискретных значений с $\text{Im}(\zeta) = \eta > 0$ (дискретный спектр) и включают всю действительную ось $\text{Re}(\zeta) = \xi$ (непрерывный спектр), в то время как для случая

$\sigma = 1$ собственные значения находятся только на действительной оси, т. е. дискретный спектр отсутствует. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы в обоих случаях, однако мы исследуем случай $\sigma = -1$, который является более общим.

Мы рассматриваем правую задачу рассеяния с соответствующими асимптотиками:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi = \begin{pmatrix} \exp(-i\zeta x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi = \begin{pmatrix} a(\zeta) \exp(-i\zeta x) \\ b(\zeta) \exp(i\zeta x) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Важно отметить, что первый коэффициент рассеяния a имеет аналитическое продолжение на комплексную ζ -плоскость с нулями в точках дискретных собственных чисел ζ_n , где $n = 1, \dots, N$. Второй коэффициент рассеяния $b(\xi)$ определён на действительной оси и в точках ζ_n , так что $b(\zeta_n) = b_n$. При этом коэффициент $b(\zeta)$ может быть аналитически продолжен на ζ -плоскость при наличии у потенциала $q(x)$ компактного носителя, т. е. когда $q = 0$ вне компактного множества на оси x [60].

Коэффициенты рассеяния $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ связаны со спектром задачи рассеяния $\{\zeta_n, \rho_n; r\}$ следующим образом:

$$a(\zeta_n) = 0, \quad \rho_n = \left. \frac{b(\zeta)}{a'(\zeta)} \right|_{\zeta=\zeta_n}, \quad r(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \tag{5}$$

где ρ_n — комплексная нормировочная константа, ассоциированная с собственным числом ζ_n , $r(\xi)$ — коэффициент отражения, штрих означает производную. Отметим, что величины ρ_n в литературе также называют фазовыми константами (см., например, [26]), что, однако, не отражает их роли в описании пространственного положения солитона. Мы предпочитаем использовать термин «нормировочные константы», т. к. они нормируют соответствующее солитонное слагаемое в уравнениях ГЛМ (см. монографии [17, 18], содержащие полную схему МОЗР). Каждое дискретное собственное число $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ отвечает солитону в волновом поле с амплитудой $A_n = 2\eta_n$ и групповой скоростью $V_n = 2\xi_n$, в то время как зависимость $r(\xi)$ описывает нелинейные дисперсионные волны.

Когда дисперсионные волны отсутствуют, т. е. $r(\xi) = 0$, волновое поле представляет собой N -солитонное решение $q_{\text{NSS}}(x)$, которое может быть получено аналитически с помощью решения уравнений ГЛМ [17, 27]:

$$q_{\text{NSS}}(x) = -2i\rho_k \exp(i\zeta_k x) [\mathbf{E} + \mathbf{M}^* \mathbf{M}]^{-1}_{k,j} \exp(i\zeta_j x), \tag{6}$$

где по повторяющимся индексам происходит суммирование. Здесь \mathbf{E} — единичная матрица с размером $N \times N$,

$$M_{k,j} = i\rho_j (\zeta_k^* - \zeta_j)^{-1} \exp[-i(\zeta_k^* - \zeta_j)x]. \tag{7}$$

Нормировочные константы солитонов параметризуются следующим образом:

$$\rho_n = -iA_n \exp(A_n x_{0n} - i\theta_n), \tag{8}$$

где пара действительных параметров θ_n и x_{0n} описывает фазу и пространственное положение солитона [61].

Для $q_{\text{NSS}}(x)$ первый коэффициент рассеяния на всей ζ -плоскости может быть представлен в следующем виде [17]:

$$a_N(\zeta) = \prod_{n=1}^N \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_n^*}, \tag{9}$$

в то время как второй коэффициент рассеяния $b_N(\xi)$ не может быть аналитически продолжен на ζ -плоскость по причине того, что N -солитонное решение имеет бесконечные экспоненциальные «хвосты», что означает отсутствие у потенциала $q(x)$ компактного носителя.

2. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

2.1 Задача рассеяния на конечном интервале

На практике вместо задания граничных условий при $x \rightarrow \pm\infty$ рассматривают конечный отрезок $[-L, L]$, где локализован потенциал $q(x)$. Это всегда гарантирует наличие компактного носителя, т. е. позволяет определить $b_{\text{tr}}(\zeta)$ в комплексной плоскости, где индекс tr соответствует результатам для ненулевой функции $q(x)$ только внутри отрезка $[-L, L]$ (см. также [61–63]). Определим волновую функцию Ψ_{tr} со сдвинутыми с $x \rightarrow \pm\infty$ на конечный интервал $x = \pm L$ граничными условиями, см. уравнение (4):

$$\Psi_{\text{tr}}(-L) = \begin{pmatrix} \exp(i\zeta L) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\text{tr}}(L) = \begin{pmatrix} a_{\text{tr}}(\zeta) \exp(-i\zeta L) \\ b_{\text{tr}}(\zeta) \exp(i\zeta L) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

С помощью $a_{\text{tr}}(\zeta)$ и $b_{\text{tr}}(\zeta)$ можно определить нормировочные константы следующим образом:

$$\rho_{\text{tr}}(\zeta) = \frac{b_{\text{tr}}(\zeta)}{a'_{\text{tr}}(\zeta)}. \quad (11)$$

Далее удобно ввести матрицу рассеяния S размерности 4×4 , которая переносит Ψ_{tr} и $\Psi'_{\text{tr}} = \partial\Psi_{\text{tr}}/\partial\zeta$ из точки $-L$ в L [26]:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\text{tr}}(L) \\ \Psi'_{\text{tr}}(L) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ \Sigma' & \Sigma \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} \Psi_{\text{tr}}(-L) \\ \Psi'_{\text{tr}}(-L) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где для удобства используется матрица Σ размерности 2×2 , при этом $\Psi_{\text{tr}}(L) = \Sigma(\zeta)\Psi_{\text{tr}}(-L)$. Данные рассеяния связаны с элементами матрицы рассеяния \mathbf{S} [26]:

$$\begin{aligned} a_{\text{tr}}(\zeta) &= S_{11} \exp(2i\zeta L), & b_{\text{tr}}(\zeta) &= S_{21}, \\ a'_{\text{tr}}(\zeta) &= [S_{31} + iL(S_{11} + S_{33})] \exp(2i\zeta L). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, информация о матрице рассеяния \mathbf{S} позволяет получить искомые данные рассеяния. При этом нахождение последних происходит в два этапа. Сначала необходимо определить собственные числа ζ_n как нули коэффициента рассеяния a_{tr} . Далее в точках ζ_n вычисляется значение $\rho_{\text{tr}}(\zeta_n)$.

2.2 Аномальные ошибки

Поведение коэффициента b_{tr} в окрестности точки ζ_n имеет экспоненциальный характер, что было показано ранее для односолитонного потенциала [61, 62]. В нашей недавней работе [28] мы получили общее выражение для поведения коэффициентов $a_{\text{tr}}(\zeta)$ и $b_{\text{tr}}(\zeta)$ для N -солитонного потенциала q_{NSS} , см. выражение (6), при условии достаточно большого значения L :

$$a_{N,\text{tr}}(\zeta) = a_N(\zeta) + o_N, \quad (14)$$

$$b_{N,\text{tr}}(\zeta) = a_N(\zeta) \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n \exp[-2i(\zeta - \zeta_n)L]}{\zeta - \zeta_n} + o_N. \quad (15)$$

Здесь $o_N = p(\zeta)o[\exp(-2\eta_{\min}L)]$, $p(\zeta)$ — некоторая рациональная функция, $\eta_{\min} = \min[\eta_1, \dots, \eta_N]$ — минимальное значение η среди всех солитонов. Выражения (11) и (15) демонстрируют, что малое отклонение $\delta\zeta_n$ от соответствующего значения ζ_n может привести к большим ошибкам определения $\rho_{N,\text{tr}}(\zeta_n)$. Чтобы это продемонстрировать, разложим функцию $b_{N,\text{tr}}$ в окрестности ζ_n :

$$b_{N,\text{tr}}(\zeta_n + \delta\zeta_n) \approx \underbrace{\frac{\rho_n}{\zeta_n - \zeta_n^*} \prod_{j \neq n}^N \frac{\zeta_n - \zeta_j}{\zeta_n - \zeta_j^*}}_{\text{I слагаемое}} + \delta\zeta_n \underbrace{\left\{ \sum_{l \neq n}^N \frac{\rho_l \exp[-2i(\zeta_n - \zeta_l)L]}{(\zeta_n - \zeta_l)(\zeta_n - \zeta_n^*)} \prod_{j \neq n}^N \frac{\zeta_n - \zeta_j}{\zeta_n - \zeta_j^*} \right\}}_{\text{II слагаемое}}. \tag{16}$$

Согласно выражению (11) отклонение $\rho_{N,\text{tr}}(\zeta_n + \delta\zeta_n)$ от $\rho_{N,\text{tr}}(\zeta_n)$ может быть экспоненциально велико из-за второго слагаемого в выражении (16) для $b_{N,\text{tr}}$, при этом для $a'_{N,\text{tr}}$ нет аналогичных проблем. Ошибка может быть оценена следующим образом:

$$\text{ошибка}[\rho_{N,\text{tr}}(\zeta_n)] \sim \text{II слагаемое} \sim \exp[2(\eta_n - \eta_{\min})L]. \tag{17}$$

Ошибка становится критической, когда I и II слагаемые оказываются сравнимы по своей абсолютной величине. Руководствуясь этим условием, можно наглядно проанализировать ситуацию для случая $N = 2$:

$$\delta\zeta_1^{\text{cr}} \sim \frac{\rho_1}{\rho_2} (\zeta_1 - \zeta_2) \exp[-2i(\xi_2 - \xi_1)L] \exp[2(\eta_2 - \eta_1)L], \tag{18}$$

$$\delta\zeta_2^{\text{cr}} \sim \frac{\rho_2}{\rho_1} (\zeta_2 - \zeta_1) \exp[-2i(\xi_1 - \xi_2)L] \exp[2(\eta_1 - \eta_2)L], \tag{19}$$

где индекс cr обозначает отклонение собственного значения, когда ошибка становится критической. Без потери общности можно рассмотреть случай $\eta_2 > \eta_1$, при этом $\delta\zeta_1^{\text{cr}}$ будет экспоненциально расходиться с ростом L , в то время как $\delta\zeta_2^{\text{cr}}$ будет стремиться к нулю. Это наблюдение означает, что исключить ошибку расчёта $b_{N,\text{tr}}$ можно только увеличением точности вычисления собственного значения. Требуемая при нахождении собственного значения точность зависит от расположения собственных чисел и величины L . При этом в большинстве случаев она превышает 10^{-16} , т. е. типичные величины ошибок машинного округления. Возвращаясь к случаю двух солитонов, стоит отметить, что $\delta\zeta_1^{\text{cr}} \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow \infty$. Таким образом, солитон с наименьшим собственным значением не характеризуется аномальными ошибками. Картина остаётся схожей при рассмотрении многосолитонных волновых полей.

Вопрос о точном описании аномальных ошибок при наличии в потенциале непрерывного спектра в настоящее время является открытым. Однако естественно ожидать, что в общем случае картина будет схожей с представленной выше, т. е. наличие солитонов в потенциале приводит к экспоненциальному поведению b_{tr} вблизи собственных значений, что подтверждается нашими численными экспериментами [28].

2.3. Численная процедура и разложение Магнуса

Построение конечно-разностной схемы для рассматриваемой задачи подразумевает дискретизацию интервала $[-L, L]$ на M отрезков, которые в общем случае могут быть разной длины (неравномерная сетка; см. рис. 1). Обозначим координату центра m -го отрезка как x_m , а его длину как Δx_m . С использованием разложения Магнуса [59], внутри m -го отрезка с границами $[x_c, x_p]$,

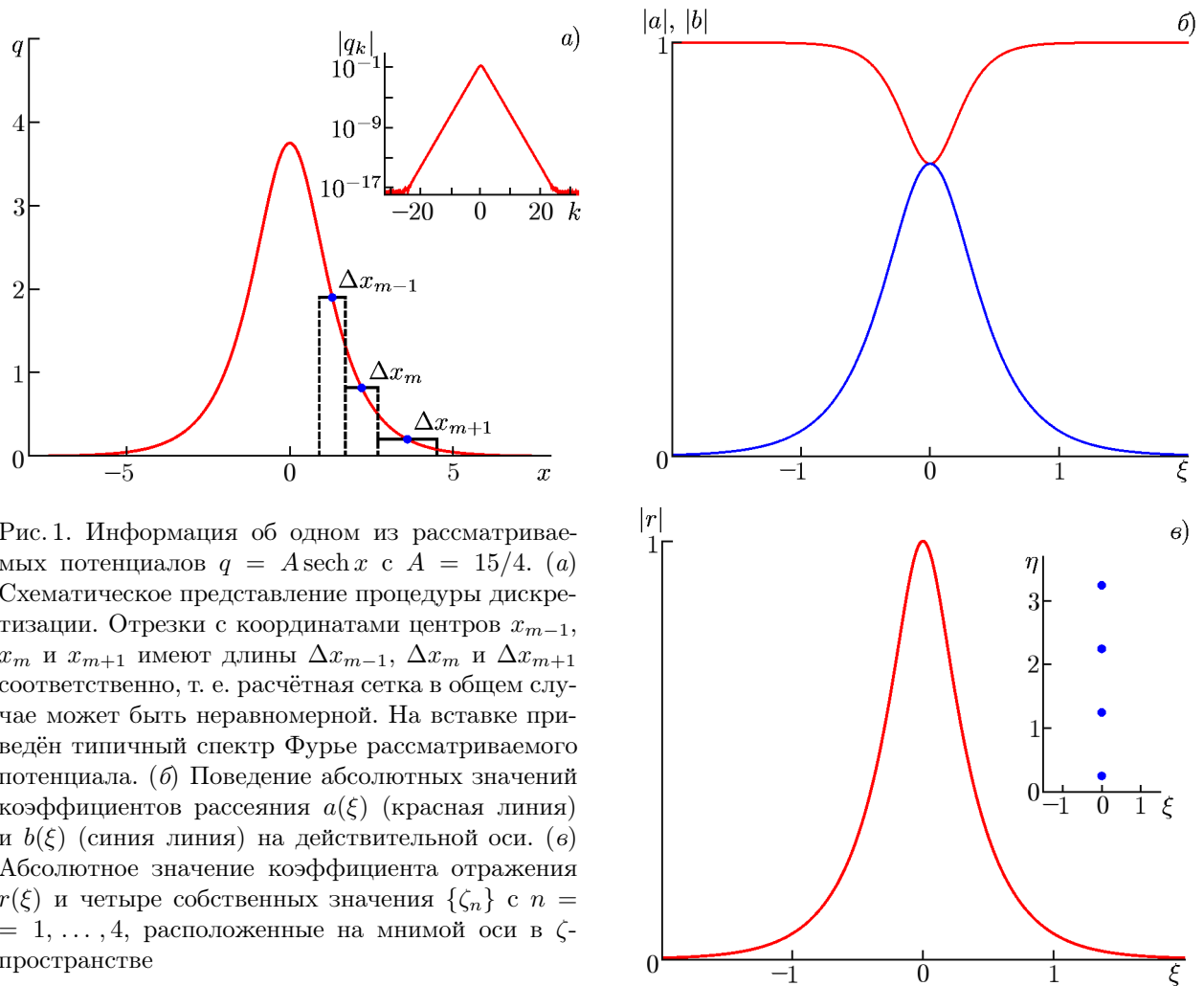


Рис. 1. Информация об одном из рассматриваемых потенциалов $q = A \operatorname{sech} x$ с $A = 15/4$. (а) Схематическое представление процедуры дискретизации. Отрезки с координатами центров x_{m-1} , x_m и x_{m+1} имеют длины Δx_{m-1} , Δx_m и Δx_{m+1} соответственно, т. е. расчётная сетка в общем случае может быть неравномерной. На вставке приведён типичный спектр Фурье рассматриваемого потенциала. (б) Поведение абсолютных значений коэффициентов рассеяния $a(\xi)$ (красная линия) и $b(\xi)$ (синяя линия) на действительной оси. (в) Абсолютное значение коэффициента отражения $r(\xi)$ и четыре собственных значения $\{\zeta_n\}$ с $n = 1, \dots, 4$, расположенные на мнимой оси в ζ -пространстве

где $x_c = x_m - \Delta x_m/2$ и $x_p = x_m + \Delta x_m/2$, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка $\Psi_{\text{tr},x} = \mathbf{Q}(x)\Psi_{\text{tr}}$ может быть записано как

$$\Psi_{\text{tr}}(x_p) = \mathbf{U}(x_m)\Psi_{\text{tr}}(x_c), \quad \mathbf{U}(x_m) = \exp[\Omega(x_m)], \tag{20}$$

где Ω в общем случае представляет бесконечный ряд

$$\Omega(x_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j(x_m), \tag{21}$$

несколько первых членов которого имеют следующий вид:

$$\Omega_1(x_m) = \int_{x_c}^{x_p} \mathbf{Q}(x) dx, \tag{22}$$

$$\Omega_2(x_m) = \frac{1}{2} \int_{x_c}^{x_p} dx_1 \int_{x_c}^{x_1} dx_2 \{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\}, \tag{23}$$

$$\Omega_3(x_m) = \frac{1}{6} \int_{x_c}^{x_p} dx_1 \int_{x_c}^{x_1} dx_2 \int_{x_c}^{x_2} dx_3 (\{\mathbf{Q}_1, \{\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3\}\} + \{\mathbf{Q}_3, \{\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_1\}\}), \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \Omega_4(x_m) = & \frac{1}{12} \int_{x_c}^{x_p} dx_1 \int_{x_c}^{x_1} dx_2 \int_{x_c}^{x_2} dx_3 \int_{x_c}^{x_3} dx_4 (\{\{\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\}, \mathbf{Q}_3\}, \mathbf{Q}_4\} + \\ & + \{\mathbf{Q}_1, \{\{\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3\}, \mathbf{Q}_4\}\} + \{\mathbf{Q}_1, \{\mathbf{Q}_2, \{\mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4\}\}\} + \{\mathbf{Q}_2, \{\mathbf{Q}_3, \{\mathbf{Q}_4, \mathbf{Q}_1\}\}\}). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ обозначает матричный коммутатор и $\mathbf{Q}(x_k) = \mathbf{Q}_k$. Соотношение (20) позволяет представить матрицу Σ в следующем виде:

$$\Sigma = \prod_{m=1}^M \mathbf{U}(x_m) = \prod_{m=1}^M \exp[\Omega(x_m)], \tag{26}$$

при этом далее возможно рассчитать матрицу \mathbf{S} согласно уравнению (12).

Для построения конечно-разностных схем высокого порядка внутри m -го отрезка необходимо использовать ряд Тейлора для $q(x)$ в окрестности точки x_m :

$$q(x) = q(x_m) + q'(x_m)(x - x_m) + \frac{1}{2} q''(x_m)(x - x_m)^2 + \dots \tag{27}$$

Структура матрицы \mathbf{Q} , которая сама является бесследовой, даёт аналогичные свойства и коммутаторам типа $\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\}$, входящим в формулы (23)–(25). Далее будет использована формула для некоторой бесследовой матрицы \mathbf{D} :

$$\exp(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}K + \frac{A}{K} \operatorname{sh}K & \frac{C}{K} \operatorname{sh}K \\ \frac{B}{K} \operatorname{sh}K & \operatorname{ch}K - \frac{A}{K} \operatorname{sh}K \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \tag{28}$$

а также обозначение $K = \sqrt{A^2 - BC}$. Аналогичную структуру имеет и матричная экспонента бесследовой матрицы Ω :

$$\exp[\Omega(x_m)] = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k_m - \frac{i\kappa_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m & \frac{\chi_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m \\ \frac{\sigma\chi_m^*}{k_m} \operatorname{sh} k_m & \operatorname{ch} k_m + \frac{i\kappa_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где использованы первые несколько членов ряда Магнуса для Ω и ряда Тейлора для функции q , позволяющих построить, например, схемы вплоть до 6-го порядка:

$$\begin{aligned} k_m^2 = & (\sigma |q_m|^2 - \zeta^2) \Delta x_m^2 + \sigma(q^* m q_m'' + q_m'' q_m) \Delta x_m^4 / 24 + 8(q^* m q_m' - q_m q_m'^*)^2 \Delta x_m^6 / 5760 - \\ & - \sigma[3(q^* m q_m''' + q_m q_m''') + 10 |q_m''|^2 + 16i\zeta(q_m' q_m'' - q_m'' q_m') - 32 |q_m'|^2 \zeta^2] \Delta x_m^6 / 5760, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} i\kappa_m = & i\zeta \Delta x_m - \sigma(q^* m q_m' - q_m q_m'^*) \Delta x_m^3 / 12 + \\ & + 8 |q_m|^2 (q^* m q_m' - q_m q_m'^*) \Delta x_m^5 / 1440 - \sigma[3(q^* m q_m''' - q_m q_m''') - \\ & - 3(q_m'' q_m' - q_m' q_m'') - 4i\zeta(q^* m q_m'' + q_m q_m'' - 6 |q_m'|^2) - 8\zeta^2(q^* q' - q q')] \Delta x_m^5 / 1440, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \chi_m = & q_m \Delta x_m + (q_m'' + 4iq_m' \zeta) \Delta x_m^3 / 24 + (3q_m'''' + 24iq_m''' \zeta - 32q_m'' \zeta^2 + 64iq_m' \zeta^3) \Delta x_m^5 / 5760 - \\ & - \sigma[48(q^* m q_m'' - q_m |q_m'|^2) - 16(|q_m|^2 q'' - q^2 q''*) + 64i |q_m|^2 q_m' \zeta] \Delta x_m^5 / 5760, \end{aligned} \tag{32}$$

$q_m = q(x_m)$. Если, например, в выражениях (30), (31) и (32) для коэффициентов k_m^2 , $i\kappa_m$ и χ_m удержать только первые слагаемые, то такая численная схема будет соответствовать методу Боффетта—Осборна второго порядка точности. Добавляя одновременно слагаемые следующего порядка, например в выражении для k_m^2 , пропорциональные Δx_m^4 и Δx_m^6 , получим схему четвёртого и шестого порядка соответственно. Часть этих рядов по степеням Δx_m была представлена в работе [27] и не включала последние слагаемые, соответствующие шестому порядку аппроксимации. Также в выражении (31) в слагаемом, пропорциональном Δx_m^3 , прежде был указан неправильный знак [27, формула (16)].

Элементы матрицы производных $\mathbf{U}'(x_m) = \partial \mathbf{U} / \partial \zeta$ имеют вид

$$U'_{11} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\operatorname{ch} k_m - \frac{i\kappa_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m \right) = \left(k'_m - \frac{i\kappa'_m}{k_m} + \frac{i\kappa_m k'_m}{k_m^2} \right) \operatorname{sh} k_m - \frac{i\kappa_m k'_m}{k_m} \operatorname{ch} k_m, \quad (33)$$

$$U'_{12} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\chi_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m \right) = \left(\frac{\chi'_m}{k_m} - \frac{\chi_m k'_m}{k_m^2} \right) \operatorname{sh} k_m + \frac{\chi_m k'_m}{k_m} \operatorname{ch} k_m, \quad (34)$$

$$U'_{21} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\sigma \chi_m^*}{k_m} \operatorname{sh} k_m \right) = \sigma \left(\frac{\chi_m^*}{k_m} - \frac{\chi_m^* k'_m}{k_m^2} \right) \operatorname{sh} k_m + \sigma \frac{\chi_m^* k'_m}{k_m} \operatorname{ch} k_m, \quad (35)$$

$$U'_{22} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\operatorname{cosh} k_m + \frac{i\kappa_m}{k_m} \operatorname{sh} k_m \right) = \left(k'_m + \frac{i\kappa'_m}{k_m} - \frac{i\kappa_m k'_m}{k_m^2} \right) \operatorname{sh} k_m + \frac{i\kappa_m k'_m}{k_m} \operatorname{ch} k_m, \quad (36)$$

где производные $k'_m = \partial k_m / \partial \zeta$, $\chi'_m = \partial \chi_m / \partial \zeta$ и $\kappa'_m = \partial \kappa_m / \partial \zeta$ можно получить из выражений (30)–(32):

$$k'_m = \frac{1}{2k_m} \left\{ -2\zeta \Delta x_m^2 - \sigma [16i(q'_m q_m''^* - q_m^* q_m'') - 64|q'_m|^2 \zeta] \frac{\Delta x_m^6}{5760} \right\}, \quad (37)$$

$$\kappa'_m = \Delta x_m + \sigma [4(q_m^* q_m'' + q_m q_m''^* - 6|q'_m|^2) - 16i\zeta(q' - q q^*)] \frac{\Delta x_m^5}{1440}, \quad (38)$$

$$\chi'_m = 4iq'_m \frac{\Delta x_m^3}{24} + (24iq_m''' - 64\zeta q_m'' + 192i\zeta^2 q'_m - 64i\sigma |q_m|^2 q'_m) \frac{\Delta x_m^5}{5760}. \quad (39)$$

2.4 Численные примеры

Далее представлены результаты работы описанного алгоритма на примере потенциала $q(x) = A \operatorname{sech} x$, где амплитуда A без ограничения общности может быть выбрана действительной и положительной. Для такого потенциала существует точное решение прямой задачи рассеяния [24], что позволяет проанализировать сходимость численной схемы. Коэффициенты рассеяния на действительной оси спектрального параметра имеют следующий вид:

$$a(\xi) = \frac{\Gamma(-i\xi + 1/2)^2}{\Gamma(-i\xi + A + 1/2)\Gamma(-i\xi - A + 1/2)}, \quad b(\xi) = -\frac{\sin(\pi A)}{\operatorname{ch}(\pi \xi)}, \quad (40)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция комплексной переменной z . Коэффициент $a(\xi)$ может быть продолжен на комплексную плоскость, как уже пояснялось выше. Поэтому согласно условию $a(\zeta_n) = 0$ (см. выражения (5)) дискретный спектр описывается выражением

$$\zeta_n = i(A - n + 1/2), \quad n = 1, \dots, \operatorname{int}[A + 1/2], \quad (41)$$

где $\operatorname{int}[A]$ обозначает целую часть амплитуды A .

В дополнение к результатам работы [24] можно найти аналитическое выражение для нормировочных констант солитонов рассматриваемого потенциала $A \operatorname{sech} x$, пользуясь выражениями (5)

и (40). Значение коэффициента b в точках ζ_n можно определить непосредственно из выражения (40), в то время как для вычисления значений a' из-за наличия в этом выражении особенностей необходимо рассмотреть предел $\zeta \rightarrow \zeta_n$.

Таким образом, получаем следующее выражение (см. детали вычислений в монографии [64]):

$$\rho_n = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n} \frac{b(\zeta)}{a'(\zeta)} = - \frac{i\Gamma(1 + 2A - n)}{(n - 1)!\Gamma(1 + A - n)^2}, \quad n = 1, \dots, \text{int}[A + 1/2]. \quad (42)$$

В случае, когда $A = N$, где N — целое число, коэффициент $b(\xi) = 0$ согласно формуле (40), что приводит к $r(\xi) = 0$. Отсутствие непрерывного спектра означает, что потенциал $N \operatorname{sech} x$ представляет собой частный случай N -солитонного решения НУШ со следующими собственными числами и нормировочными константами:

$$\zeta_n = i(A - n + 1/2), \quad \rho_n = - \frac{i(2N - n)!}{(n - 1)!(N - n)!^2}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (43)$$

В качестве первого численного примера рассмотрим потенциал формы гиперболического секанса с амплитудой $A = 15/4$, в котором содержится 4 солитона и ненулевой непрерывный спектр. Размер интервала $2L$ выбирался так, чтобы амплитуда волнового поля в точках $\pm L$ составляла величину порядка $\sim 10^{-16}$ и эффект конечного интервала был пренебрежимо мал по сравнению с влиянием ошибок дискретизации. На основе описанного выше подхода были реализованы схемы решения задачи ЗШ 2, 4 и 6-го порядков сходимости в пакете программ Wolfram Mathematica. Поиск нулей коэффициента a_{tr} осуществлялся методом Ньютона, который входит в набор стандартных функций этого пакета. Чтобы избежать возникновения существенных ошибок округления при вычислении матрицы рассеяния, а также аномальных ошибок определения нормировочных констант, для всех операций использовалась арифметика высокой точности.

Для демонстрации сходимости предложенной схемы решается прямая задача рассеяния на расчётных сетках с числом точек дискретизации $M = 256, 512, \dots, 8192$. На рис. 2а представлены абсолютные ошибки нахождения собственных чисел, которые определяются как $|\zeta_n^{\text{num}} - \zeta_n^{\text{ex}}|$, где ζ_n^{num} — найденное при помощи численного алгоритма значение n -го собственного числа, ζ_n^{ex} — соответствующее точное значение согласно выражению (41). Аналогичным образом, а именно как $|\rho_n^{\text{num}} - \rho_n^{\text{ex}}|/|\rho_n^{\text{ex}}|$, мы определяем относительные ошибки вычисления нормировочных констант, представленные на рис. 2б. Наконец, на рис. 2в показаны интегральные относительные ошибки определения непрерывного спектра $|(\text{cont}^{\text{num}} - \text{cont}^{\text{ex}})/\text{cont}^{\text{ex}}|$, которые рассчитываются по формуле $|\sum_j [r^{\text{num}}(\xi_j) - r^{\text{ex}}(\xi_j)]/r^{\text{ex}}(\xi_j)|$, где $r^{\text{num}}(\xi_j)$ и $r^{\text{ex}}(\xi_j)$ — вычисленное и точное значение коэффициента отражения в дискретных точках ξ_j , взятых на интервале $[-2, 2]$ с шагом $\Delta\xi = 0,1$, соответственно. Рисунок 2 демонстрирует порядок сходимости предложенных схем для всех составляющих данных рассеяния. Угол наклона на логарифмических графиках соответствует 2, 4 и 6-му порядкам сходимости, как и ожидалось. Важно отметить, что увеличение числа элементов в схемах высокого порядка приводит лишь к незначительному росту времени расчёта матрицы рассеяния. Так, по сравнению со схемой второго порядка схема шестого порядка оказалась примерно в 1,75 раз медленнее при аналогичной дискретизации, при этом, например, уже для $M = 512$ результаты становятся точнее, чем результаты схемы второго порядка, с использованием 8192 точек дискретизации. Таким образом, в данном примере общее ускорение расчёта от перехода к схеме шестого порядка при сохранении желаемого уровня точности составит $8192/(1,75 \times 512) \sim 9$ раз.

В дополнение мы исследуем поведение численных ошибок при разной амплитуде гиперболического секанса $A = (N - 1/4)$, где $N = 2, 4, 8, 16$ и 32 соответствует числу солитонов, содержащихся в потенциале, а слагаемое $-1/4$ обеспечивает наличие ненулевой составляющей непрерывного

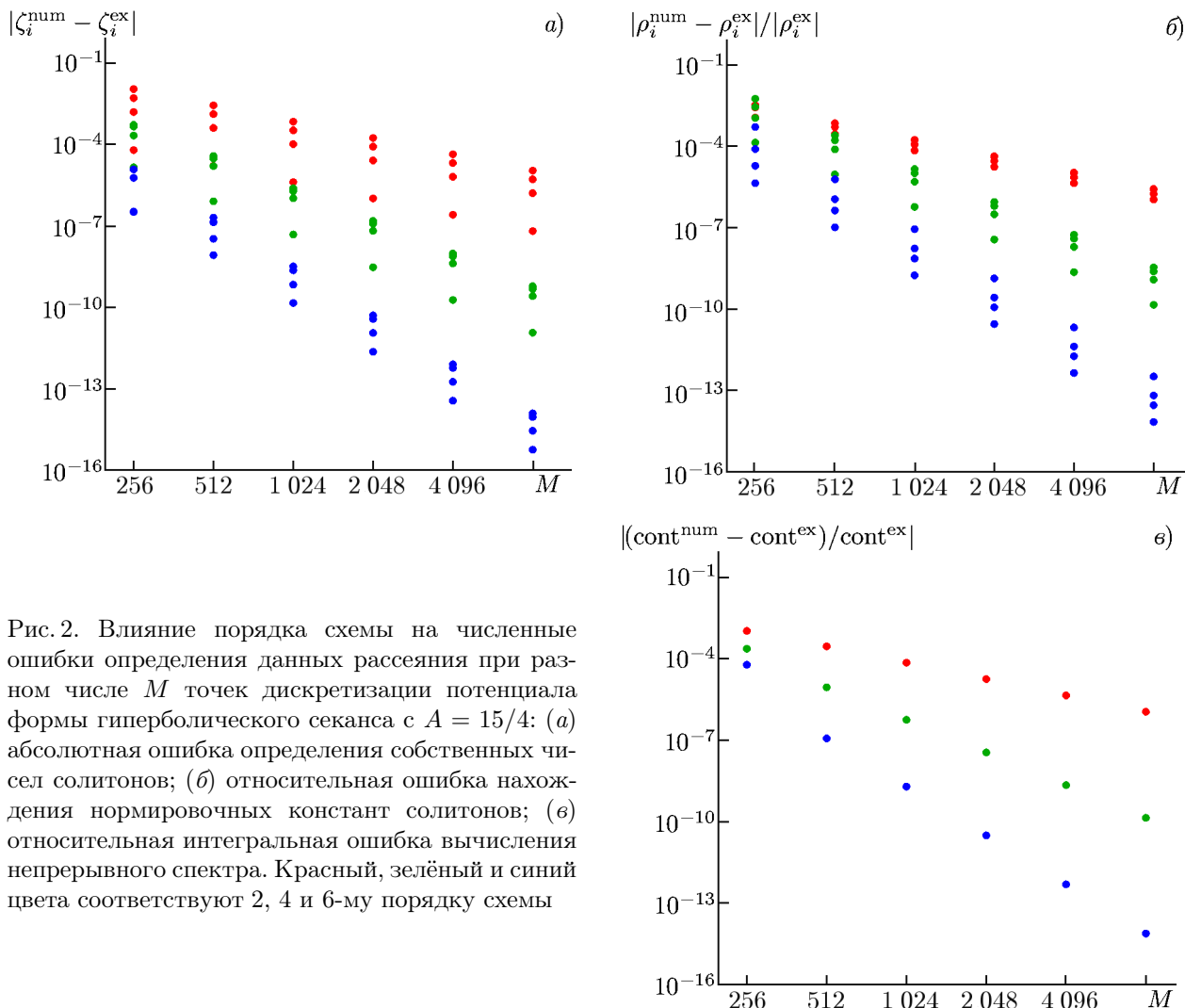


Рис. 2. Влияние порядка схемы на численные ошибки определения данных рассеяния при разном числе M точек дискретизации потенциала формы гиперболического секанса с $A = 15/4$: (а) абсолютная ошибка определения собственных чисел солитонов; (б) относительная ошибка нахождения нормировочных констант солитонов; (в) относительная интегральная ошибка вычисления непрерывного спектра. Красный, зелёный и синий цвета соответствуют 2, 4 и 6-му порядку схемы

спектра. Увеличение числа солитонов и отношения их амплитуд приводит к быстрому росту требуемой точности определения собственных чисел, как мы наглядно продемонстрировали на простейшем двухсолитонном примере (18). Дополнительным фактором, усугубляющим развитие аномальных численных ошибок при решении прямой задачи рассеяния, что также видно из примера (18), является величина расчётного интервала, которая в наших экспериментах довольно велика и составляет $2L \sim 80$. В наших вычислениях мы применяли арифметику с точностью от нескольких десятков (для $N = 2$) до двух тысяч знаков (для $N = 32$). При увеличении амплитуды потенциала его характерная ширина остаётся равной величине порядка единицы. В то же время характерную ширину наибольшего солитона, содержащегося в потенциале, можно оценить по порядку величины как $1/A$. Это приводит к необычной ситуации в случае потенциалов с большими амплитудами, когда дискретизация, достаточная для хорошей аппроксимации волнового поля и его спектра Фурье, может оказаться недостаточной для определения характеристик солитонов, содержащихся в нём, и для успешной работы схем высокого порядка. Мы иллюстрируем этот вывод с помощью рис. 3, на котором представлены ошибки схем разных порядков в зависимости от N для фиксированной дискретизации с постоянным шагом $\Delta x = 0,025$ и величиной интервала $2L$, которая подбирается таким образом, чтобы амплитуда волнового поля в точках $\pm L$ составляла величину порядка $\sim 10^{-16}$. Так, например, для случая $N = 2$ ширина области

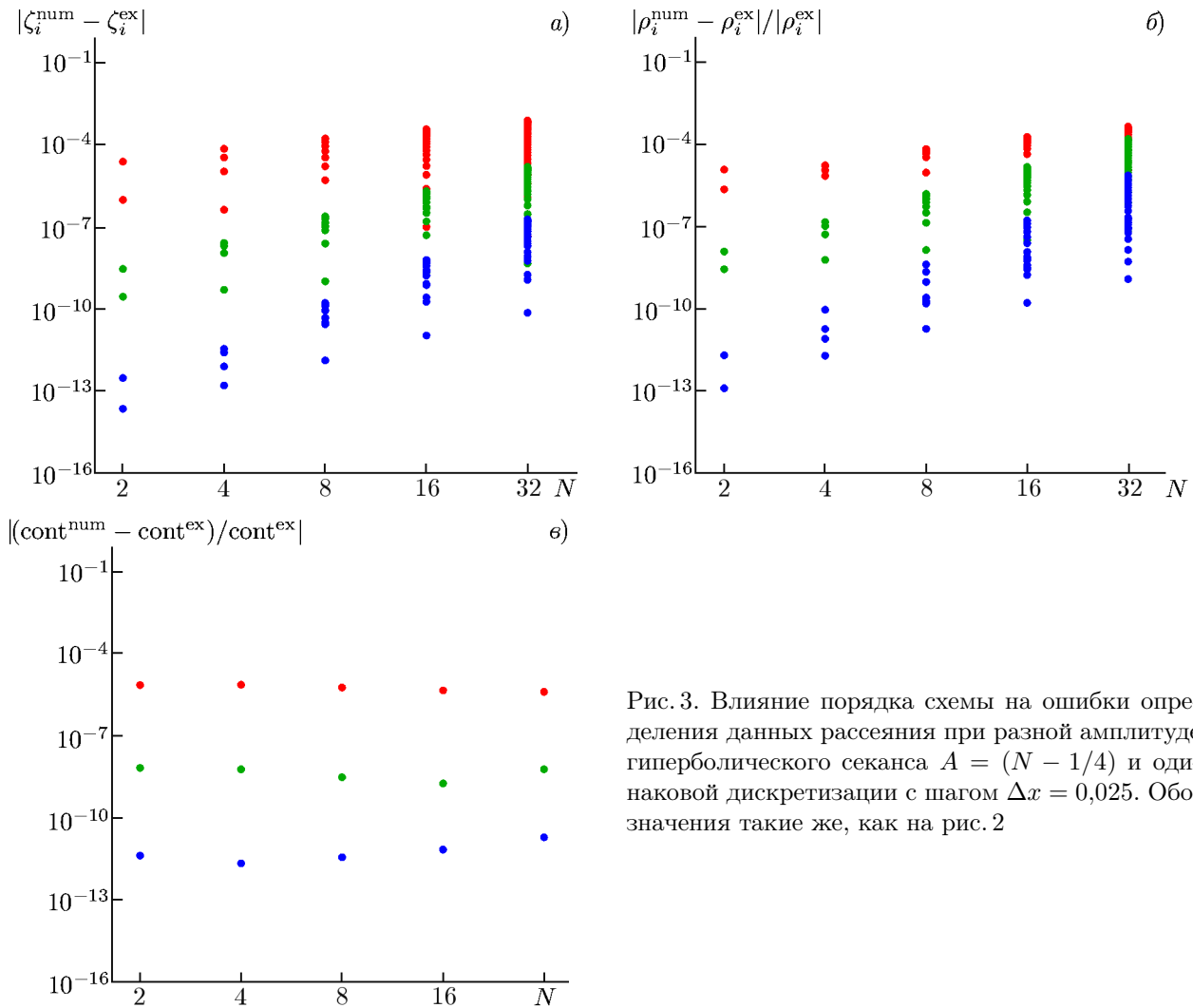


Рис. 3. Влияние порядка схемы на ошибки определения данных рассеяния при разной амплитуде гиперболического секанса $A = (N - 1/4)$ и одинаковой дискретизации с шагом $\Delta x = 0,025$. Обозначения такие же, как на рис. 2

равна $2L \approx 76,2$, а для последнего случая ($N = 32$) она составляет $2L \approx 82$. Из рис. 3а и б видно, что увеличение амплитуды A приводит к быстрому росту ошибок идентификации дискретного спектра, при этом схемы высокого порядка, содержащие в себе ряды Тейлора, теряют точность быстрее. Так, в рассматриваемом примере при $N = 32$ различие между численными схемами разных порядков становится слабым и далее эта ситуация усугубляется. Интересно отметить, что, в отличие от дискретного спектра, непрерывный спектр не испытывает серьёзных изменений при увеличении амплитуды потенциала (см. выражения (40) и (5)). Поэтому естественно ожидать, что точность определения непрерывного спектра будет лишь незначительно зависеть от N , что подтверждается рис. 3в.

Мы приходим к выводу, что для успешного решения прямой задачи рассеяния для потенциала формы гиперболического секанса разрешение должно выбираться пропорционально амплитуде A , так что величина $A\Delta x$ остаётся постоянной. На рис. 4 представлен результат такого расчёта, который демонстрирует успешную идентификацию данных рассеяния для всех рассматриваемых амплитуд потенциала вплоть до $A = (32 - 1/4)$ и подчёркивает особую эффективность схем высокого порядка. Расчёт проводился полностью аналогично представленному на рис. 3 с отличием в шаге дискретизации, который выбирался согласно выражению $\Delta x = 0,1/N$. При этом, как и ожидалось, точность идентификации непрерывного спектра быстро возрастает с ростом A

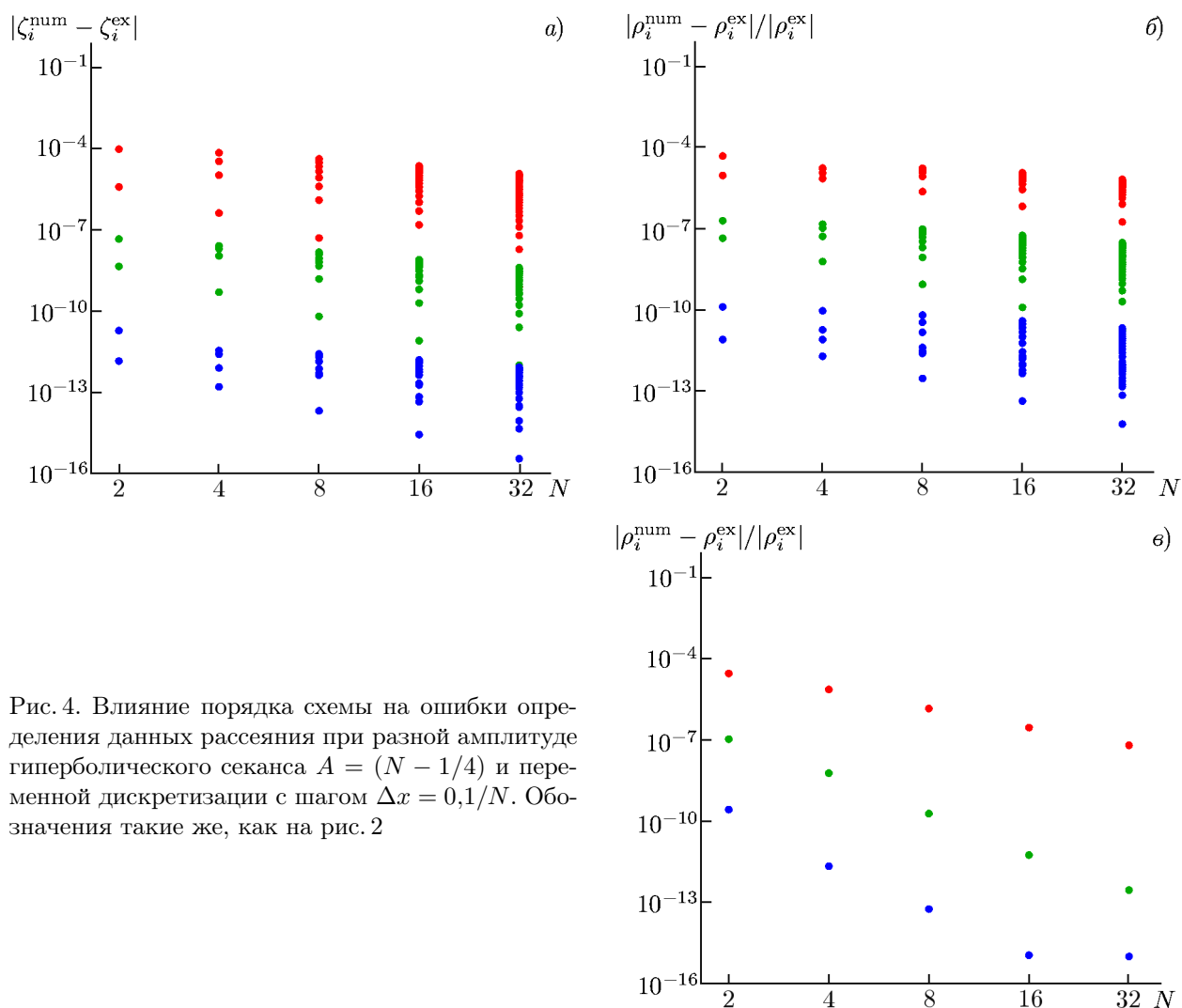


Рис. 4. Влияние порядка схемы на ошибки определения данных рассеяния при разной амплитуде гиперболического секанса $A = (N - 1/4)$ и переменной дискретизации с шагом $\Delta x = 0,1/N$. Обозначения такие же, как на рис. 2

и уменьшением Δx , так что для схемы 6-го порядка при $N = 32$ наблюдается выход величины ошибки на плато уровня порядка 10^{-16} , что связано с эффектом конечной области в численном расчёте (см. также пояснения выше).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы подробно описали построение численных схем высоких (4-го и 6-го) порядков сходимости с помощью разложения Магнуса для решения системы ЗШ и представили результаты исследования ошибок решения соответствующей прямой задачи рассеяния. Решение системы ЗШ для локализованных потенциалов (волновых полей) позволяет найти полный набор данных рассеяния $\{\zeta_n, \rho_n; r\}$, которые являются нелинейным аналогом спектра Фурье и дают возможность описать эволюцию волнового поля в модели НУШ. Иными словами, описанные схемы позволяют аккуратно решить прямую задачу рассеяния для НУШ численно. Мы представили результаты расчётов данных рассеяния для потенциалов вида $A \operatorname{sech} x$ и сравнили их с известным в этом случае точным решением прямой задачи рассеяния. В качестве эталонного примера мы использовали классическую схему Бофсетта–Осборна для решения системы ЗШ, которая

представляет собой частный случай разложения Магнуса второго порядка сходимости. Мы установили, что время расчёта матрицы рассеяния с помощью предложенного алгоритма 6-го порядка лишь в 1,75 раза больше, чем с помощью метода Боффетта—Осборна, тогда как выигрыш по времени от снижения числа точек дискретизации волнового поля при сохранении требуемой точности может достигать целого порядка и более. Чтобы избежать численных неустойчивостей, присущих решению прямой задаче рассеяния, мы использовали арифметику высокой точности как при вычислении матрицы рассеяния, так и при поиске нулей коэффициента рассеяния a_{tr} .

Данная статья является продолжением наших работ [27, 28], по сравнению с которыми здесь явно приведены все коэффициенты разложения Магнуса вплоть до 6-го порядка аппроксимации, а также результаты исследования ошибок определения непрерывного спектра данных рассеяния. Кроме того, рассмотренный пример волнового поля с большим числом солитонов в потенциале $A \operatorname{sech} x$ является в некотором смысле противоположным примеру с N -солитонным решением, изученным в предыдущей работе [27]. В самом деле, в указанной работе изучалось поведение численных схем решения прямой задачи рассеяния для НУШ при добавлении солитонов с приблизительным сохранением их плотности на единицу пространственного интервала. Иными словами, поле расширялось в пространстве за счёт новых солитонов, что приводило к росту ошибки дискретизации, накапливаемой при расчёте матрицы рассеяния. В данной работе увеличение числа солитонов достигается за счёт роста амплитуды A без изменения характерной ширины волнового поля (т. е. за счёт увеличения плотности солитонов). В то же время характерная ширина наибольшего солитона, содержащегося в потенциале, уменьшается как $1/A$. Это приводит к необычной ситуации в случае потенциалов с большими амплитудами, когда дискретизация, достаточная для хорошей аппроксимации волнового поля и его спектра Фурье, может оказаться недостаточной для определения характеристик содержащихся в нём солитонов. Для точного решения прямой задачи рассеяния волновые поля с большими амплитудами требуют дискретизации, шаг которой сравним с характерной шириной наибольших солитонов, содержащихся в них. При этом шаг дискретизации может быть существенно меньше того, который необходим для восстановления полного спектра Фурье волнового поля. Таким образом, для дальнейшего применения предложенных схем решения прямой задачи рассеяния к сложным волновым полям, таким как плотный солитонный газ или случайные волны, может оказаться полезным использование сеток с переменным шагом, подобным представленной на рис. 1а.

Важно отметить, что предложенные схемы позволяют решить прямую задачу рассеяния для дискретного спектра в классической постановке метода обратной задачи рассеяния. При помощи расчёта матрицы рассеяния определяются нули коэффициента a_{tr} , при этом значения нормировочных констант вычисляются в найденных точках. На данный момент использование предложенных схем в сочетании с арифметикой высокой точности является уникальным инструментом анализа сложных волновых полей, содержащих большое (например, порядка $O(10^2)$ и более) количество солитонов для определения полного дискретного спектра, включая как собственные числа, так и нормировочные константы. При этом вопрос о разработке альтернативных методов является открытым и крайне актуальным. Так, например, собственные числа сложных волновых полей могут эффективно вычисляться при помощи метода Фурье-коллокаций [65], который состоит в замене волнового поля на его Фурье-гармоники и дифференциального оператора $\hat{\mathcal{L}}$ на матрицу с размерностью, пропорциональной числу Фурье-гармоник. При этом задача поиска ζ_n сводится к задаче на собственные числа этой матрицы, которая для числа гармоник порядка нескольких тысяч решается довольно быстро по сравнению с задачей о поиске нулей коэффициента a_{tr} . Однако для волновых полей, характеризующихся десятком тысяч гармоник и более, применение метода Фурье-коллокаций оказывается ограниченным объёмом оперативной памяти современных компьютеров [66]. Как было показано в недавней работе [67], идентифи-

кация нормировочных констант солитонов также возможна с помощью метода, основанного на фурье-коллокациях. Таким образом, этот подход можно рассматривать как аналог решения задачи рассеяния, осуществляемого в фурье-пространстве. Однако ключевой вопрос об устойчивости решения методом фурье-коллокаций для определения ρ_n при наличии большого числа солитонов в волновом поле на данный момент является открытым.

Дальнейшая работа авторов будет направлена на оптимизацию алгоритма решения прямой задачи рассеяния для локализованных волновых полей с произвольной формой. Мы полагаем, что оптимальным является использование приближённого расчёта дискретных собственных чисел с помощью быстрых алгоритмов (таких как метод фурье-коллокаций) с последующим уточнением данных с помощью схем, представленных в данной работе. Также необходимо автоматизировать выбор необходимой точности арифметики и переменной дискретизации волнового поля, что существенно ускорит время расчётов. Основной перспективой применения такого алгоритма является характеристика сложных, в том числе случайных, волновых полей, которые возникают в таких фундаментальных задачах физики интегрируемых и близких к ним систем, как модуляционная неустойчивость, солитонный газ и интегрируемая турбулентность [66, 68–78]. С учётом необходимости мелкомасштабной дискретизации волновых полей с большими амплитудами и протяжённостями применение схем 6-го (или даже выше) порядков сходимости может оказаться принципиальным для успешной работы с большим количеством сложных нелинейных волновых полей, например в задачах о статистическом изучении данных рассеяния. Наконец, отметим, что предложенные схемы решения задачи ЗШ могут быть применены и для решения прямой задачи рассеяния с неубывающими и периодическими граничными условиями, т. е. для исследования солитонов на фоне конденсата (бризеров) и конечнозонных решений НУШ.

Оба автора предложили ключевые идеи работы и внесли равнозначный вклад в теоретические исследования, численные расчёты и подготовку текста статьи. Первая часть работы выполнена в рамках государственного задания ИТ СО РАН (Р. И. Мулладжанов, разработка алгоритма), вторая часть работы выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-02-00042, 19-31-60028 — А. А. Гелаш, исследование ошибок алгоритмов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G. Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence. Berlin : Springer-Verlag, 2012. 264 p.
2. Moin P., Mahesh K. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1998. V.30. P. 539–578. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.539>
3. Ishihara T., Gotoh T., Kaneda Y. // Annu. Rev. Fluid Mech. 2009. V.41. P. 165–180. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165203>
4. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1 095–1 097. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095>
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. // Журн. exper. теор. физ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
6. Drazin P. G., Johnson R. S. Solitons: An Introduction. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 226 p.
7. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 753–756.
8. Захаров В. Е., Шабат А. Б. // Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8, № 3. С. 43–53.
9. Davey A., Stewartson K. // Proc. Royal Soc. London A. Math. Phys. Sci. 1974. V. 338, No. 1 613. P. 101–110. <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0076>

10. Boiti M., Martina L., Pempinelli F. // *Chaos Soliton Fract.* 1995. V.5, No. 12. P.2377–2417. [https://doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)E0106-Y](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)E0106-Y)
11. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. // *Успехи физ. наук.* 1999. Т.182, № 6. С.569–592. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201206a.0569>
12. Захаров В.Е. // *Прикл. механ. теор. физ.* 1968. Т.2. С.86–94.
13. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам.* М. : Физматлит, 2005. 648 с.
14. Sulem C., Sulem P.-L. *The nonlinear Schrodinger equation. Self-focusing and wave collapse.* New York : Springer-Verlag, 1999. 366 p.
15. Fukushima K., Wadati M., Narahara Y. // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1980. V.49. P.1593–1597. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.49.1593>
16. Lin M., Duan W. // *Chaos Soliton Fract.* 2005. V.24, No. 1. P.191–196. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.09.015>
17. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* М. : Наука, 1980. 319 с.
18. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* М. : Мир, 1987. 478 с.
19. Lax P.D. // *Commun. Pure Appl. Math.* 1968. V.21, No. 5. P.467–490. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160210503>
20. Kivshar Y.S., Malomed B.A. // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V.61, No. 4. P.763. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.763>
21. Манаков С.В. // *Журн. exper. теор. физ.* 1974. Т.38. С.248–253.
22. Desaix M., Anderson D., Helczynski L., Lisak M. // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V.90, No. 1. Art. no. 013901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.013901>
23. Tsoy E.N., Abdullaev F.K. // *Phys. Rev. E.* 2003. V.67, No. 5. Art. no. 056610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.056610>
24. Satsuma J., Yajima N.B. // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 1974. V.55. P.284–306. <https://doi.org/10.1143/PTPS.55.284>
25. Desaix M., Anderson D., Lisak M. // *Phys. Lett. A.* 2008. V.372, No. 14. P.2386–2390. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.11.060>
26. Boffetta G., Osborne A.R. // *J. Comp. Phys.* 1992. V.102, No. 2. P.252–264. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90370-E](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90370-E)
27. Mullyadzhanov R., Gelash A. // *Opt. Lett.* 2019. V.44. P.5298–5301. <https://doi.org/10.1364/OL.44.005298>
28. Gelash A., Mullyadzhanov R. // *Phys. Rev. E.* 2020. V.101, No. 5. Art. no. 052206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.052206>
29. Osborne A.R. // *J. Comp. Phys.* 1992. V.94, No. 2. P.284–313. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(91\)90223-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(91)90223-8)
30. Provenzale A., Osborne A.R. // *J. Comp. Phys.* 1992. V.94, No. 2. P.314–351. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(91\)90224-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(91)90224-9)
31. Osborne A.R. // *Phys. Lett. A.* 1993. V.176, No. 1–2. P.75–84. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90319-U](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90319-U)
32. Burtsev S., Camassa R., Timofeyev I. // *J. Comp. Phys.* 1998. V.147, No. 1. P.166–186. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6087>
33. Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A. // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2007. V.24, No. 7. P.1451–1457. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.24.001451>
34. Trogdon T., Olver S., Deconinck B. // *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2012. V.241, No. 11. P.1003–1025. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.02.016>

35. Frumin L. L., Belai O. V., Podivilov E. V., Shapiro D. A. // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2015. V. 32, No. 2. P. 290–296. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000290>
36. Wahls S., Poor V. // *IEEE Trans. Inform. Theory* 2015. V. 61, No. 12. P. 6957–6974. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2485944>
37. Vasylichenkova A., Prilepsky J. E., Turitsyn S. K. // *Opt. Lett.* 2018. V. 43, No. 15. P. 3690–3693. <https://doi.org/10.1364/OL.43.003690>
38. Vaibhav V. // *IEEE Photon. Technol. Lett.* 2018. V. 30, No. 8. P. 700–703. <https://doi.org/10.1109/LPT.2018.2812808>
39. Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M. // *Opt. Express.* 2020. V. 28, No. 1. P. 20–39. <https://doi.org/10.1364/OE.377140>
40. Medvedev S., Chekhovskoy I., Vaseva I., Fedoruk M. // *Opt. Lett.* 2020. V. 45, No. 7. P. 2082–2085. <https://doi.org/10.1364/OL.387436>
41. Medvedev S., Vaseva I., Chekhovskoy I., Fedoruk M. // *Opt. Lett.* 2019. V. 44, No. 9. P. 2264–2267. <https://doi.org/10.1364/OL.44.002264>
42. Prins P. J., Wahls S. // *IEEE Access.* 2019. V. 7. P. 122914–122930. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2932256>
43. Osborne A. *Nonlinear ocean waves.* Boston : Academic Press. 2010. 917 p.
44. Randoux S., Suret P., Chabchoub A., et al. // *Phys. Rev. E.* 2018. V. 98, No. 2. Art. no. 022219. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.022219>
45. Slunyaev A. // *Eur. J. Mech. B-Fluids.* 2006. V. 25, No. 5. P. 621–635. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2006.03.005>
46. Слюняев А. В. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, № 1. С. 1–23.
47. Suret P., Tikan A., Bonnefoy F., et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2020. V. 125, No. 26. Art. no. 264101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.264101>
48. Osborne A. R., Segre E., Boffetta G., Cavaleri L. // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67, No. 5. P. 592–595. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.592>
49. Osborne A. R. // *Chaos Soliton Fract.* 1995. V. 5, No. 12. P. 2623–2637. [https://doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)E0118-9](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)E0118-9)
50. Osborne A. R. // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1995. V. 86, No. 1–2. P. 81–89. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(95\)00089-M](https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00089-M)
51. Derevyanko S., Small E. // *Phys. Rev. A.* 2012. V. 85, No. 5. Art. no. 053816. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.053816>
52. Braud F., Conforti M., Cassez A., et al. // *Opt. Lett.* 2016. V. 41, No. 7. P. 1412–1415. <https://doi.org/10.1364/OL.41.001412>
53. Yousefi M. I., Kschischang F. R. // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2014. V. 60, No. 7. P. 4312–4328. <https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2321143>
54. Turitsyn S. K., Prilepsky J. E., Le S. T., et al. // *Optica.* 2017. V. 4, No. 3. P. 307–322. <https://doi.org/10.1364/OPTICA.4.000307>
55. Frumin L. L., Gelash A. A., Turitsyn S. K. // *Phys. Rev. Lett.* 2017. V. 118, No. 22. Art. no. 223901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.223901>
56. Chekhovskoy I. S., Shtyrina O. V., Fedoruk M. P., et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 122, No. 15. Art. no. 153901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.153901>
57. Turitsyn S. K., Chekhovskoy I. S., Fedoruk M. P. // *Opt. Lett.* 2020. V. 45, No. 11. P. 3059–3062. <https://doi.org/10.1364/OL.390630>
58. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория).* Т. 3. М. : Физматлит, 2001. 808 с.
59. Blanes S., Casas F., Oteo J. A., Ros J. // *Phys. Rep.* 2009. V. 470, No. 5–6. P. 151–238.

- <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.11.001>
60. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. Гамильтонов подход в теории солитонов. М. : Наука, 1986. 528 с.
61. Лэмб Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М. : Бибфизмат, 1997. 294 с.
62. Vaibhav V. // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2018. V.61. P.22–36. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.01.017>
63. Aref V. // SCC 2019; 12th Int. ITG Conf. Systems, Commun. Coding. 11–14 February 2019, Rostock. P. 203–208. <https://doi.org/10.30420/454862035>
64. Maimistov A. I., Basharov A. M. Nonlinear optical waves. Berlin : Springer Science+Business Media, 2013. 650 p.
65. Yang J. Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems. Siam : Springer-Verlag, 2010. 430 p.
66. Akhmediev N., Soto-Crespo J. M., Devine N. // Phys. Rev. E. 2016. V. 94, No. 2. Art.no. 022212. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.022212>
67. Garcia-Gomez F. J., Aref V. // J. Lightwave Technol. 2019. V. 37, No. 14. P. 3563–3570. <https://doi.org/10.1109/JLT.2019.2917996>
68. Shurgalina E. G., Pelinovsky E. N. // Phys. Lett. A. 2016. V. 380, No. 24. P. 2049–2053. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.04.023>
69. Pelinovsky E., Shurgalina E. // Advances in Dynamics, Patterns, Cognition. Nonlinear Systems and Complexity. V.20. Cham. : Springer, 2017. P.295–306. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53673-6_18
70. Didenkulova (Shurgalina) E. G. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2019. V. 399. P. 35–41. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.04.002>
71. Slunyaev A. V., Pelinovsky E. N. // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117, No. 21. Art. no. 214501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.214501>
72. Gelash A., Agafontsev D., Zakharov V., et al. // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123, No. 23. Art. no. 234102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.234102>
73. Gelash A. A., Agafontsev D. S. // Phys. Rev. E. 2018. V. 98, No. 4. Art. no. 042210. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.042210>
74. Agafontsev D. S., Zakharov V. E. // Nonlinearity. 2015. V. 28, No. 8. P. 2791–2821. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/8/2791>
75. Soto-Crespo J. M., Devine N., Akhmediev N. // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 116, No. 10. Art. no. 103901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.103901>
76. Zakharov V. E. // Stud. Appl. Math. 2009. V. 122, No. 3. P. 219–234. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2009.00430.x>
77. Kraych A. E., Agafontsev D., Randoux S., Suret P. // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123, No. 9. Art. no. 093902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.093902>
78. Agafontsev D. S., Zakharov V. E. // Low Temperature Phys. 2020. V. 46, No. 8. P. 786–791. <https://doi.org/10.1063/10.0001541>

Поступила в редакцию 5 июня 2020 г.; принята в печать 7 октября 2020 г.

**MAGNUS EXPANSION FOR THE DIRECT SCATTERING PROBLEM:
HIGH-ORDER SCHEMES***R. I. Mullyadzhanov and A. A. Gelash*

We describe at length the construction of the numerical fourth- and sixth-order schemes using the Magnus expansion for solving of the Zakharov–Shabat system, which makes it possible to solve accurately the direct scattering problem for the nonlinear Schrödinger equation. To avoid numerical instabilities typical of the procedure of solving the direct scattering problem, high-precision arithmetic is used. At present, application of the proposed schemes in combination with the high-precision arithmetic is a unique instrument that can be used to analyze complex wave fields, which contain a great number of solitons, and allows one to determine the complete discrete spectrum, including both eigenvalues and normalization constants. In this work, we study the errors in the proposed scheme using an example of the potential in the form of the hyperbolic secant. It is found that the time of calculation of the scattering matrix using the sixth-order algorithm is almost twice as long as compared with that for the standard second-order Boffetta–Osborne algorithm, whereas the time gain resulting from the reduction of the number of the wave-field sampling points on retention of the desired precision can reach a whole order of magnitude and more. Exact solution of the direct scattering problem requires that the sampling interval of high-amplitude wave fields should be comparable with the characteristic width of the largest solitons that they contain. In this case, the sampling interval can be sufficiently smaller than that required for reconstruction of the full Fourier spectrum of the wave field. Application of the proposed schemes with high-order approximation can be of principal importance for successful operation with a great number of complex nonlinear wave fields, such as, e.g., in the process of statistical surveys of the scattering data.