

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

С. А. Кащенко*

Ярославский госуниверситет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Россия

Рассмотрен вопрос о локальной динамике системы диффузионно связанных в цепочку уравнений Ван-дер-Поля. В предложении о большом количестве элементов в цепочке осуществлён переход к пространственно-распределённой нелинейной краевой задаче. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия; все они имеют бесконечную размерность. Разработан алгоритм сведения исходной задачи к изучению специальных нелинейных уравнений параболического типа с одной и с двумя пространственными переменными. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной задачи в окрестности состояния равновесия.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цепочкой связанных уравнений Ван-дер-Поля называют систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j = f(u_j) + d_1(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + d_2(\dot{u}_{j+1} - 2\dot{u}_j + \dot{u}_{j-1}), \quad (1)$$

где $f(u) = -iu^2$, $j = 1, \dots, N$, точка обозначает полную производную по времени. Будем предполагать, что эта цепочка из N элементов замкнута в кольцо, т. е. $u_0 \equiv u_N$, $u_{N+1} \equiv u_1$. Такого типа цепочки исследовались в работах многих авторов [1–6]. В частности, в системе (1) было установлено существование 2^{N-1} аттракторов [3]. При $d_2 = 0$ такого типа системы возникают в теории дислокаций [7–9]. Асимптотическими методами они изучались в работе [10].

Основное допущение в данной работе состоит в том, что параметр N предполагается достаточно большим, т. е. выражение $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ является достаточно малым:

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2)$$

Функцию $u_j(t)$ удобно представить в виде функции двух переменных $u_j(t) = u(t, x_j)$, а переменную x_j — ассоциировать с точкой окружности с угловой координатой $x_j \in [0, 2\pi]$. При условии (2) естественно перейти к непрерывной переменной $u(t, x)$ ($x \in [0, 2\pi]$) и рассмотреть более общее по сравнению с (1) уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = f(u) + d_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) u(t, x+s) ds - u \right] + \\ + d_2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) \frac{\partial u(t, x+s)}{\partial t} ds - \frac{\partial u}{\partial t} \right], \quad u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \end{aligned} \quad (3)$$

* kasch@uniyar.ac.ru

Функция $F(s, \varepsilon)$ предполагается достаточно гладкой и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) ds = 1. \quad (4)$$

Особый интерес представляет изучение краевой задачи (3) с функциями

$$F(s, \varepsilon) = F^+(s, \varepsilon) + F^-(s, \varepsilon),$$

где $F^\pm(s, \varepsilon) = \frac{1}{2\sigma\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp[-(\varepsilon\sigma)^{-2}(s \pm \varepsilon)^2]$, $\sigma > 0$.

Отметим, что при $\sigma \rightarrow +0$ от (3) приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = f(u) + d_1[u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)] + \\ + d_2 \left[\frac{\partial u(t, x + \varepsilon)}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x - \varepsilon)}{\partial t} \right], \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \end{aligned} \quad (5)$$

Исследуем локальную динамику краевой задачи (3), т. е. поведение при $t \rightarrow \infty$ всех решений с достаточно малыми, но независимыми от ε начальными условиями $u|_{t=0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \dot{u}_0(x)$, где $u_0(x)$ и $\dot{u}_0(x)$ непрерывны и периодичны с периодом 2π .

Поведение решений (3) из малой окрестности нулевого состояния равновесия во многом определяется свойствами решений линеаризованной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = d_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) u(t, x + s) ds - u \right] + \\ + d_2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) \frac{\partial u(t, x + s)}{\partial t} ds - \frac{\partial u}{\partial t} \right], \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \end{aligned} \quad (6)$$

Характеристическое уравнение для (6) имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = d_1 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) \exp(iks) ds - 1 \right] + d_2 \lambda \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) \exp(iks) ds - 1 \right], \quad (7)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В том случае, когда все корни (7) имеют отрицательные вещественные части, отделённые от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, все решения (6) и (3) с достаточно малыми по норме $\mathbf{C}_{[0, 2\pi]}$ начальными условиями стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же найдётся корень (7) с положительной и отделённой от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, то поставленная задача становится нелокальной.

Ниже будем предполагать, что реализуется критический случай: уравнение (7) не имеет корней с положительной и отделённой от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Важной особенностью рассматриваемой задачи является тот факт, что критические случаи имеют бесконечную размерность: бесконечно много корней характеристического уравнения (7)

стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Хорошо известные методы инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм оказываются непосредственно не применимы. Здесь будут использованы специальные методы, развитые в работах автора [11–14]. С их помощью будут построены нелинейные параболические уравнения — квазинормальные формы, не содержащие малых параметров, которые играют роль нормальных форм: нелокальная динамика таких уравнений определяет локальное поведение решений (3) при малых ε .

Параметры a , d_1 и d_2 в (3) будем предполагать зависящим от ε :

$$a = a_0 + \varepsilon^2 a_1, \quad d_j = d_{j0} + \varepsilon^2 d_{j1}, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Отметим, что отсутствие корней (7) с положительной вещественной частью необходимо накладывает ограничение

$$a_0 \geq 0. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение (7) можно записать в виде

$$\lambda^2 + [(a_0 + \varepsilon^2 d_1) - (d_{20} + \varepsilon^2 d_{21})g(z)]\lambda + 1 - (d_{10} + \varepsilon^2 d_{11})g(z) = 0, \quad (10)$$

где $z = \varepsilon k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $g(z) = \cos z \cdot \exp(-\sigma^2 z^2) - 1$.

Ниже будем предполагать, что при всех $z \in (-\infty, +\infty)$ выполнено условие

$$d_{10}g(z) < 1. \quad (11)$$

Это, в частности, означает, что уравнение (10) не может иметь нулевого корня.

Линейный анализ рассматриваемой системы приведён в следующем разделе, а в разделе 3 построены так называемые квазинормальные формы. Отметим, что в зависимости от параметра σ эти формы могут содержать либо одну, либо две пространственные переменные. Напомним, что при изучении систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях, близких к критическим, локальная динамика определяется нелокальным поведением решений специальных нелинейных уравнений, которые называются нормальными формами. Метод их построения хорошо известен (см., например, [15]). Для систем с бесконечномерными критическими случаями, а именно к этому классу и принадлежит исходная краевая задача (5), соответствующий метод опирается на тот же формализм метода нормальных форм, но имеет свою специфику. Эти построения описаны в работах [11–14]. Использование термина «квазинормальная форма» вместо термина «нормальная форма» обусловлено не только бесконечномерностью критического случая, но и тем, что ряд базовых утверждений о соответствии структур в нормальной форме и в исходной системе требуют дополнительных обоснований. Основной целью данной работы является построение квазинормальной формы и асимптотических представлений решений исходной системы с помощью решений её квазинормальной формы.

В разделе 4 исследована динамика системы (3) в случае, когда коэффициент σ является малым. В разделе 5 рассматривается несколько иная, но близкая к (3) краевая задача. В заключение сформулированы выводы.

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Условие неположительности вещественных частей всех корней характеристического уравнения (10) состоит в выполнении при всех $z \in (-\infty, +\infty)$ неравенства

$$a_0 \geq d_{20}g(z). \quad (12)$$

В силу (9) строгое равенство при некоторых z в (12) возможно только в двух случаях. В первом из них

$$a_0 = 0 \text{ и } d_{20} \geq 0,$$

а второй случай выделяется условиями

$$a_0 > 0, \quad d_{20} < 0 \text{ и } a_0 = d_{20} \min_z g(z). \quad (13)$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих двух случаев.

2.1. Первый случай

Пусть выполнены условия

$$a_0 = 0 \text{ и } d_{20} \geq 0. \quad (14)$$

Тогда характеристическое уравнение (10) имеет бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lambda_k(\varepsilon) = i + \varepsilon^2 \lambda_{k1} + O(\varepsilon^3), \quad (15)$$

где $\lambda_{k1} = -\delta k^2 - (1/2)a_1$, $\delta = (1/2)(1 + 2\sigma^2)d_{20} + i(1 + 2\sigma^2)d_{10}$, $\text{Re } \delta > 0$.

Таким образом при условиях (14) реализуется критический случай бесконечной размерности: бесконечно много корней (10) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$ и нет корней с положительной и отделимой от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Отметим, что решениями линейной краевой задачи (6) в этом случае являются функции $\xi_k \exp[ikx + \lambda_k(\varepsilon)t]$.

2.2. Второй случай

Пусть выполнено условие (13). Тогда существует такое $z_0 > 0$, что $g(z_0) = \min_z g(z) < 0$. Обозначим через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ такую величину, которая дополняет до целого выражение $z_0 \varepsilon^{-1}$. Тем корням (10) $\lambda_m^\pm(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_m^\pm(\varepsilon)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, отвечают собственные функции

$$\begin{aligned} \exp[\pm i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta + m)x + \lambda_m^\pm(\varepsilon)t], \quad \exp[\mp i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta + m)x + \bar{\lambda}_m^\mp(\varepsilon)t], \\ \lambda_m^\pm(\varepsilon) = i\alpha + \varepsilon^2 \lambda_{m1} + \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha = [1 - g(z_0)]^{1/2}$, $\lambda_{m1} = \delta_0(\theta + m)^2 + (1/2)a_1$, $\delta_0 = (1/2)g''(z_0)[d_{20} - i(2\alpha)^{-1}d_{10}]$.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Рассмотрим отдельно случай 1 и случай 2.

3.1. Первый случай

Пусть выполнены условия (11) и (14). Решения нелинейного уравнения (3) ищем в виде формального асимптотического ряда, главное слагаемое в котором представляет собой решение линейного уравнения (6) с неизвестными амплитудами $\xi_k(\tau)$:

$$u = \varepsilon \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) \exp(ikx + it) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_n(\tau) \exp(-ikx - it) \right] + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x) + \dots,$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ — «медленное» время, а функция $u_3(\tau, t, x)$ периодична по t и x . Это выражение удобно преобразовать, положив

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx).$$

Тогда

$$u = \varepsilon [\xi(\tau, x) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-it)] + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x) + \dots \quad (17)$$

Подставим (17) в (3) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в получившемся формальном тождестве. Приравнивание коэффициентов при ε даёт верное равенство, а, собирая коэффициенты при ε^3 , получаем уравнение относительно u_3 вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = A_1(\xi, \bar{\xi}) \exp(it) + \bar{A}_1(\xi, \bar{\xi}) \exp(-it) + A_2(\xi, \bar{\xi}) \exp(3it) + \bar{A}_2(\xi, \bar{\xi}) \exp(-3it).$$

Условием его разрешимости в классе 2π -периодических по t функций является равенство $A_1(\xi, \bar{\xi}) = 0$. Отсюда и из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s, \varepsilon) \xi(\tau, x + s) ds = \varepsilon^2 g''(0) \frac{\partial^2 \xi(\tau, x)}{\partial x^2} + O(\varepsilon^3)$$

приходим к краевой задаче относительно $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 \xi(\tau, x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} a_1 \xi - \frac{1}{2} \xi |\xi|^2, \quad (18)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x). \quad (19)$$

В результате получаем следующее утверждение, которое связывает решения краевых задач (3) и (18), (19).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (11) и (14), и пусть $\xi_0(\tau, x)$ — решение краевой задачи (18), (19). Тогда краевая задача (3) имеет асимптотическое (с точностью до $O(\varepsilon^3)$) решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon [\xi_0(\varepsilon t, x) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\varepsilon t, x) \exp(-it)].$$

В том случае, когда $\xi_0(\tau, x)$ — периодическое по τ решение (18), (19) и выполнено условие типа невырожденности, можно показать, что функция $u_0(t, x, \varepsilon)$ является периодической по t или тором той же устойчивости, что и $\xi_0(\tau, x)$.

Отметим также, что при увеличении параметра a_1 или при уменьшении параметра δ краевая задача (18), (19) имеет устойчивые решения вида $\text{const} \cdot \exp(ikx + i\omega_k t)$.

3.2. Второй случай

Здесь предполагаем, что выполнены условия (13). Центральную роль играют структуры, формирующиеся на модах порядка $\pm(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)$. Поэтому введём в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon \{ \xi(\tau, x) \exp[i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\alpha t] + \eta(\tau, x) \exp[-i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\alpha t] + \\ + \bar{\xi}(\tau, x) \exp[-i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x - i\alpha t] + \bar{\eta}(\tau, x) \exp[i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x - i\alpha t] \} +$$

$$+ \varepsilon^3 u_3 [t, \tau, x, (z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x] + \dots \quad (20)$$

Подставим (20) в (3) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На втором шаге, приравнявая коэффициенты при ε^3 , получим уравнение для u_3 . Из условия его разрешимости в классе $2\pi/\alpha^{1/2}$ -периодических функций приходим к краевой задаче для определения неизвестных амплитуд $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\delta_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2i\delta_0 \theta \frac{\partial \xi}{\partial x} + (\delta_1 + \delta_0 \theta^2) \xi - \frac{1}{2} \xi (|\xi|^2 + 2|\eta|^2), \quad (21)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\delta_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2i\delta_0 \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\delta_1 + \delta_0 \theta^2) \eta - \frac{1}{2} \eta (2|\xi|^2 + |\eta|^2), \quad (22)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x). \quad (23)$$

Подведём итог.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (13). Пусть при некотором $\theta = \theta_0$ краевая задача (21)–(23) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$ решение $\xi_0(\tau, x)$, $\eta_0(\tau, x)$. Пусть последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ определяется из условия $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$. Тогда краевая задача (3) имеет асимптотическое (с точностью до $O(\varepsilon_n^3)$) решение $u_0(t, x, \varepsilon_n)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon_n) = \varepsilon_n \{ \xi_0(\tau, x) \exp[i(z_0 \varepsilon_n^{-1} + \theta_0)x + i\alpha t] + \\ + \eta_0(\tau, x) \exp[-i(z_0 \varepsilon_n^{-1} + \theta_0)x + i\alpha t] + \bar{\xi}_0(\tau, x) \exp[-i(z_0 \varepsilon_n^{-1} + \theta_0)x - i\alpha t] + \\ + \bar{\eta}_0(\tau, x) \exp[i(z_0 \varepsilon_n^{-1} + \theta_0)x - i\alpha t] \}.$$

Заметим, что при разных значениях параметра θ динамические свойства краевой задачи (21)–(23) могут меняться [16]. Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ в исходной краевой задаче (3) может происходить бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций.

4. НОВЫЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ σ

Основное предположение этого раздела состоит в том, что параметр σ мал: для некоторого фиксированного значения σ_1 выполнено равенство

$$\sigma = \varepsilon \sigma_1. \quad (24)$$

Отсюда следует, что

$$g(z) = \cos z \exp(-\varepsilon^2 \sigma_1^2 z^2) - 1 = -2 \sin^2(z/2) - \varepsilon^2 \sigma_1^2 z^2 + O(\varepsilon^4).$$

Равенство (24) вносит новый и существенный вклад в построение квазинормальной формы для краевой задачи (3). Снова рассмотрим отдельно два случая.

4.1. Первый случай

Пусть выполнены условия (11) и (14). Функция $g(z)$ принимает асимптотически близкие к нулю значения не только при $z \approx 0$, но и при всех $z_n = 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Сразу отметим, что величина $z_n \varepsilon^{-1}$ является целой, поскольку $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$.

Все близкие при $\varepsilon \rightarrow 0$ к мнимой оси корни $\lambda_{mn}(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_{mn}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (10) получаем при значениях величин $\varepsilon k_\varepsilon$, близких к $2\pi n$, т. е. при значениях

$$k_\varepsilon = 2\pi n \varepsilon^{-1} + m \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тем самым

$$\lambda_{mn}(\varepsilon) = i + \varepsilon^2 \gamma + O(\varepsilon^4), \gamma = -\frac{1}{2}(d_2 - id_1)m^2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2(d_2 - id_1)(2\pi n)^2 - \frac{1}{2}a_1.$$

Положим

$$\xi(\tau, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{mn}(\tau) \exp(imx + i2\pi ny), \quad y = 2\pi\varepsilon^{-1}x,$$

и пусть

$$u = \varepsilon [\xi(\tau, x, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp(-it)] + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (25)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а функция $u_3(t, \tau, x, y)$ является 2π -периодической по t и x и 1-периодической по y . После подстановки (25) в (3) соберём коэффициенты при ε^3 . В результате получим уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости приходим к итоговой краевой задаче для $\xi(\tau, x, y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma_1^2(d_{20} - id_{10})\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(d_{20} - id_{10})\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}a_1\xi - \frac{1}{2}\xi|\xi|^2, \quad (26)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y + 1) \equiv \xi(\tau, x, y). \quad (27)$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (11) и (14) и пусть краевая задача (26), (27) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 1]$ решение $\xi(\tau, x, y)$. Тогда краевая задача (3) имеет асимптотическое (с точностью до $O(\varepsilon^3)$) решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon [\xi_0(\tau, x, y) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\tau, x, y) \exp(-it)], \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad y = 2\pi\varepsilon^{-1}x.$$

Таким образом локальная динамика исходной задачи (3) определяется нелокальной структурой решения краевой задачи (26), (27) с двумя пространственными переменными. Отметим, что просто исследуются вопросы о существовании и устойчивости решений (26), (27) вида $\xi \exp(iny + imx + i\omega_{mn}t)$. Из работы [17] следует, что эта краевая задача может иметь и существенно более сложные решения.

4.2. Второй случай

Пусть выполнены условия

$$a_0 > 0, \quad d_{20} = -\frac{a_0}{2}. \quad (28)$$

Последнее соотношение в (28) с точностью до $O(\varepsilon^3)$ реализуется при значении $z_n = \pi(2n + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, поскольку $\min_z g(z) = -2$. Будем дополнительно предполагать, что значение N является чётным. Тогда выражения $z_n \varepsilon^{-1}$ являются целыми числами.

Корни $\lambda_{mn}(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_{mn}(\varepsilon)$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ характеристического уравнения (10), вещественные части которых близки при $\varepsilon \rightarrow 0$ к нулю, имеют асимптотику

$$\lambda_{mn}(\varepsilon) = i\alpha + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}(d_{20} - i\alpha^{-1}d_{10})(\sigma_1^2 \pi(2n + 1)^2) + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}(a_1 + 2d_{21} - 2i\alpha^{-1}d_{11}) \right] + O(\varepsilon^4), \quad \alpha = (1 + 2d_{10})^{1/2} > 0.$$

Положим

$$\xi(\tau, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{mn}(\tau) \exp[imx + i\pi(2n+1)y], \quad y = 2\pi\varepsilon^{-1}x.$$

Обратим внимание, что функция $\xi(\tau, x, y)$ содержит только нечётные гармоники по переменной y , поэтому $\xi(\tau, x, y+1) \equiv -\xi(\tau, x, y)$.

Рассмотрим формальный ряд

$$u = \varepsilon [\xi(\tau, x, y) \exp(i\alpha t) + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp(-i\alpha t)] + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (29)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а $u_3(t, \tau, x, y)$ является 2π -периодической по t и x и 1-антипериодической по y . Подставляя (29) в (3) и совершая стандартные действия, получаем уравнение для u_3 . Из условия его разрешимости приходим к краевой задаче для определения $\xi(\tau, x, y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(d_{20} - i\alpha^{-1}d_{10}) \left(\sigma_1^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2}(a_1 + 2d_{21} - 2i\alpha^{-1}d_{11}) \xi - \frac{1}{2} \xi |\xi|^2, \quad (30)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y), \quad \xi(\tau, x, y + 1) \equiv -\xi(\tau, x, y). \quad (31)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (11) и (28), и пусть краевая задача (30), (31) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 1]$ решение $\xi_0(\tau, x, y)$. Тогда краевая задача (3) имеет асимптотическое (с точностью до $O(\varepsilon^3)$) решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon [\xi_0(\tau, x, y) \exp(i\alpha t) + \bar{\xi}_0(\tau, x, y) \exp(-i\alpha t)], \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad y = 2\pi\varepsilon^{-1}x.$$

5. ОБ ОДНОЙ МОДЕРНИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (3)

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = f(u) + d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s, \varepsilon) u(t, x + s) ds + d_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s, \varepsilon) \frac{\partial u(t, x + s)}{\partial t} ds, \quad (32)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (33)$$

Здесь, в отличие от (4),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s, \varepsilon) ds = 0$$

и $\Phi(s, \varepsilon) = F^+(s, \varepsilon) + F^-(s, \varepsilon) - 2F^0(s, \varepsilon)$, $F^0(s, \varepsilon) = \frac{1}{2\sigma\varepsilon\pi} \exp[-(\varepsilon\sigma_0)^{-2}s^2]$.

Отметим, что при $\sigma \rightarrow 0$ предельное уравнение в (32) совпадает с (5).

Остановимся на рассмотрении только одного критического случая, который существенно отличается (32), (33) от (3).

Аналогичное (10) характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = (d_1 + \lambda d_2)q(z), \quad (34)$$

где $z = \varepsilon k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $q(z) = -2\sin^2(z/2) \exp(-\sigma^2 z^2)$. Предположим, как и выше, что $a = a_0 + \varepsilon^2 a_1$, $d_j = d_{j0} + \varepsilon^2 d_{j1}$, $j = 1, 2$, $a_0 \geq 0$ и при всех z выполнено неравенство $1 - d_1 q(z) > 0$.

Ограничимся рассмотрением критического случая, когда $a_0 = 0$. Он реализуется при бесконечном множестве значений $z_n = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уравнение (34) тогда имеет бесконечно много корней $\lambda_{mn}(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_{mn}(\varepsilon)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для них имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda_{mn}(\varepsilon) = i\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \{ (d_{20} - id_{10})m^2 \exp[-\sigma^2(2\pi n)^2] + a_1 \} + O(\varepsilon^4).$$

Воспользуемся тем же самым асимптотическим представлением решений (25):

$$u = \varepsilon [\xi(\tau, x, y) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp(-it)] + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \dots, \quad (35)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$. Подставим (35) в (32). После стандартных действий получаем для амплитуды $\xi(\tau, x, y)$ краевую задачу, которую формально можно записать в виде уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} (d_{20} - id_{10}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[K \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \xi - \frac{1}{2} a_1 \xi - \frac{1}{2} \xi |\xi|^2, \quad (36)$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y) \equiv \xi(\tau, x, y + 1). \quad (37)$$

Здесь через $K(p)$ обозначено выражение $K(p) = \exp(p)$. Тем самым $K(\partial^2/\partial y^2)$ — оператор дифференцирования бесконечного порядка

$$K \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-1} \frac{\partial^{2j}}{\partial y^{2j}}.$$

Осталось заметить, что по решению $\xi(\tau, x, y)$ краевой задачи (36), (37) с помощью (35) восстанавливается решение исходной краевой задачи (32), (33). Конечно, возникает вопрос о нетривиальных решениях задачи (36), (37).

Для простейших решений имеет место следующее утверждение. Фиксируем произвольно $a_1 < 0$. Тогда для каждого целого m найдётся такое n_m , что при всех $|n| > n_m$ краевая задача (36), (37) имеет решения

$$\xi_{mn}(\tau, x, y) = \rho_{mn} \exp[-id_{10}m^2 \exp(-4\pi^2 n^2)\tau],$$

где

$$\rho_{mn} = [-a_1 - d_{20}m^2 \exp(-4\pi^2 n^2)]^{1/2}.$$

ВЫВОДЫ

Исследована локальная динамика системы диффузионно и антидиффузионно связанных в цепочку уравнений Ван-дер-Поля. Предположение о большом количестве элементов цепочки позволило перейти к пространственно распределённой модели осцилляторов. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Все они имеют бесконечную размерность.

При изучении каждого из критических случаев осуществлён переход к так называемым квазинормальным формам — специальным нелинейным краевым задачам параболического типа с одной или с двумя пространственными переменными. Нелокальная динамика квазинормальных форм определяет поведение всех решений исходной краевой задачи в окрестности состояния равновесия. Получены асимптотические представления для решений в модели распределённой цепочки через решения для квазинормальных форм.

Выявлено существенное влияние функции связи между элементами цепочки на динамику осцилляторов.

В силу того, что динамика квазинормальных форм может быть сложной, этот же вывод справедлив и для решений исходной задачи. Поскольку для полученных квазинормальных форм характерно наличие нескольких устойчивых простейших решений, то можно сделать вывод о типичности явлений мультистабильности в рассматриваемых цепочках. Отметим, что в ряде случаев можно наблюдать колебания в цепочке, в то время как одиночный элемент — осциллятор Ван-дер-Поля — не имеет нестационарных режимов. Выявлен эффект, когда при $\varepsilon \rightarrow 0$ в цепочке уравнений происходит неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Дополнительное соглашение 075–02–2020–1514/1 к соглашению о предоставлении из федерального бюджета субсидии 075–02–2020–1514). Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 21–71–30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osipov G. V., Kurths J., Zhou Ch. Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin : Springer, 2007. 340 p.
2. Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D. Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore : World Scientific, 1994. 260 p.
3. Крюков А. К., Осипов Г. В., Половинкин А. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 16–28. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-2-16-28>
4. Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. // Phys. Rev. E. 2016. V. 94, No. 5. Art. no. 052207. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052207>
5. Караваев А. С., Ишбулатов Ю. М., Киселёв А. Р. и др. // Физиология человека. 2017. Т. 43, № 1. С. 70–80.
6. Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. 411 p.
7. Френкель Я. И., Конторова Т. А. // Журн. exper. теор. физ. 1938. Т. 8, № 8. С. 89–95.
8. Френкель Я. И., Конторова Т. А. // Журн. exper. теор. физ. 1938. Т. 8, № 8. С. 1340–1348.
9. Френкель Я. И., Конторова Т. А. // Журн. exper. теор. физ. 1938. Т. 8, № 8. С. 1349–1358.
10. Кащенко С. А. // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 362–380.
11. Kashchenko I. S., Kashchenko S. A. // Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul. 2016. V. 34. P. 123–129. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.10.011>
12. Кащенко С. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
13. Kaschenko S. A. // Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 1996. V. 6, No. 6. P. 1093–1109. <https://doi.org/10.1142/S021812749600059X>
14. Кащенко С. А. // Труды Московского математического общества. 2018. Т. 79, вып. 1. С. 97–115.
15. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1979. 252 с.
16. Kashchenko I. S., Kashchenko S. A. // Nonlin. Phenom. In Complex Systems. 2019. V. 22, No. 4. P. 407–412.
17. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / под. ред. Т. С. Ахромеевой, С. П. Курдюмова, Г. Г. Малинецкого, А. А. Самарского. М. : Наука, 1992. 544 с.

Поступила в редакцию 15 мая 2020 г.; принята в печать 23 октября 2021 г.

LOCAL DYNAMICS OF A CHAIN OF VAN-DER-POL COUPLED EQUATIONS

S. A. Kashchenko

We consider the problem of local dynamics of a system of a diffusion-coupled chain of the Van-der-Pol equations. A transition to the spatially-distributed nonlinear boundary-value problem is performed on the assumption of a large number of elements in a chain. The critical cases in the problem of the equilibrium-state stability are emphasized; all of them have infinite dimension. An algorithm for reducing the initial problem to a study of special nonlinear equations of parabolic type with one or two spatial variables is developed. Their nonlocal dynamics determines the behavior of all solutions of the initial problem in the neighborhood of the equilibrium state.