

УДК 517.938

ТРИ ФОРМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

*С. В. Гонченко**

Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Данная работа является обзором недавних результатов, полученных в математической теории динамического хаоса и связанных с открытием его третьей новой формы, так называемой смешанной динамики. Этот тип хаоса сильно отличается от двух его классических форм, консервативного и диссипативного хаоса, и главное его отличие состоит в том, что аттракторы и репеллеры могут пересекаться, не совпадая при этом. В работе без привлечения серьёзного математического аппарата даётся теоретическое обоснование этого явления, а также приводится ряд примеров систем из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика. Показывается, что такая динамика может быть разных типов, от близкой к консервативной до сильно диссипативной, а также — что она может возникать в результате различных бифуркационных механизмов.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является привлечение внимания специалистов из самых разных областей нелинейной динамики к недавним результатам, полученным в теории динамического хаоса, которые заставляют по новому взглянуть на саму эту теорию. В основе этих результатов лежит наблюдение так называемой смешанной динамики: того, что аттракторы и репеллеры в системе могут пересекаться. На первый взгляд это кажется невозможным и противоречащим здравому смыслу. Однако в работе [1] было, например, установлено, что двумерные отображения (диффеоморфизмы) могут иметь одновременно бесконечно много устойчивых и бесконечно много вполне неустойчивых периодических траекторий (стоков и источников соответственно). При этом, что важно, замыкания множества стоков и множества источников имеют непустое пересечение. Очевидно, по любому разумному определению аттрактора, периодические стоки должны ему принадлежать. Соответственно, периодические источники должны принадлежать репеллеру. Поскольку аттракторы и репеллеры являются замкнутыми инвариантными множествами, то и замыкания входящих в них траекторий должны им принадлежать.

Таким образом, явление, описанное в работе [1], несомненно указывает на то, что возможен такой тип хаоса, при котором аттракторы пересекаются с репеллерами. Но тогда, в конце 1990-х годов, этот вывод не был сделан (хотя дискуссии на эту тему между авторами [1] велись), поскольку он полностью противоречил общепринятой в то время концепции динамического хаоса, по которой аттрактор не может пересекаться с репеллером, а консервативный хаос рассматривался как совершенно другой тип хаоса, для которого термины аттрактор и репеллер вообще не употреблялись или не имели смысла.

Консервативный хаос характерен для гамильтоновых систем или, в более общем смысле, для систем, сохраняющих фазовый объём, и ассоциируется с хаотическим поведением траекторий на всём фазовом пространстве. При этом фазовый портрет такой динамики выглядит как нечто вроде хаотического моря с беспорядочно разбросанными внутри него эллиптическими островами. Типичный пример такого портрета показан на рис. 1а для отображения Чирикова

$$\bar{x} = x + \bar{y}, \quad \bar{y} = y + k \sin x, \quad (1)$$

* sergey.gonchenko@mail.ru

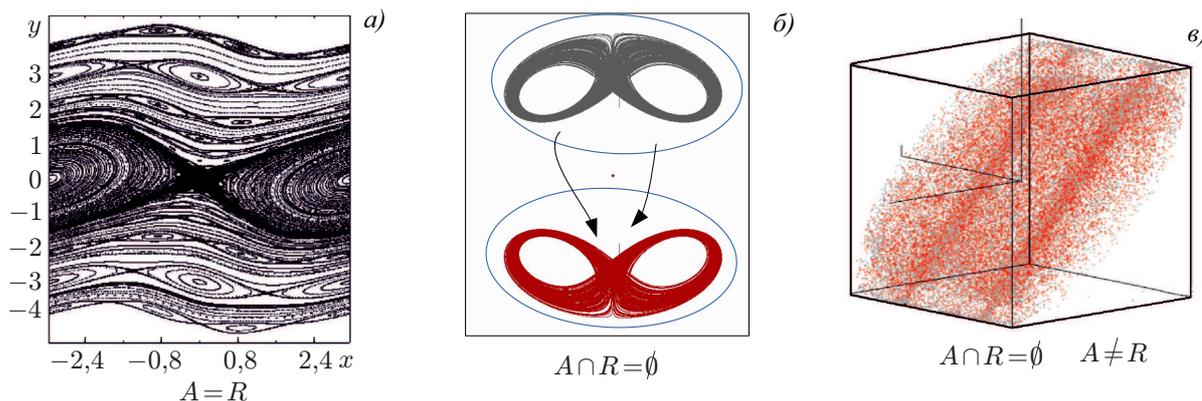


Рис. 1. Три формы динамики: консервативная динамика (а) представлена отображением Чирикова (1); диссипативная динамика — системой (2), которая имеет одновременно и аттрактор Лоренца, и репеллер Лоренца; смешанная динамика (в) — неголономной моделью кельтского камня, см. [2, 3] и раздел 3.2

заданного на цилиндре $0 \leq x < 2\pi$, $-\infty < y < +\infty$.

Хаос в диссипативных системах имеет совсем другую природу, и он ассоциируется со странными аттракторами — нетривиальными притягивающими замкнутыми инвариантными множествами, лежащими в «дырках» фазового пространства — поглощающих областях. Если фазовое пространство компактно и система не консервативна, то наряду с аттракторами у неё существуют и репеллеры, которые определяются как аттракторы при обращении времени. В случае диссипативной динамики аттракторы и репеллеры разделены и для них можно построить систему непересекающихся поглощающих и отталкивающих областей. На рис. 1б представлен интересный пример системы [4]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \alpha x + \beta yz - 25x^3 + 50xz^2, \quad \dot{z} = -1 + z^2 + x^2, \quad (2)$$

у которой при $\alpha = -20, \beta = 3,2$ наблюдаются одновременно аттрактор и репеллер Лоренца.

Эти два типа динамического хаоса, консервативный и диссипативный, настолько различны, что, кажется, нет и не может быть никакой теоретической схемы, их объединяющей. Однако в работе [5] была предложена такая схема — концепция, согласно которой существуют три независимые формы динамического хаоса, демонстрируемого конечномерными системами. В этой концепции нет ничего необычного, и аттрактор здесь понимается как устойчивое замкнутое инвариантное множество системы с возможно единственным уточнением, что под устойчивостью понимается так называемая устойчивость при постоянно действующих возмущениях¹. Такой тип устойчивости, называемой также тотальной устойчивостью (total stability), сродни устойчивости по Ляпунову, но только для ε -траекторий, см. далее раздел 1. Согласно этой концепции, все консервативные системы устроены очень просто: единственным устойчивым множеством, в том числе и при обращении времени, здесь является все фазовое пространство \mathcal{M} , которое, поэтому, следует считать одновременно и аттрактором, и репеллером системы. Если обозначить через A и R множество аттракторов и репеллеров системы, то в случае консервативной динамики получаем соотношение $A = R$, а в случае диссипативной — соотношение $A \cap R = \emptyset$. По законам формальной логики остается ещё возможность $A \cap R \neq \emptyset$ и $A \neq R$ (когда аттрактор и репеллер пересекаются, но полностью не совпадают), которую мы относим к смешанной динамике, третьему типу динамического хаоса, отличному от консервативного и диссипативного.

¹ Физически её можно понимать как устойчивость при воздействии шума, когда его амплитуда мала, или как устойчивость по отношению к малым вычислительным ошибкам, см. дискуссию в [6].

Как установлено в ряде работ, см., например, [2, 7–18], смешанная динамика встречается во многих моделях, в том числе из приложений. На рис. 1в представлен пример такой модели (неголономная модель кельтского камня), в которой смешанная динамика была обнаружена в работе [2]. Здесь на одном рисунке показаны фазовые портреты аттрактора (красные точки) и репеллера (серые точки) у соответствующего трёхмерного отображения Пуанкаре модели. Визуально, аттрактор и репеллер пересекаются, так что общая картинка выглядит преимущественно в тёмно-розовых тонах.

Другой весьма интересный тип смешанной динамики наблюдается в модели Пиковского—Топажа [19]

$$\dot{\psi}_1 = 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2 \quad \dot{\psi}_2 = 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3 \quad \dot{\psi}_3 = 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2. \quad (3)$$

Система (3) описывает динамику четырёх симметрично связанных элементарных ротаторов $\Psi_k = \omega_k t$, $k = 1, \dots, 4$, где ω_k — константы, при этом $\omega_i - \omega_{i+1} = 1$, $i = 1, 2, 3$, для разности фаз ротаторов $\psi_i = \Psi_i - \Psi_{i+1}$. Соответственно, $\psi_i \in [0, 2\pi)$ — это угловые переменные, и фазовым пространством системы (3) является трёхмерный тор \mathbb{T}^3 .

Далее мы рассмотрим систему (3) более подробно, а здесь только проиллюстрируем наиболее важные для нас результаты работы [19], связанные с численным исследованием аттракторов и репеллеров в этой модели (см. рис. 2). Как видно, её динамика существенно зависит от амплитуды связи ε . Когда $\varepsilon = 0$, система (3) тривиально интегрируема, при очень малых ε динамика модели хотя и становится неинтегрируемой, но практически не отличима от консервативной (квазипериодической, рис. 2а, здесь $\varepsilon = 0,3$, или хаотической, рис. 2б, здесь $\varepsilon = 0,39$). Однако по мере возрастания ε консервативность начинает разрушаться, как визуально, так и по некоторым характеристикам (например, средняя дивергенция становится отрицательной). В работе [19] были построены фазовые портреты аттрактора (рис. 2в) и репеллера (рис. 2г) при $\varepsilon = 0,49$, которые визуально пересекаются по достаточно большому множеству, но всё-таки различны. В работе [8] модель Пиковского—Топажа была исследована более детально на предмет существования у неё смешанной динамики и механизмов возникновения последней (см. далее).

Нужно сказать, что работа [19] послужила для нас своеобразным стимулом к созданию теории смешанной динамики, т. к. в ней был приведён достаточно простой пример физической системы, демонстрирующей, как мы сейчас знаем, этот тип динамики. Во всяком случае, как только мы обратили внимание на эту работу, явление визуального пересечения аттрактора и репеллера по достаточно большому множеству оказалось вполне объяснимым, в частности, в свете результатов работы [1]. Единственное, что оставалось сделать, это разработать элементы математической теории трёх форм хаоса с тем, чтобы объяснить, в том числе, как могут пересекаться аттрактор с репеллером, если, с общепринятой точки зрения, они пересекаться не могут. Это было сделано в нашей работе [5]; см. также [20, 21].

В данной работе внимание уделяется не столько математической теории динамического хаоса (раздел 2), сколько её физической интерпретации и простейшим абстрактным примерам, иллюстрирующим основные её положения. Также рассматривается ряд примеров динамических систем из приложений (раздел 3).

1. К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АТТРАКТОРА

К настоящему времени существует много различных определений аттрактора как замкнутого устойчивого инвариантного множества системы. При этом, во всех определениях замкнутость и инвариантность всегда предполагается, тогда как тип устойчивости может пониматься

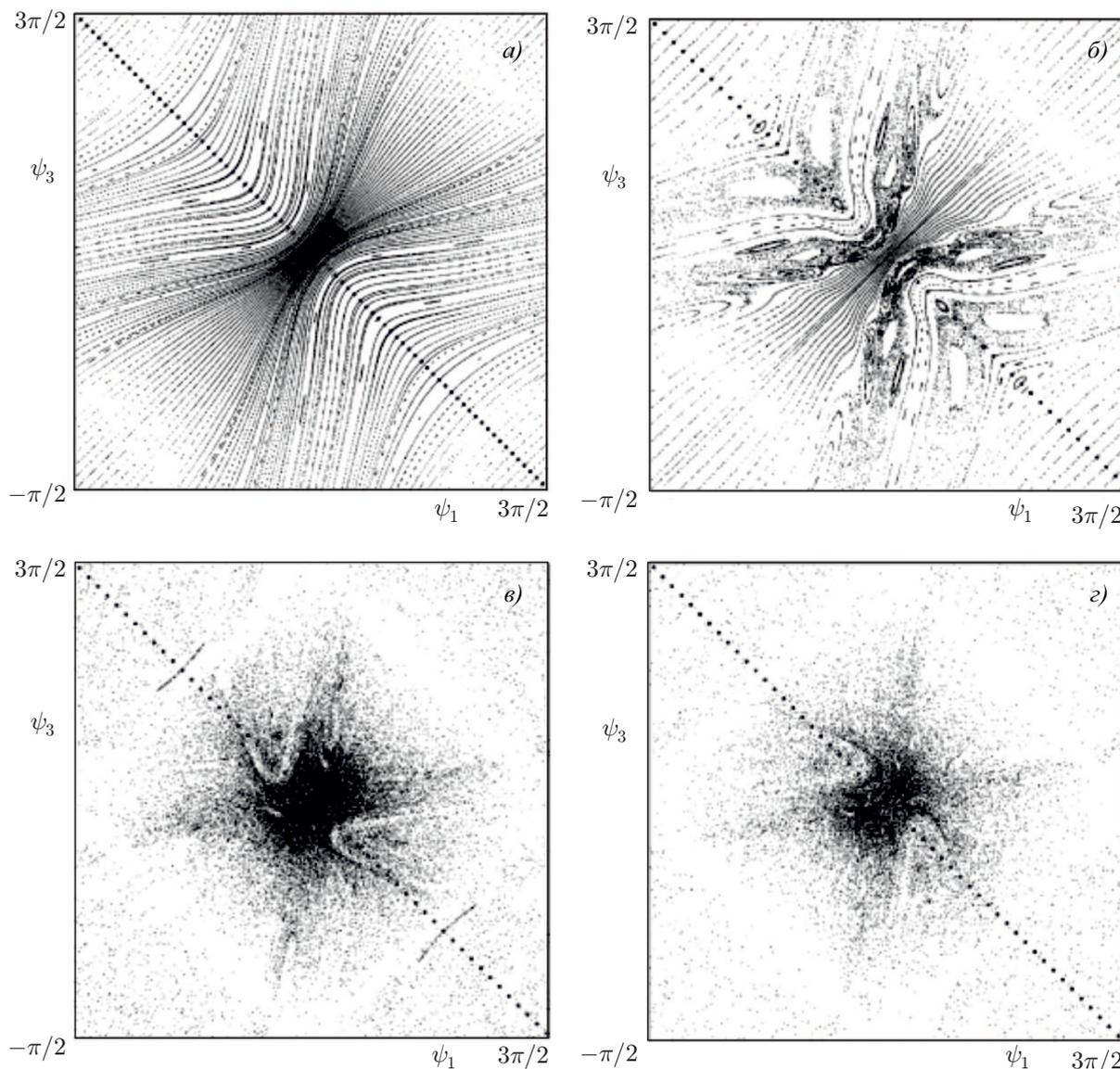


Рис. 2. Фазовые портреты отображения Пуанкаре для системы (3) на секущей $\psi_2 = \pi/2$ из работы [19]

по-разному. Покажем это на примере двух наиболее известных типов аттракторов: максимального аттрактора и аттрактора Милнора.

Максимальный аттрактор A_{\max} определяется как замкнутое инвариантное множество, принадлежащее некоторой поглощающей области D , и такое, что

$$A_{\max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(D)$$

в случае отображений или

$$A_{\max} = \bigcap_{t \geq 0} T_t(D)$$

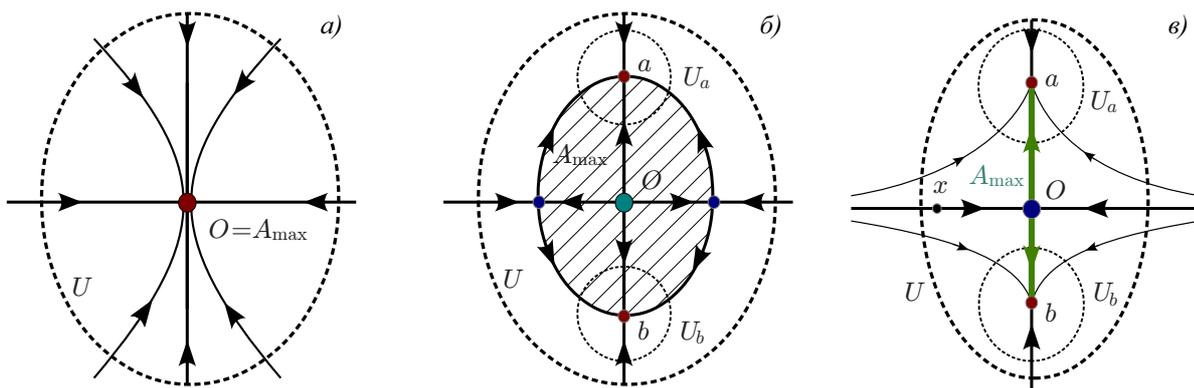


Рис. 3. Примеры максимальных аттракторов: устойчивая точка O (a), диск с неустойчивым узлом O внутри (b), отрезок с седлом O внутри и устойчивыми точками a и b на концах (v). Максимальные аттракторы рисунков (b) и (v), очевидно, не являются аттракторами в обычном смысле

в случае потоков ².

Напомним, что открытая область D называется поглощающей, если под действием отображения T или потока T_t она переходит строго внутрь себя, т.е. $T(cl(D)) \in D_a$ или $T_t(cl(D)) \in D$ при $t > 0$, где через $cl(D)$ мы обозначили замыкание области D . Соответственно, максимальный аттрактор получается в результате бесконечной процедуры пересечения образов D относительно положительных итераций отображения T или относительно сдвига D по траекториям потока T_t при $t \rightarrow +\infty$. На рис. 3 показаны простейшие примеры максимальных аттракторов.

Другое хорошо известное понятие аттрактора — это аттрактор Милнора A_M [22], который определяется как замкнутое инвариантное и минимальное по вложению множество в D , которое содержит ω -предельные точки положительных полутраекторий почти всех (меры 1 по Лебегу) точек из D .

У обоих так определяемых аттракторов есть, конечно, свои достоинства, но и некоторые недостатки. В качестве одного из достоинств можно указать простоту определений и их физическую направленность, т.к. оба объекта соответствуют инвариантным множествам, к которым стремится большинство траекторий. Однако и максимальный аттрактор, и аттрактор Милнора могут вообще не быть устойчивыми множествами. В случае максимального аттрактора это может произойти, если выбрать неподходящую поглощающую область. Например, если такая область U содержит неустойчивую траекторию — сток, или седло, — то и максимальный аттрактор будет её содержать, см. примеры на рис. 3б, в. Однако у максимального аттрактора можно найти его подмножества, которые являются аттракторами — на рис. 3б и в это стоки a и b , у которых есть свои правильные поглощающие области U_a и U_b ; а на рис. 3а область U сама является правильной поглощающей областью. Аттракторы Милнора в свою очередь даже у самых простых систем могут не быть аттракторами. Так, в примере отображения окружности с полуустойчивой неподвижной точкой O (рис. 4а) сама эта точка является аттрактором Милнора, поскольку она ω -предельная для всех траекторий. Однако, точка O не является устойчивой, и поэтому она не аттрактор в обычном смысле. Этот пример показывает, что и множество ω -предельных точек тоже не всегда является аттрактором. Отметим, что в этом примере максимальным аттрактором является вся окружность, поскольку она же является единственно возможной здесь поглощающей областью.

² Заметим, что, формально, максимальные аттракторы у систем с компактным фазовым пространством существуют всегда. Но в ряде случаев единственной поглощающей областью у системы является всё фазовое пространство, как, например, у консервативных систем или у отображения окружности с полуустойчивой неподвижной точкой, показанного на рис. 4а. Тогда максимальный аттрактор — это всё фазовое пространство.

Заметим также, что аттракторы Милнора, в отличие от максимальных аттракторов, могут вообще не быть топологическими инвариантами (в том смысле, что у двух топологически эквивалентных систем аттракторы Милнора могут быть разными). По-видимому, это не является типичной ситуацией, но всё же некоторые примеры систем подобного рода существуют, и один из них, предложенный в работе [23], проиллюстрирован на рис. 4б. Это диффеоморфизм \hat{f} квадрата Q , обладающий следующими свойствами. Квадрат Q содержит канторовское множество \mathcal{K} вертикальных отрезков, все точки сторон квадрата и точки множества \mathcal{K} являются неподвижными, а остальные точки квадрата при итерациях \hat{f} стремятся к его нижней стороне $[a, b]$. В случае, когда мера канторовского множества \mathcal{K} равна нулю, аттрактором Милнора диффеоморфизма \hat{f} является отрезок $[a, b]$. Однако, когда мера \mathcal{K} ненулевая, аттрактором Милнора здесь является уже множество $[a, b] \cup \mathcal{K}$. Но, очевидно, любые два таких диффеоморфизма, независимо от меры множества \mathcal{K} , являются топологически эквивалентными.

Рассмотренные примеры показывают, что условие устойчивости в том или ином виде должно обязательно присутствовать в определении аттрактора, и это условие, а также все остальные, должно формулироваться в топологических терминах, чтобы аттрактор всегда был топологическим инвариантом. Как оказалось, такое подходящее определение аттрактора существует, и оно было дано в работах Конли, Рюэлля и Харли [6, 24, 25] в терминах топологической динамики. Мы назвали его в [5] аттрактором Конли–Рюэлля–Харли, или сокращённо CRH-аттрактором. В этой же работе были введены понятия полного аттрактора и полного аттрактора по Рюэллю, которые обобщали понятие CRH-аттрактора и позволяли построить концепцию трёх форм динамического хаоса. Ниже мы кратко коснёмся этих вопросов.

1.1. CRH-аттракторы

Напомним некоторые факты и определения из топологической динамики [26]. Рассмотрим гомеоморфизм f (непрерывное взаимнооднозначное отображение) компактного метрического пространства \mathcal{M} .

Последовательность точек $\{y_i\} \in \mathcal{M}$, $i = 0, \pm 1, \dots$, называется траекторией отображения f , если $y_{i+1} = f(y_i)$. Бесконечные в одну сторону последовательности $\{y_1, y_2, \dots\}$ и $\{\dots, y_{-1}, y_0, y_1\}$ называются положительной и отрицательной полутраекторией точки y_1 соответственно, а конечная последовательность $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ — траекторией длины N . Точка $a \in \mathcal{M}$ называется ω -предельной (соответственно, α -предельной), если существует подпоследовательность точек y_{i_n} на траектории $\{y_i\}$ такая, что $y_{i_n} \rightarrow a$ при $i_n \rightarrow +\infty$ (соответственно, при $i_n \rightarrow -\infty$). Замкнутые множества всех ω -предельных и α -предельных точек называются ω -предельным и α -предельным множеством траектории $\{y_i\}$; говорят также, что они являются ω - и α -предельными множествами точки y_1 (или любой другой точки на её траектории).

Для этих вполне динамических понятий в топологической динамике, см., например, [26], существуют свои аналоги, в основе которых лежит понятие ε -траектории.

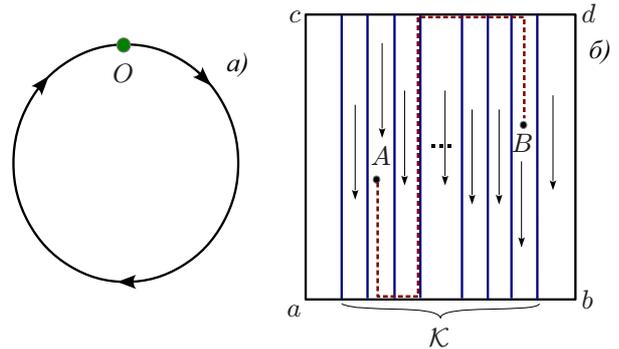


Рис. 4. Два примера систем с аттракторами Милнора. Панель а: отображение окружности с полуустойчивой точкой O , которая является аттрактором Милнора, но не аттрактором. Панель б: двумерный диффеоморфизм с канторовским множеством \mathcal{K} отрезков неподвижных точек, у которого аттрактор Милнора A_M — это либо $[ab]$, если $\text{mes } \mathcal{K} = 0$, либо $[ab] \cup \mathcal{K}$, если $\text{mes } \mathcal{K} \neq 0$

Определение 1. Последовательность точек x_1, \dots, x_N называется ε -траекторией (длины N) отображения f , если $\text{dist}(f(x_j), x_{j+1}) < \varepsilon$ для всех $j = 1, \dots, N - 1$. Мы будем говорить, что ε -траектория x_1, \dots, x_N соединяет точки x_1 и x_N и что x_N достижима от x_1 (по ε -траекториям длины N).

Соответственно определяются положительные и отрицательные ε -траектории, а ε -аналог ω -предельного множества точки x_1 , так называемая пролонгация точки x_1 , определяется как пересечение множеств ω -предельных множеств для всех положительных ε -траекторий точки x_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что пролонгация точки является замкнутым инвариантным множеством: она также содержит ω -предельное множество этой точки, но может быть больше его. Так, в примере на рис. 3в ω -предельным множеством точки x является седло O , а её пролонгацией служит отрезок $[a, b]$ неустойчивого многообразия точки O — концами этого отрезка являются устойчивые точки a и b .

Следующие понятия из топологической динамики являются для нас наиболее важными.

Определение 2. Замкнутое инвариантное множество Λ называется цепно-транзитивным, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух точек $x \in \Lambda$ и $y \in \Lambda$ существует ε -траектория, которая лежит в Λ и соединяет x и y .

Определение 3. Замкнутое инвариантное множество A_{tot} называется устойчивым относительно постоянно действующих возмущений (или тотально устойчивым), если оно устойчиво по Ляпунову относительно ε -траекторий для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. То есть, если для любого $\delta > 0$ существует такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что любая положительная ε -траектория любой точки множества A_{tot} не покидает его δ -окрестности.

Теперь мы можем дать определение аттрактора, на которое будем опираться в дальнейшем.

Определение 4. CRH-аттрактором называется устойчивое относительно постоянно действующих возмущений, цепно-транзитивное замкнутое инвариантное множество, целиком лежащее в некоторой поглощающей области U .

Соответственно, CRH-репеллер определяется как CRH-аттрактор для системы, получаемой при обращении времени.

Можно высказать целый ряд аргументов в пользу использования такого определения аттрактора, которое обобщает другие хорошо известные определения, например определения гиперболических аттракторов и аттракторов лоренцевского типа ³, а также явно содержит условие устойчивости и, кроме того, является инвариантом топологической эквивалентности. Несомненным достоинством такого определения аттрактора является его физическая направленность. Действительно, кажется вполне естественным связывать наблюдаемые динамические режимы с поведением траекторий из окрестностей CRH-аттракторов. Когда численно или экспериментально изучаются динамические свойства какой-нибудь модели, никогда нет гарантии, что эта модель известна точно. Например, при численных расчётах вместо точек траектории системы мы находим последовательность точек, которая является, из-за ошибок счёта, траекторией слегка изменённой системы. Поэтому то, что мы видим в экспериментах, это, на самом деле, нечто типа специфической ε -траектории с достаточно малым ε . Таким образом, в какой-то мере, это определение можно рассматривать как определение физически наблюдаемого аттрактора, когда точность наблюдения достаточно высокая (соответственно, ε малó).

Если говорить о важности CRH-аттракторов для теории динамического хаоса в целом, то, например, в работе [5] было отмечено, что у конечномерных систем с компактным фазовым пространством M могут быть CRH-аттракторы только следующих трёх типов.

³ В частности, в определение лоренцевских аттракторов часто входит условие их транзитивности, которое может и не выполняться даже для аттрактора Лоренца [27], однако цепная транзитивность здесь всегда существует.

1) Консервативного типа – когда все фазовое пространство M является цепно-транзитивным множеством, и тогда оно само будет для соответствующей системы одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером.

2) Диссипативного типа – когда в любой окрестности CRH-аттрактора существуют точки, отличные от точек самого аттрактора, положительные полутраектории которых стремятся к нему.

3) Смешанного типа, и тогда это обратимое ядро (reversible core), т. е. CRH-аттрактор, который одновременно является и CRH-репеллером; в этом случае траектория все время находится в окрестности этого аттрактора-репеллера, но к нему не стремится ни в прямом, ни в обратном времени. Более того, для любой точки, не принадлежащей ядру, найдется такое $\varepsilon > 0$, что любая её положительная и отрицательная ε -траектория не соединяет эту точку с точками обратимого ядра.

1.2. Простейшие примеры CRH-аттракторов

Самые известные примеры CRH-аттракторов консервативного типа дают сохраняющие объём отображения компактного многообразия M , которое само является в этом случае цепно-транзитивным множеством – а значит, M является одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером (см. рис. 1а). Существуют также аналогичные примеры не сохраняющих объём отображений, например ановские отображения тора. Другой пример – это отображение окружности, которое имеет полуустойчивую неподвижную точку O (см. рис. 4а). Заметим, что в этом случае CRH-аттрактором является вся окружность, т. к. любые её две точки можно соединить ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что у приведённого на рис. 4б примера двумерного диффеоморфизма \hat{f} также существует CRH-аттрактор консервативного типа – это весь квадрат Q . Нетрудно видеть, что Q является цепно-транзитивным множеством диффеоморфизма \hat{f} . Действительно, пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – какие-либо две точки квадрата. Тогда легко построить ε -траекторию, соединяющую точки A и B : из точки A спускаемся до отрезка $[a, b]$, по этому отрезку, т. к. он состоит из неподвижных точек, достигаем (по ε -траектории) одной из линий множества \mathcal{K} , по этой линии добираемся до отрезка $[c, d]$, по нему доходим до точки с координатой $x = x_2$ и спускаемся вниз до точки B (путь AB , отмеченный пунктирной линией на рис. 4б).

Примеры диссипативных CRH-аттракторов хорошо известны. Это, например, гиперболические аттракторы (в том числе простые аттракторы типа периодических стоков), аттракторы Лоренца, а также так называемые псевдогиперболические аттракторы [28–30]⁴. Все они также являются максимальными аттракторами в своей окрестности и характеризуются тем, что к ним стремятся все траектории из их окрестности. Другой тип диссипативных CRH-аттракторов составляют те, к которым стремятся не все траектории точек из их окрестности. Простейший пример такого аттрактора в случае одномерного отображения показан на рис. 5а. Здесь точка O является диссипативным CRH-аттрактором, т. к. все точки справа от точки O к ней стремятся, и одновременно точка O является также пределом бесконечной последовательности стоков и источников. Для примера, приведённого на рис. 5б, точка O является CRH-репеллером (и также пределом бесконечной последовательности стоков и источников).

⁴ Псевдогиперболические аттракторы характеризуются тем, что у любой их траектории существует положительный максимальный показатель Ляпунова, но поведение траекторий в целом не является равномерно гиперболическим. Здесь возможны многочисленные бифуркации, но никакие из них не приводят к появлению устойчивых периодических траекторий. Это связано с тем, что в поглощающей области псевдогиперболического аттрактора система устроена так, что существуют направления сильного (экспоненциального) сжатия, и на трансверсальных к этим направлениям площадках объёмы растягиваются (также экспоненциально), подробнее см. [28, 31, 32].

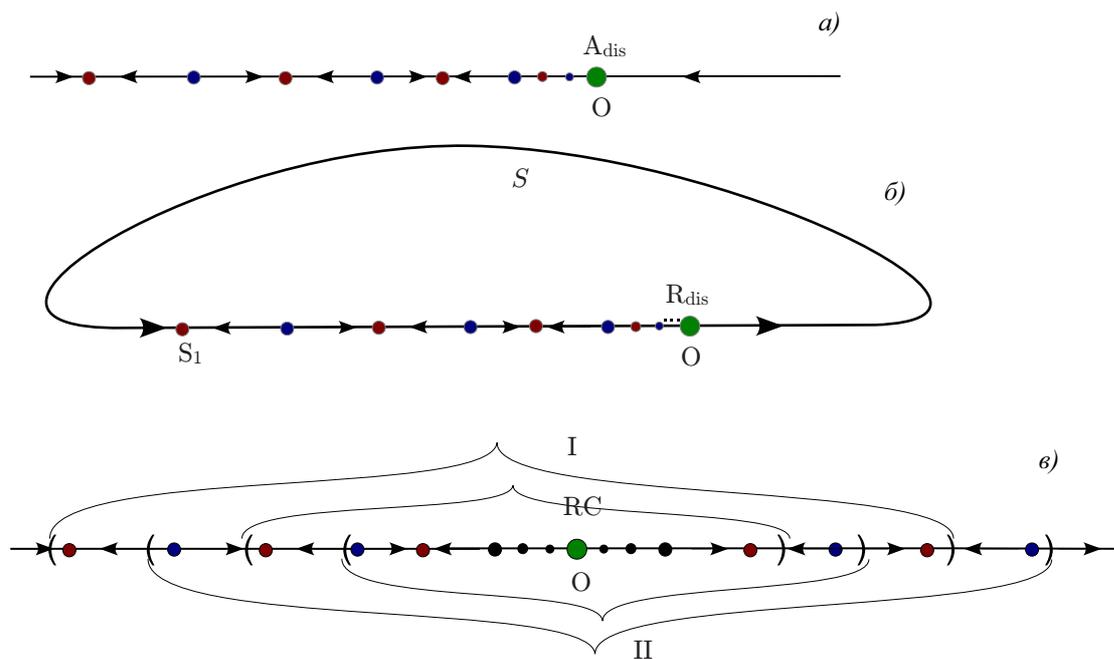


Рис. 5. Примеры одномерных отображений, у которых неподвижная точка O является пределом стоков и источников, и одновременно диссипативным CRH-аттрактором (а), диссипативным CRH-репеллером (б) или обратимым ядром (в) — CRH-аттрактором, который является одновременно и CRH-репеллером. На панели в символом I обозначены притягивающие области, II — отталкивающие области

Примеров CRH-аттракторов смешанного типа — обратимых ядер — известно не так много, поскольку их теория начала развиваться сравнительно недавно. Обратимое ядро отличается от диссипативного аттрактора тем, что оно не притягивает (и не отталкивает) никаких траекторий. С другой стороны, динамика здесь не является также чисто консервативной. В работе [5] (см. теорему 1) показано, что обратимое ядро является пределом последовательности диссипативных аттракторов и репеллеров.

Этот факт хорошо иллюстрирует уже простейший пример обратимого ядра одномерного отображения, представленный на рис. 5в. Здесь точка O — обратимое ядро: она является пределом счётного множества простых диссипативных аттракторов и репеллеров (стоков и источников), однако сама не притягивает никаких траекторий: любая траектория из её окрестности стремится к ближайшему аттрактору, а в обратом времени — к ближайшему репеллеру. На рис. 5а и б показаны похожие примеры, у которых, однако, точка O не является обратимым ядром: в случае, показанном на панели а, она не является репеллером (но является диссипативным CRH-аттрактором), а в случае, показанном на панели б, она не является аттрактором.

Нетривиальными примерами обратимых ядер являются типичные симметричные эллиптические периодические траектории обратимых двумерных диффеоморфизмов [5, 33]. В случае сохраняющих площадь отображений такая невырожденная траектория устойчива по Ляпунову из-за того, что она окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых (кривых Колмогорова—Арнольда—Мозера), которые не позволяют траектории уйти из окрестности точки. Однако такая точка неустойчива относительно постоянно действующих возмущений, поскольку КАМ-кривые и консервативные резонансы-гирлянды между ними не являются препятствием для ε -траекторий (см. рис. 6а). В случае обратимых двумерных диффеоморфизмов симметричная эллиптическая точка устроена очень похоже, она также окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых, но

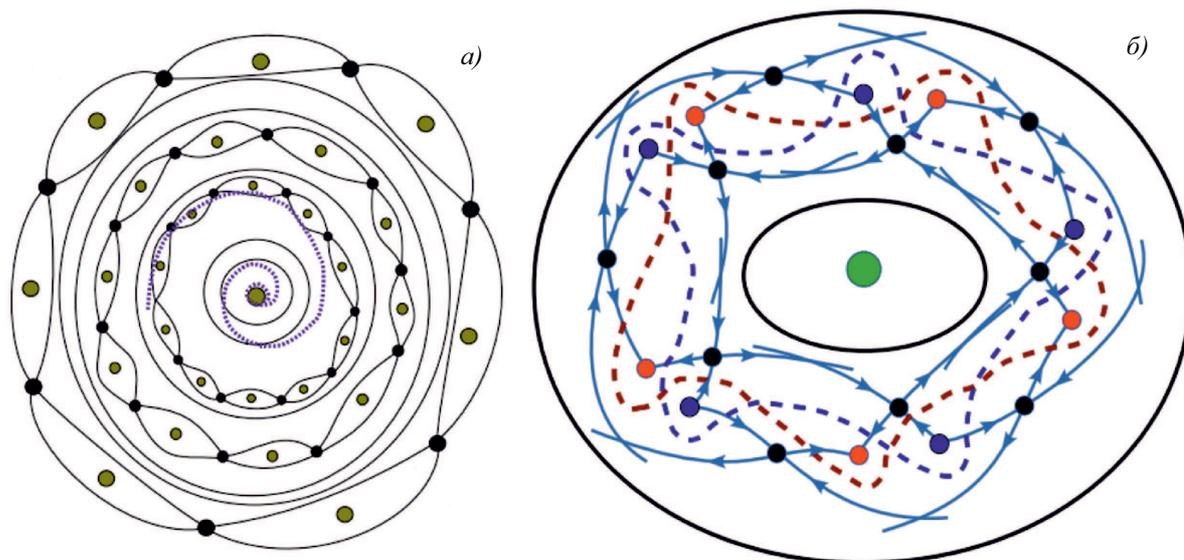


Рис. 6. Иллюстрация к структуре окрестности эллиптической точки O . Панель *a*: случай сохраняющего площадь отображения, здесь также символически (точечной линией) показана ε -траектория, по которой точки могут уйти из окрестности точки O . Панель *b*: случай обратимого отображения, вокруг симметричной точки O также существуют КАМ-кривые, однако резонансы могут стать непроходимыми

в типичном случае у неё появляются непроходимые для ε -траекторий резонансные зоны, внутри которых лежат диссипативные аттракторы и репеллеры: периодические стоки и источники (рис. 6б). Соответственно, как положительные, так и отрицательные ε -траектории с достаточно малым ε не могут «перепрыгнуть» через эти резонансы. Более подробно об этом см. в работах [5, 33].

1.3 Полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю

Однако хорошо известно, что существует большое множество систем, у которых странные аттракторы не являются цепно-транзитивными. Так, например, часто встречающиеся в приложениях квазиаттракторы (термин предложен Афраймовичем и Шильниковым [34]) могут содержать устойчивые периодические траектории (стоки) очень больших периодов, которые никак не обнаруживаются в экспериментах. Поэтому квазиаттракторы также относят к странным аттракторам, по крайней мере когда дело касается экспериментов и прикладных задач. Когда устойчивые периодические траектории внутри квазиаттрактора имеют области притяжения с очень малой шириной d , то они не являются препятствием для ε -траекторий с $\varepsilon > d$. Поэтому в численных расчётах такие аттракторы выглядят как СРН-аттракторы, если точность вычислений не превышает d . Заранее величина d неизвестна, поэтому для квазиаттракторов также характерно, что при изменении параметров хаотическое поведение траекторий может сменяться регулярным. Соответствующие области значений параметров называются окнами устойчивости, они отвечают тому, что устойчивые периодические траектории становятся наблюдаемыми.

Примеров систем с квазиаттракторами очень много — это практически все известные аттракторы моделей из приложений, кроме тех, которые обладают гиперболическими или псевдогиперболическими аттракторами. Последних же, наоборот, пока ещё очень мало⁵. Таким образом,

⁵ Гиперболические аттракторы в физических моделях были открыты совсем недавно в работах С. П. Кузне-

квазиаттракторы, даже с математической точки зрения, обязательно нужно включать в рассмотрение. Более того, как выясняется, без привлечения квазиаттракторов нельзя объяснить явление смешанной динамики, когда пересекающиеся аттракторы и репеллеры, хотя и могут занимать примерно одну и ту же область фазового пространства, в действительности никогда не совпадают полностью. В работе [5] (см. теорему 2) установлен следующий результат: если CRH-аттрактор имеет непустое пересечение с CRH-репеллером, то они оба совпадают.

Далее будем предполагать, что фазовое пространство M гомеоморфизма f не является цепно-транзитивным, соответственно, динамика не является топологически консервативной. Введём следующее понятие аттрактора для точки.

Определение 5. Множество A_x называется аттрактором точки x , если оно является CRH-аттрактором и достижимо из x по ε -траекториям для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что у точки x может быть несколько CRH-аттракторов. Например, на рис. 3б у точки x , лежащей на устойчивой сепаратрисе седла O , существуют два таких аттрактора, точки a и b . Если число таких аттракторов конечно, то их объединение — это полный аттрактор точки x . В случае бесконечного числа аттракторов полным аттрактором точки x будем называть замыкание объединения всех аттракторов точки x . Таким образом определённый полный аттрактор — это замкнутое инвариантное множество $A_0(x)$, но он не обязательно будет устойчивым множеством. Можно показать, что минимальное замкнутое устойчивое множество, содержащее $A_0(x)$ — это пролонгация множества $A_0(x)$, т.е. множество всех точек, достижимых из $A_0(x)$ для всех произвольно малых $\varepsilon > 0$. Мы будем называть это множество полным аттрактором по Рюэллю точки x .

Аналогичным образом мы вводим следующее определение.

Определение 6. Полный аттрактор отображения f — это замыкание объединения всех CRH-аттракторов его точек, а полный аттрактор по Рюэллю отображения f — это пролонгация его полного аттрактора.

Таким же образом определяются репеллеры как аттракторы для обратного отображения f^{-1} .

Рассмотрим простые примеры, показанные на рис. 5. На рис. 5а полный аттрактор состоит из счётного множества стоков и точки O , к которой они накапливаются. Сама точка O является диссипативным CRH-аттрактором (но не репеллером). Очевидно, здесь полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю совпадают. В примере на рис. 5б, аналогично, полный аттрактор состоит из счётного множества стоков и точки O , однако точка O сама по себе не является аттрактором. Полный аттрактор по Рюэллю здесь получится, если к полному аттрактору добавим ещё дугу \widehat{OS}_1 — пролонгацию точки O . Полученное множество уже будет устойчивым. В примере на рис. 5в полный аттрактор по Рюэллю (объединение счётного множества стоков и точки O) и полный репеллер по Рюэллю (объединение счётного множества источников и точки O) пересекаются по точке O , которая является здесь обратимым ядром. Этот последний пример можно рассматривать в качестве простейшей иллюстрации смешанной динамики.

2. ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИЗ ПРИЛОЖЕНИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СМЕШАННОЙ ДИНАМИКОЙ

В этом разделе мы рассмотрим ряд моделей из приложений, в которых была обнаружена смешанная динамика. Таких известных нам моделей пока ещё не слишком много, во-первых, в силу цова [35]. К псевдогиперболическим аттракторам можно отнести аттракторы Лоренца [27, 36], некоторые странные аттракторы лоренцевского типа в случае трёхмерных отображений [37–40] и дикий спиральный аттрактор Тураева–Шильникова [28, 30]. Это всё, что нам известно о таких настоящих странных аттракторах, которые являются, конечно, CRH-аттракторами.

того, что сама концепция смешанной динамики возникла совсем недавно, а во-вторых, наверняка многие модели такого рода нам неизвестны в силу того, что тематика, связанная с аттракторами, всегда была преобладающей, а репеллеры практически совсем не рассматривались. Возможно даже, что работа [19] была первой работой, в которой, хотя бы и на физическом уровне строгости, анализировались взаимоотношения между аттракторами и репеллерами. Здесь мы рассмотрим эту модель первой, но уже больше с математической точки зрения.

2.1. О смешанной динамике в модели Пиковского—Топажа

Здесь мы рассмотрим однопараметрическое семейство систем вида (3) с тем, чтобы дать объяснение явлению пересечения аттрактора и репеллера, которое визуально как-бы подтверждается их портретами, представленными на рис. 2*в* и *г*. С традиционной точки зрения аттрактор не может пересекаться с репеллером и можно представить, что они очень близко подходят друг к другу. Настолько близко, что промежутки между аттрактором и репеллером перестают быть заметными, но, тем не менее, всегда можно провести две непересекающиеся границы, близкие по форме к фрактальным, для поглощающей и отталкивающей областей. Однако такое представление вступает в противоречие с результатами из [1], и нужно считать, что рис. 2*в* и *г* хорошо иллюстрируют явление смешанной динамики, о котором мы говорили выше.

В работе [8] однопараметрическое семейство систем вида (3) было исследовано более подробно, и основной целью этой работы было как раз доказательство существования смешанной динамики в модели Пиковского—Топажа. Заметим, что система (3) является обратимой: она инвариантна относительно обращения времени $t \rightarrow -t$ и замены координат вида

$$h: \psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 \rightarrow \pi - \psi_2, \quad \psi_3 \rightarrow \pi - \psi_1, \quad (4)$$

которая является инволюцией, т. е. $h^2 = id$, в случае трёхмерного тора.

После замены координат

$$\xi = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}, \quad \eta = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2}, \quad \rho = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2} + \psi_2 - \pi$$

и времени $t_{\text{new}} = [2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)]t$, система (3) принимает следующий вид [8]:

$$\dot{\xi} = \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)}, \quad \dot{\eta} = \frac{1 - \varepsilon \cos(\rho - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)}, \quad \dot{\rho} = 1,$$

или, что эквивалентно, она может быть представлена в форме неавтономной периодической по времени (с периодом 2π) системы вида

$$\dot{\xi} = \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}, \quad \dot{\eta} = \frac{1 - \varepsilon \cos(t - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}. \quad (5)$$

Заметим, что система (5) корректно определена при всех $\varepsilon < 2$. Кроме того, она сама, а также её отображение Пуанкаре $T = T_{2\pi}$, т. е. отображение сдвига по траекториям за период $t = 2\pi$, обладают целым рядом симметрий [8].

Отображение $T_{2\pi}$ обратимо относительно инволюции

$$R: \xi \rightarrow \xi, \quad \eta \rightarrow -\eta,$$

которая является следствием инволюции (4). Это означает, что отображение $T_{2\pi}$ и его обратное отображение $T_{2\pi}^{-1}$ сопряжены с помощью инволюции R , т. е. $T_{2\pi}^{-1} = R \circ T_{2\pi} \circ R$.

Система (5) и отображение $T_{2\pi}$ симметричны относительно линейного преобразования вида

$$\sigma : \xi \rightarrow \pi - \xi, \eta \rightarrow \pi + \eta. \quad (6)$$

Отображение $T_{2\pi}$ является квадратом неориентируемого отображения: $T_{2\pi} = (\tilde{T})^2$, где $\tilde{T} = \sigma \circ T_\pi$ и T_π – ориентируемое отображение сдвига по траекториям системы (5) за половину периода ($t = \pi$)⁶.

При $\varepsilon = 0$ система (5) является автономной и её динамика тривиальна: фазовое пространство заполнено замкнутыми траекториями. Соответственно, динамика отображения $T_{2\pi}(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ будет полностью квазипериодической. Однако при увеличении ε у отображения $T_{2\pi}(\varepsilon)$ начинают происходить многочисленные бифуркации, связанные с возникновением периодических траекторий, первоначально очень больших периодов, затем эти периоды постепенно уменьшаются, что позволяет численно проследить соответствующие бифуркации.

Поскольку отображение $T_{2\pi}$ обратимо, то большой интерес здесь представляют бифуркации, связанные с рождением симметричных периодических траекторий, которые пересекают множество

$$\text{Fix}(R) : \{\eta = 0\} \cup \{\eta = \pi\}$$

неподвижных точек инволюции R .

В бифуркационный момент негрубая симметричная периодическая траектория двумерного ориентируемого отображения $T_{2\pi}$ имеет два мультипликатора (собственных значений), равных $+1$. Напомним, что если траектория Q отображения T имеет период n , т. е. $T^n(q) = q$ для любой точки $q \in Q$, то её мультипликаторы – это собственные значения матрицы линеаризации для T^n в точке q . В общем обратимом случае симметричные периодические траектории рождаются в результате так называемых параболических бифуркаций, имеющих тип « $0 \rightarrow 2$ », когда из ничего у T^n возникает симметричная неподвижная точка с мультипликаторами $(+1; +1)$, которая затем распадается на две симметричные неподвижные точки – седловую и эллиптическую. Для нашей задачи такие бифуркации не очень интересны, т. к. они в главном порядке являются консервативными.

Гораздо больший интерес представляют обратимые бифуркации типа « $0 \rightarrow 4$ », которые встречаются в модели и разрушают её консервативность. Они появляются здесь благодаря тому, что отображение Пуанкаре $T_{2\pi}$ является квадратом неориентируемого отображения $\tilde{T} = \sigma T_\pi$. Соответственно, рождающиеся у отображения \tilde{T} симметричные периодические точки будут иметь пару мультипликаторов $+1$ и -1 , а значит, они могут распадаться на 4 точки – две консервативные симметричные периода 2 и две неконсервативные неподвижные несимметричные. Локальная теория таких бифуркаций, называемых обратимыми бифуркациями потери симметрии (symmetry-breaking bifurcations), была представлена в работах [8, 44, 45]. В частности, там было показано, что в случае симметричной неподвижной точки с мультипликаторами $+1$ и -1 возможны два случая невырожденных бифуркаций типа « $0 \rightarrow 4$ ». В первом случае точка распадается на две симметричные эллиптические точки периода 2 и две несимметричные седловые неподвижные точки с якобианами больше и меньше 1. Во втором случае точка распадается на две симметричные седловые точки периода 2 и две несимметричные неподвижные устойчивую и неустойчивую точки (сток и источник). Соответственно, у квадрата неориентируемого отображения будут появляться 4 неподвижные точки соответствующих типов. Это показывает, что бифуркации типа « $0 \rightarrow 4$ » должны быть типичными для периодических траекторий для отображения $T_{2\pi}$ в случае

⁶ Последнее свойство симметрии отображения Пуанкаре является следствием так называемой симметрии потока по сдвигу времени (time-shift symmetry), часто встречающейся в периодически возмущённых автономных системах [41–43].

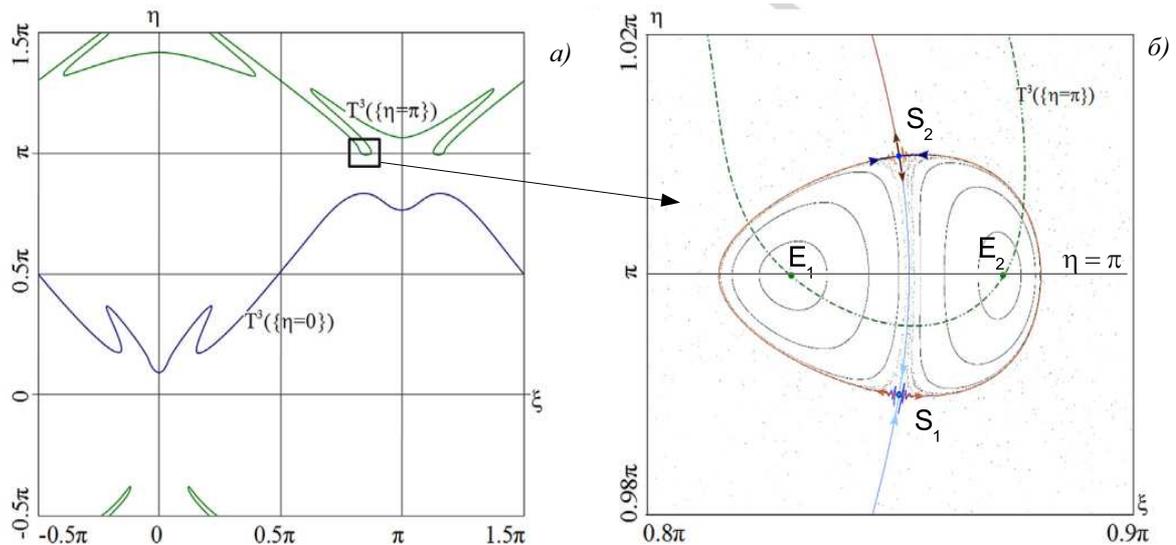


Рис. 7. Панель *a*: кривые $T_{2\pi}^3(\text{Fix}(R))$ при $\varepsilon = 0,457 > \varepsilon_3^*$. Кривая $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$ пересекает линию $\eta = \pi$ в двух парах точек, симметричных относительно линии $\xi = \pi$, т. к. система (5) симметрична относительно замены координат вида (6). Панель *б*: увеличенный фрагмент фазового портрета в прямоугольнике панели *a* [8], здесь отображение $T_{2\pi}^3$ имеет 4 неподвижных точки: две симметричные эллиптические E_1 и E_2 и два неконсервативных седла S_1 и S_2 (с якобианами $J(S_1) = J(S_2)^{-1} \simeq 1,39$)

нечётных периодов $n = 2m + 1$, т. е. когда отображение первого возвращения $T_{2\pi}^{2m+1} = (\tilde{T}^2)^{2m+1} = (\tilde{T}^{2m+1})^2$ является квадратом неориентируемого отображения. Заметим, что в случае чётных периодов отображение $T_{2\pi}^{2m}$ будет квадратом ориентируемого отображения \tilde{T}^{2m} и поэтому здесь, скорее всего, должны происходить лишь консервативные параболические бифуркации.

В работе [8] были исследованы бифуркации типа «0 → 4» периодических точек отображения $T_{2\pi}$ в случае нечётных периодов $n \leq 9$ (для точек с нечётными периодами больше 9 моменты бифуркаций ещё можно было найти, но исключительная малость масштабов не позволяла исследовать что-то большее). На рис. 7 показаны некоторые детали соответствующей бифуркации для точки периода 3, которая происходит при $\varepsilon = \varepsilon_3^* \simeq 0,455$.

Отметим, что свойство обратимости отображения $T_{2\pi}$ позволяет проводить достаточно простую процедуру нахождения тех значений параметра ε , при которых происходят бифуркации рождения симметричных периодических траекторий. Для данного периода n нужно только построить кривую $T_{2\pi}^n(\text{Fix}(R))$ и найти момент, когда эта кривая будет касаться соответствующей линии множества $\text{Fix}(R)$. На рис. 7*a*, в частности, показан случай, когда кривая $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$ (здесь линия $\eta = \pi$ — одна из линий множества $\text{Fix}(R)$) близка к моменту касания линии $\eta = \pi$ (они касаются друг друга при $\varepsilon = \varepsilon_3^*$). Когда бифуркационные моменты найдены, структуру бифуркации можно уже изучать по фазовым портретам.

Отметим также, что указанные локальные бифуркации, которые, очевидно, разрушают консервативность в модели, ведут также и к глобальным бифуркациям, связанным с образованием негрубых гетероклинических контуров, содержащих седла с якобианами больше и меньше 1. Например, в случае с несимметричными седлами периода 3 примеры таких контуров, найденных в [8] численно, показаны на рис. 8. В силу теорем из работ [1, 46] бифуркации таких контуров приводят к возникновению смешанной динамики, когда у системы появляется счётное множество периодических стоков, источников и седел, в совокупности неотделимых друг от друга.

Таким образом, в работе [8] вопрос о существовании смешанной динамики в модели Пиковского—Топажа был исследован с разных сторон. Был подтверждён не только факт её существова-

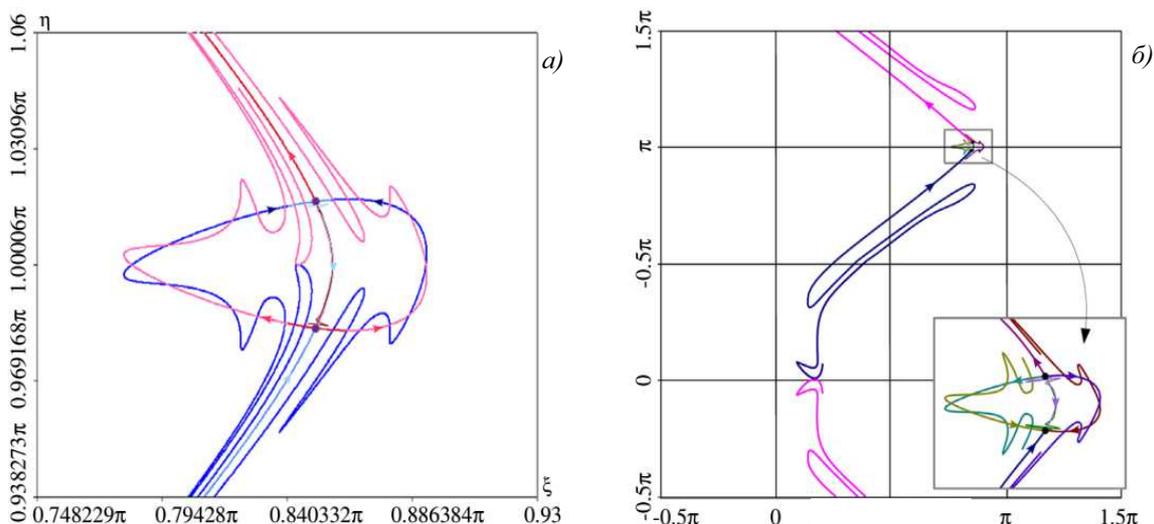


Рис. 8. Образование «малого» гетероклинического контура при $\epsilon \approx 0,46207$ (а) и «большого» гетероклинического контура при $\epsilon \approx 0,463$ (б) [8]

ния, но и изучены бифуркационные механизмы её возникновения, как локальные, разрушающие консервативность, так и глобальные, распространяющие неконсервативные элементы динамики (например, периодические стоки и источники) далеко по фазовому пространству.

Отметим, что в работе [8] был найден также ещё один интересный механизм «взрывного» возникновения смешанной динамики, в основе которой лежит бифуркация исчезновения неподвижной точки у отображения Пуанкаре $T_{2\pi}$. Эта бифуркация происходит при $\epsilon = \epsilon_1^* \approx 0,6042$, она имеет тип « $0 \rightarrow 4$ » и связана с появлением при $\epsilon > \epsilon_1^*$ двух кластеров из четырёх неподвижных точек (сток, источник и два седла) вблизи точек пересечения линий симметрии $\xi = 0 \cap \xi = \pi$ и линий $\eta = 0 \cap \eta = \pi$ неподвижных точек инволюции R . В результате этого, при $\epsilon > \epsilon_1^*$ динамика модели становится такой, что большинство траекторий стремятся к стокам: они становятся глобальными аттракторами, соответственно, глобальными репеллерами становятся источники. Если теперь проследить за этими аттракторами и репеллерами при уменьшении ϵ , то обнаруживается интересное явление типа обратимой перемежаемости, когда аттракторы и репеллеры сливаются (вместе с седлами) и мгновенно возникает хаотическая смешанная динамика (см. рис. 9) ⁷. На рис. 10 показаны некоторые этапы формирования этой динамики, метастабильной до тех пор, пока неподвижные точки не исчезнут.

2.2. Неголономная модель кельтского камня

Кельтским камнем называется твёрдое тело с округлой симметричной поверхностью, обладающее динамической асимметрией ⁸. Если положить такой камень на ровную плоскую поверхность и закрутить его вокруг вертикальной оси в некотором направлении, например против часовой стрелки, то он может устойчиво продолжать свое вращение, как и всякое обычное округлое тело. Однако, если попытаться закрутить такой камень по часовой стрелке, то он, без всякой види-

⁷ Видимое несоответствие фазовых картинок на рис. 2 и 9 можно объяснить тем, что в первом случае секущая $\psi_2 = \pi/2$ при $\epsilon > 0,25$ не является глобальной и поэтому половина фазового портрета на рис. 2 не видна.

⁸ Кельтский камень на плоскости можно представить как однородное тело с выпуклой поверхностью, симметричной относительно осей Ox и Oy , с плоской площадкой $z = z_0$, в центре которой прикреплена тяжёлая штанга. Поворачивая штангу, можно задавать соответствующую динамическую асимметрию камня, см. рис. 11а.

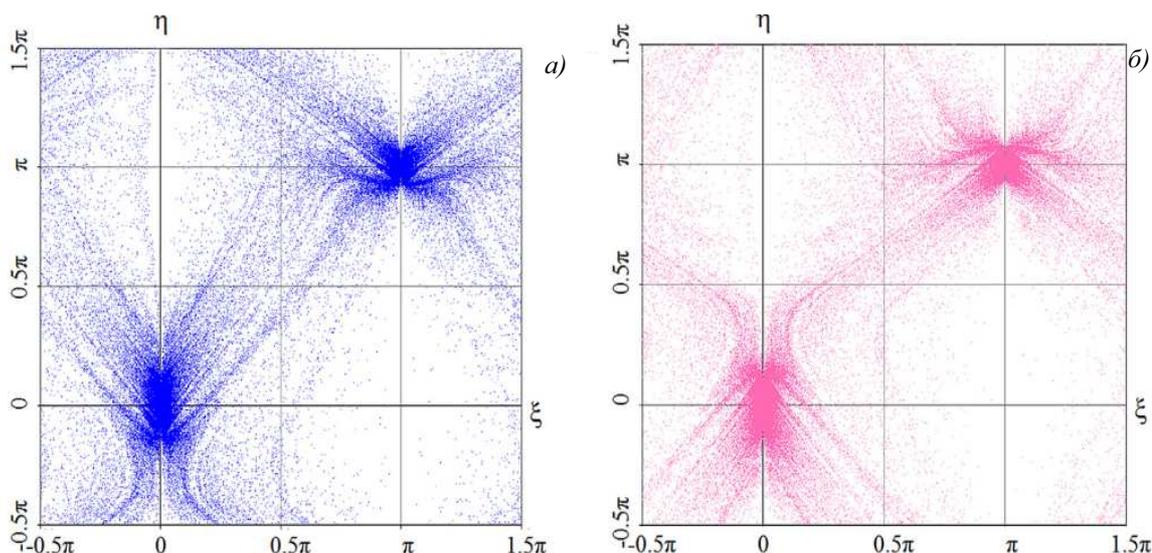


Рис. 9. Аттрактор (а) и репеллер (б) при $\varepsilon = 0,6 < \varepsilon_1^* = 0,6042$ [8]. Эти аттрактор и репеллер получаются соответственно в результате положительных и отрицательных итераций 100 точек, равномерно распределённых на линии $\text{Fix}(R)$. Можно видеть, что аттрактор и репеллер пересекаются, но не совпадают

мой причины, вскоре замедлит свое вращение, начнет сильно раскачиваться, затем поменяет направление вращения на противоположное и, наконец, продолжит устойчиво вращаться против часовой стрелки.

Неголономная модель кельтского камня (в которой предполагается, что контакт камня с плоскостью точечный и отсутствует проскальзывание) даёт простое математическое объяснение этому явлению. Достаточно быстрому вращению камня вокруг вертикальной оси против часовой стрелки отвечает асимптотически устойчивое состояние равновесия O_s . Поскольку неголономная модель камня описывается системой, обратимой относительно инволюции $\omega \rightarrow -\omega$ и обращения времени [47, 48], то в этой системе также присутствует вполне неустойчивое состояние равновесия O_u , отвечающее вращению камня вокруг той же оси, но в противоположном направлении. Если в системе, помимо устойчивого состояния равновесия, других аттракторов нет (что бывает при большой энергии камня⁹), то траектории из окрестности O_u будут стремиться к устойчивому состоянию равновесия O_s .

Важно отметить, что, помимо устойчивого состояния равновесия, неголономная модель кельтского камня может обладать и другими, как регулярными, так и хаотическими, аттракторами. Впервые странные аттракторы в динамике кельтских камней были обнаружены в работе [49]. Исследованию странных аттракторов в этой модели также посвящены работы [2, 3, 51].

Явление смешанной динамики в неголономной модели кельтского камня впервые было обнаружено в работе [2], в которой было показано, что аттрактор системы может пересекаться, но не совпадать с репеллером. На рис. 11б, в и г изображены фазовые портреты аттрактора A (синие точки) и репеллера R (красные точки) в неголономной модели кельтского камня при различных значениях её параметров. При достаточно сильном закручивании камня (когда энергия вращения достаточно велика) полный аттрактор системы отделён от полного репеллера (рис. 11б). Однако

⁹ Существуют также модели кельтского камня, у которых даже при больших энергиях вертикальные вращения неустойчивы, здесь устойчивым является вращение (против часовой стрелки) с прецессией вокруг вертикальной оси, которому отвечает так называемый устойчивый цикл Карапетяна [50]. Явление реверса здесь также имеет место.

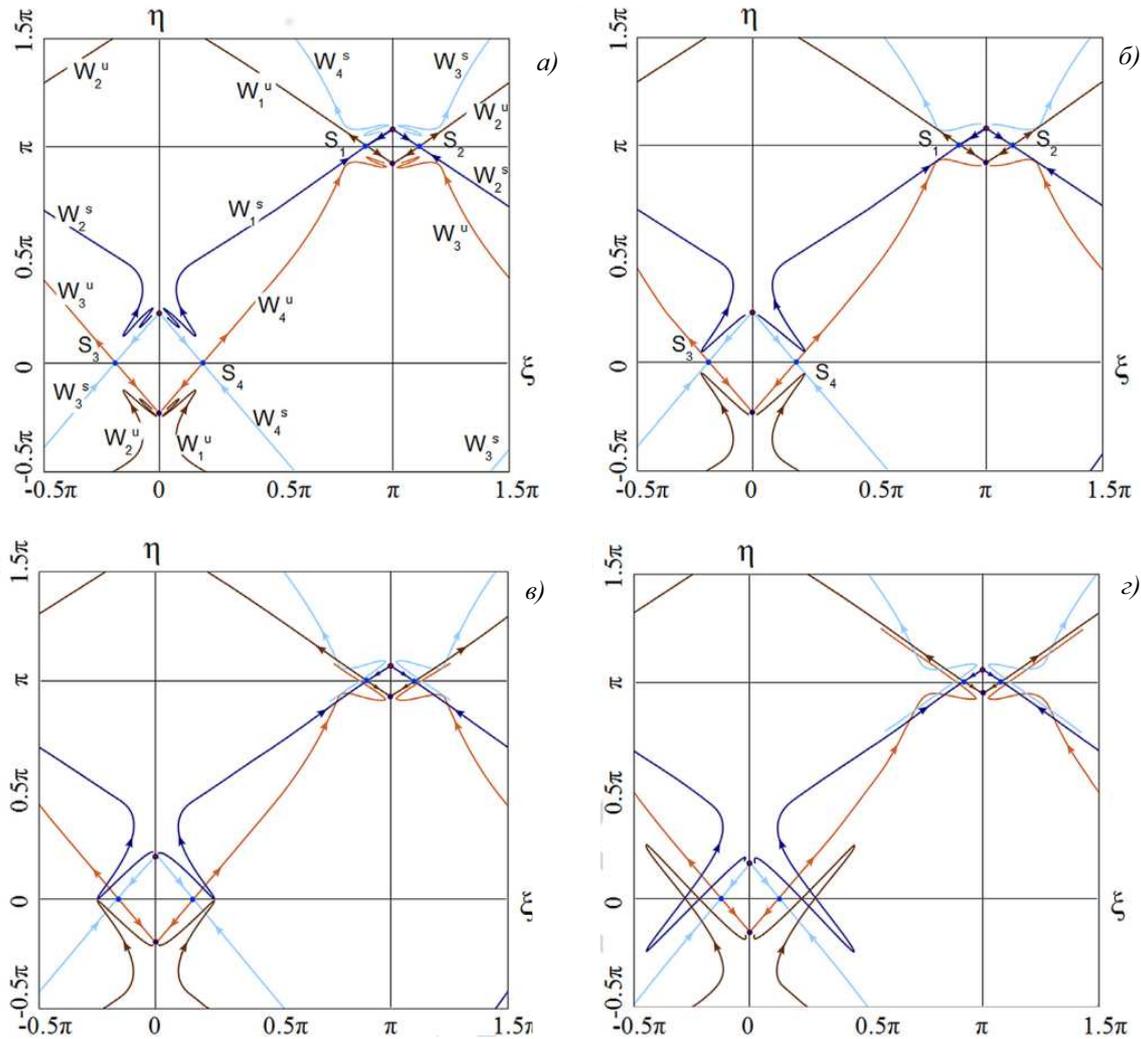


Рис. 10. Развитие динамики (при $\varepsilon > \varepsilon_1^*$) при уменьшении ε в результате образования гетероклинических пересечений между инвариантными многообразиями седловых неподвижных точек S_i , $i = 1, \dots, 4$ [8]. Панель а: многообразия не пересекаются, $\varepsilon = 0,7$ (динамика простая); панель б: момент образования гетероклинических пересечений, $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \simeq 0,690$ (динамика становится хаотической); панель в: возникают симметричные гетероклинические траектории, $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \simeq 0,679$ (начало возникновения консервативной динамики); панель г: уже развитые гомоклинические и гетероклинические структуры, $\varepsilon = 0,650$ (возникают при $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$)

при уменьшении энергии вращения аттрактор и репеллер увеличиваются в размерах и, в некоторый момент, начинают пересекаться, возникает смешанная динамика (рис. 11в), которая может также сосуществовать с поведением траекторий, которое практически не отличимо в расчётах от консервативного (рис. 11г). Отметим также, что в работе [3] были изучены бифуркации, приводящие к смешанной динамике. В частности показано, что это явление может возникать взрывным образом, в результате столкновения на линии неподвижных точек инволюции устойчивой и вполне неустойчивой неподвижных точек. Это явление обратимой перемежаемости похоже на то, которое мы обсуждали выше для модели Пиковского—Топажа, но, во-первых, оно наблюдается в случае трёхмерного отображения, а во-вторых, здесь сливаются только две точки — сток и источник.

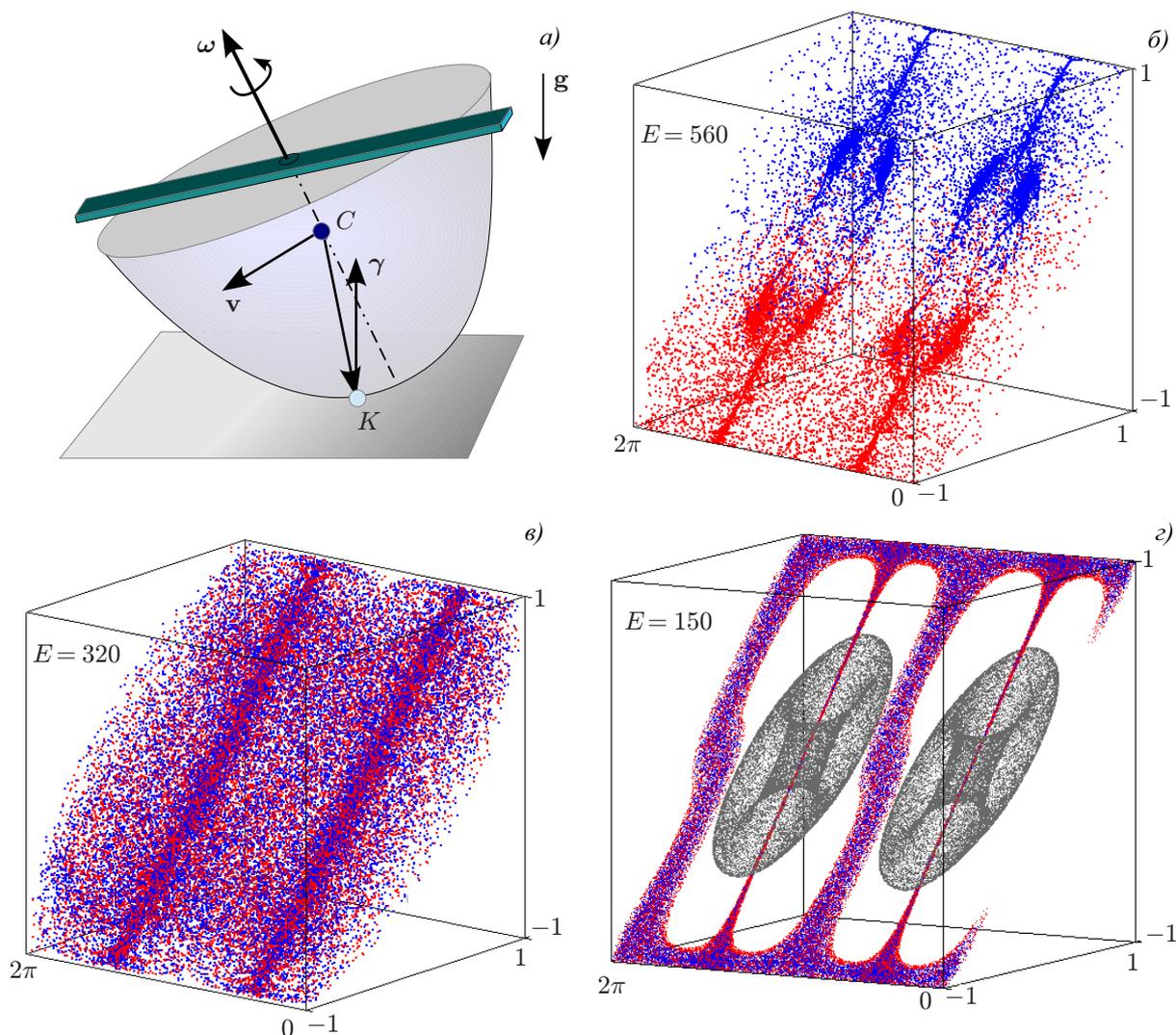


Рис. 11. Панель *a*: кельтский камень на плоскости; панель *б*: странный аттрактор (синие точки) и странный репеллер (красные точки); панель *в*: смешанная динамика; панель *г*: сосуществование смешанной динамики с поведением траекторий, которое практически не отличается в расчётах от консервативного (2 серых овала в середине куба). Здесь параметр E — полная энергия камня; фазовое пространство отображения Пуанкаре модели традиционно представляется в виде куба, где по осям отложены так называемые переменные Адуайе–Депри [2, 49]

2.3. Примеры смешанной динамики, возникающей при столкновении хаотических аттрактора и репеллера

В предыдущих разделах мы рассмотрели примеры систем, демонстрирующих смешанную динамику, возникающую либо в результате локальных и глобальных бифуркаций разрушения консервативности, либо взрывным образом, в результате бифуркаций слияния простых аттракторов и репеллеров. Здесь мы рассмотрим другую ситуацию, когда смешанная динамика является результатом столкновения странного аттрактора со странным репеллером. Если бы указанные аттракторы и репеллеры были цепно-транзитивными, т. е. соответственно сталкивались бы CRH-аттрактор и CRH-репеллер, то они по теореме 2 из работы [5] должны были бы просто объеди-

ниться и образовать одно большое множество, обратимое ядро, которое является одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером. В действительности этого никогда не происходит (по крайней мере, мы не знаем примеров возникновения консервативной динамики, т. е. когда $A = R$, таким способом). Реальная картина может получиться, когда сталкиваются квазиаттрактор и квазирепеллер, что также согласуется с другим результатом из работы [5], по которому образующееся обратимое ядро должно быть окружено счётным множеством диссипативных аттракторов и репеллеров (например, стоков и источников).

В качестве первого примера системы, демонстрирующей смешанную динамику такого типа, рассмотрим неголономную модель волчка Суслова — тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, подчинённого неголономной связи $(\omega, \mathbf{e}) = 0$, запрещающей его вращения вокруг некоторой фиксированной оси \mathbf{e} . Существование смешанной динамики в такой модели было установлено в работе [10], в которой, в частности, было показано как она возникает в результате столкновения симметричных аттрактора и репеллера Эно.

Напомним, что аттрактор Эно был представлен в работе [52], это странный квазиаттрактор двумерного диссипативного отображения (с якобианом меньше 1 по модулю), содержащий седловую неподвижную точку с мультипликаторами λ и γ , такими, что $|\lambda| < 1$ и $\gamma < -1$ (в ориентируемом случае $-1 < \lambda < 0$, в неориентируемом случае $0 < \lambda < 1$). Такой аттрактор содержит целиком неустойчивое многообразие $W^u(O)$ точки O , и он может быть представлен либо как замыкание множества $W^u(O)$, либо, что эквивалентно, как пролонгация точки O . Также у аттрактора Эно существует поглощающая область, в которой он является максимальным аттрактором, т. е. содержит, помимо $W^u(O)$, ещё и все устойчивые периодические точки из этой окрестности. Обычно аттракторами Эно называют соответствующие аттракторы, которые наблюдаются именно в отображении Эно $\bar{x} = y$, $\bar{y} = M - bx - y^2$, которое является квадратичным отображением плоскости с постоянным якобианом $J = b$. Про такие же аттракторы в других случаях мы будем говорить как об аттракторах типа Эно¹⁰. Такие аттракторы представляют большой интерес, т. к. часто встречаются в приложениях, в том числе в моделях, которые представлены в этом параграфе.

У модели волчка Суслова, в отличие от неголономной модели кельтского камня, существует три независимых первых интеграла, поэтому исследование её динамики может быть сведено к изучению трёхмерного потока или соответствующего двумерного отображения Пуанкаре на специфическом компактном фазовом пространстве. При определённом условии (один из элементов тензора моментов инерции равен нулю) у системы, описывающей движение волчка Суслова, существует гладкая инвариантная мера [53], и тогда её динамика полностью консервативна. В частности, на рис. 12а представлен фазовый портрет такой динамики в случае, когда консервативный хаос развит достаточно сильно и, соответственно, итерации отображения Пуанкаре одной случайно выбранной начальной точки более или менее плотно покрывают фазовое пространство.

В общем случае такой инвариантной меры нет и в фазовом пространстве системы могут существовать как регулярные, так и хаотические аттракторы [54]. При некоторых значениях параметров в системе возникает странный аттрактор типа Эно, содержащий седловую точку периода 3, и симметричный ему странный репеллер типа Эно (рис. 12б). В результате столкновения этих аттрактора и репеллера мгновенно возникает смешанная динамика (рис. 12в), в результате которой аттрактор и репеллер пересекаются и мгновенно увеличиваются в размерах — визуально они не только объединяются, но их точки также начинают распространяться далеко по фазовому пространству. Распределение этих точек по фазовому пространству показывает, что здесь име-

¹⁰ При этом в английском языке существует определённая разница, в зависимости от контекста, между «the Hénon attractor» (предложенный в [52] и существующий при $M = 1,4$ и $b = -0,3$) и «Hénon attractor» и тем более «Hénon-like attractor».

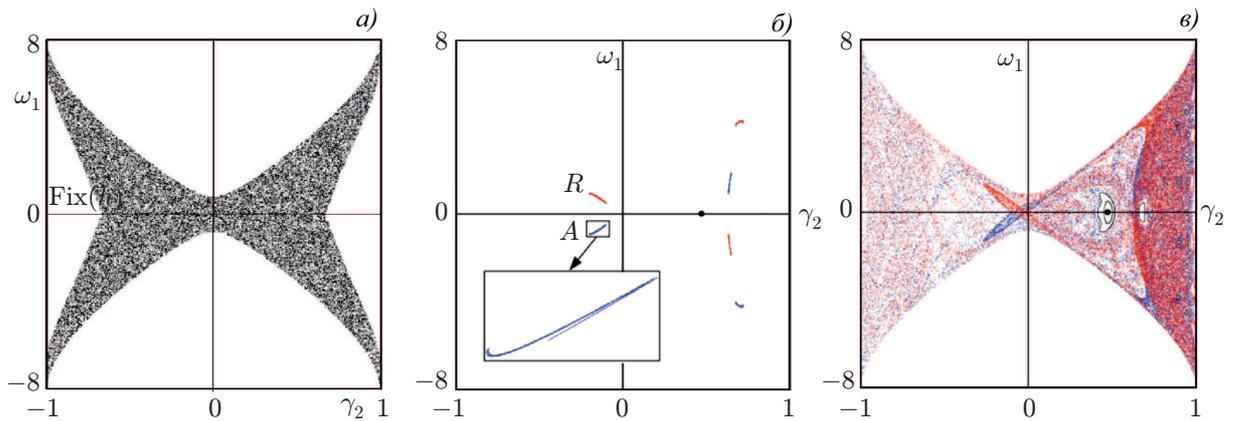


Рис. 12. Панель *a*: развитый консервативный хаос в модели волчка Сулова; панель *б*: трёхкомпонентные странные аттрактор *A* и репеллер *R* типа Эно симметричны и разделены (показан увеличенный фрагмент компоненты аттрактора); панель *в*: смешанная динамика после их столкновения — полный аттрактор модели (синие точки) и полный репеллер модели (красные точки) почти совпадают, но видно, что они отличаются в некоторых деталях

ет место явление похожее на перемежаемость, которую можно назвать обратимой хаотической перемежаемостью.

Другой интересный пример системы, в которой смешанная динамика возникает в результате столкновения хаотических аттракторов и репеллеров, был рассмотрен в работе [11]. В ней изучалась модель двух точечных вихрей при возмущении их акустической волной. Исследование динамики такой модели проводилось с помощью отображения Пуанкаре, заданном на двумерном цилиндре. Было показано, что в этой модели существует смешанная динамика, возникающая в результате столкновения аттракторов и репеллеров типа Эно. В работе [11] было обнаружено 8 таких столкновений; фазовый портрет итоговой смешанной динамики показан на рис. 13. Обращает на себя внимание тот факт, что здесь имеет место новый тип такой динамики, существенно диссипативной, когда аттрактор и репеллер пересекаются, но распределение положительных и отрицательных итераций даже одной и той же точки на их общем симметричном множестве (обратимом ядре) выглядит чрезвычайно несимметрично. Положительные итерации имеют тенденцию плотно группироваться вблизи бывшего аттрактора, а отрицательные — вблизи бывшего репеллера. Никакой тенденции для точек аппроксимировать обратимое ядро здесь не наблюдается и близко (теоретически, согласно теоремы из работы [5], такая тенденция должна существовать, но даже при разумных увеличениях времени расчётов она не проявляется). Можно сделать вывод, что, в отличие от других рассмотренных в настоящей работе примеров смешанной динамики, в которых консервативность обратимого ядра условно превалирует, здесь существенно превалирует диссипативность сталкивающихся

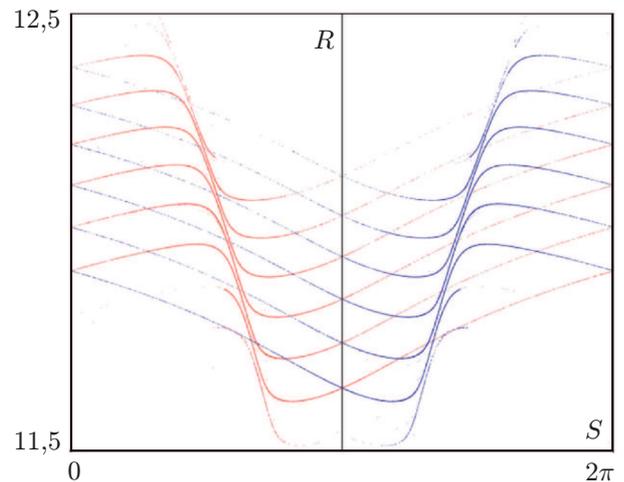


Рис. 13. Пример фазового портрета сильно диссипативной смешанной динамики, возникающей после последовательных столкновений восьми пар симметричных аттракторов и репеллеров типа Эно. Результирующий аттрактор изображён синими точками, репеллер — красными

аттракторов и репеллеров, которая и передаёт сильную асимметрию сингулярным мерам при положительных и отрицательных итерациях.

Ещё один пример системы адаптивно связанных фазовых осцилляторов, в которой также возникает смешанная динамика, был рассмотрен в [12, 13]. Эти работы интересны с той точки зрения, что в них был впервые приведён пример системы, не являющейся обратимой по времени, а также тем, что в работе [13], также впервые, был целенаправленно построен фазовый портрет отображения Пуанкаре в ограничении на обратимое ядро системы.

Автор благодарит своих коллег Д. В. Тураева и А. О. Казакова за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного Фонда (части 1 и 2, проект 19–11–00280), Российского фонда фундаментальных исследований (разделы 3.2 и 3.3, проект 19–01–00607), а также Министерства науки и высшего образования РФ (параграф 3.1, грант 0729–2020–0036). Автор также благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС» за поддержку научных исследований его группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76–125.
2. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. // Reg. Chaot. Dyn. 2013. V. 18, No. 5. P. 521–538. <https://doi.org/10.1134/S1560354713050055>
3. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Самылина Е. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 10. С. 867–882.
4. Gonchenko A. S., Samylnina E. A. // Int. Conf. «Shilnikov WorkShop 2020». Abstracts. 17–18 December 2020, Nizhny Novgorod, Russia. P. 26–28.
5. Гонченко С. В., Тураев Д. В. // Труды МИАН. 2017. Т. 297. P. 133–157.
6. Ruelle D. // Comm. Math. Phys. 1981. V. 82, No. 1. P. 137–151. <https://doi.org/10.1007/BF01206949>
7. Kazakov A. O. // Reg. Chaot. Dyn. 2013. V. 18, No. 5. P. 508–520. <https://doi.org/10.1134/S1560354713050043>
8. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 350. P. 45–57. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.02.002>
9. Kuznetsov S. P. // EPL. 2017. V. 118, No. 1. Art. no. 10007. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/118/10007>
10. Казаков А. О. // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 8. С. 729–738.
11. Kazakov A. // Chaos. 2020. V. 30, No. 1. Art. no. 011105. <https://doi.org/10.1063/1.5144144>
12. Emelianova A. A., Nekorkin V. I. // Chaos. 2019. V. 29, No. 11. Art. no. 111102. <https://doi.org/10.1063/1.5130994>
13. Emelianova A. A., Nekorkin V. I. // Chaos. 2020. V. 30, No. 5. Art. no. 051105. <https://doi.org/10.1063/5.0009525>
14. Ariel G., Schiff J. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2020. Art. no. 132584. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132584>
15. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. // Chaos. 2020. V. 30, No. 7. Art. no. <https://doi.org/10.1063/5.0007230>
16. Bizyaev I. A., Mamaev I. S. // J. Physics A. 2020. V. 53, No. 18. Art. no. 185701 <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab7e52>
17. Bizyaev I. A., Mamaev I. S. // Int. J. Non-Linear Mech. 2020. V. 126. Art. no. 103550. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103550>

18. Kuznetsov S. P., Kruglov V. P., Borisov A. V. // *EPL*. 2020. V. 132. Art. no. 20008. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/132/20008>
19. Pikovsky A., Toraj D. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. V. 170. P. 118–130. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(02\)00536-5](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00536-5)
20. Gonchenko S. // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. V. 5, No. 4. P. 365–374. <https://doi.org/10.5890/DNC.2016.12.003>
21. Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О. // *Труды МИАН*. 2020. Т. 308. С. 135–151. <https://doi.org/10.4213/tm4053>
22. Milnor J. // *Comm. Math. Phys.* 1985. V. 99, No. 2. P. 177–195.
23. Минков С. С. Толстые аттракторы и косые произведения : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2016. 61 с.
24. Conley C. C. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, V. 38. Providence : American Mathematical Soc., 1978. 89 p.
25. Hurley M. // *American Math. Soc.* 1982. V. 269, No. 1. P. 247–271. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7>
26. Аносов Д. В., Бронштейн И. У. // *Динамические системы–1*. М : ВИНТИ, 1985. С. 224–227.
27. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. // *Труды ММО*. 1982. Т. 44. С. 150–212.
28. Тураев Д. В., Шильников Л. П. // *Матем. сборник*. 1998. Т. 189, №. 2. С. 137–160. <https://doi.org/10.4213/sm300>
29. Тураев Д. В., Шильников Л. П. // *Доклады Академии Наук*. 2008. Т. 418, №. 1. С. 23–27.
30. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. <https://arxiv.org/abs/1809.07250>
31. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Козлов А. Д. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2017. Т. 25, No 2. P. 4–36.
32. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D. // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2018. V. 28, No. 11. Art. no. 1830036. <https://doi.org/10.1142/S0218127418300367>
33. Гонченко С. В., Лэмб Й. С. В., Риос И., Тураев Д. // *Доклады Академии Наук*. 2014. Т. 454, № 4. С. 375–378. <https://doi.org/10.7868/S0869565214040045>
34. Aframovich V. S., Shilnikov L. P. // *Nonlinear Dynamics and Turbulence* / ed by G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston : Pitmen, 1983. P. 336–339.
35. Кузнецов С. П. *Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике* // Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. 486 с.
36. Lorenz E. // *J. Atmospheric Sci.* 1963. V. 20, No. 2. P. 130–141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
37. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2005. V. 15, No. 11. P. 3493–3508. <https://doi.org/10.1142/S0218127405014180>
38. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
39. Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V. // *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. V. 8, No. 5. P. 48–70. <https://doi.org/10.1051/mmnp/20138504>
40. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. // *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014. V. 24, No. 8. Art. no. 1440005. <https://doi.org/10.1142/S0218127414400057>
41. Dmitriev A. S., Komlev Yu. A., Turaev D. V. // *Int. J. Bif. Chaos*. 1992. V. 2, No. 1. P. 93–100. <https://doi.org/10.1142/S0218127492000094>
42. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. V. 112, No. 1–2. P. 1–39. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00199-1](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00199-1)
43. Rom-Kedar V., Wiggins S. // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1990. V. 109, No. 3. P. 239–298. <https://doi.org/10.1007/BF00375090>

44. Haragus M., Iooss G. // Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems. London : Springer, 2011. P. 239–278.
45. Lerman L. M., Turaev D. V. // Reg. Chaotic Dyn. 2012. V.17, No.3–4. P. 318–336. <https://doi.org/10.1134/S1560354712030082>
46. Lamb J. S. W., Stenkin O. V. // Nonlinearity. 2004. V.17, No. 4. P. 1217–1244. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/005>
47. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 334 с.
48. Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы / под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева. Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 327 с.
49. Борисов А. В., Мамаев И. С. // Успехи физ. наук. 2003. Т.173, №4. С. 407–418.
50. Карапетян А. В. // Прикладная математика и механика. 1981. Т.45, №.5. С. 808–814.
51. Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. // Нелинейная динамика. 2012. Т.8, №4. С. 735–762.
52. Henon M. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69–77. <https://doi.org/10.1007/BF01608556>
53. Козлов В. В. // Успехи механики. 1985. Т.8, №3. С. 85–107.
54. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. // Reg. Chaot. Dyn. 2015. V. 20, No. 5. P. 605–626. <https://doi.org/10.1134/S1560354715050056>

Поступила в редакцию 10 июля 2020 г.; принята в печать 28 октября 2020 г.

THREE FORMS OF DYNAMICAL CHAOS

S. V. Gonchenko

This work is a review of recent results, which were obtained within the framework of the mathematical theory of dynamical chaos and are associated with the discovery of its third new form, the so-called mixed dynamics. This type of chaos considerably differs from its two classical forms, namely, conservative chaos and dissipative chaos, and its main difference is that the attractors and repellers can intersect without coincidence. This work offers theoretical substantiation of this phenomenon without involving a serious mathematical apparatus and also provides a number of examples of the systems from applications in which the mixed dynamics is observed. We show that the mixed dynamics can be of different types, ranging from that close to conservative to the strongly dissipative one and also that it can result from various bifurcation mechanisms.