

УДК 519.633

МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ В МОДЕЛЯХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Е. И. Пармузин^{1,2*}, *В. Б. Залесный*¹, *В. И. Агошков*^{1,3}, *В. П. Шутяев*^{1,2}

¹ Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, г. Москва;

² Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный;

³ Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассматриваются прямые и обратные задачи геофизической гидродинамики, связанные с прогнозом, апостериорным анализом и вариационным усвоением данных наблюдений. Основное внимание уделяется алгоритмам численного решения задач с неполной информацией о начальных и граничных условиях. Наряду с классическими алгоритмами излагается подход к постановке и решению данных задач, развитый в работах Г. И. Марчука и его научной школы. Он основан на сочетании методов расщепления и сопряжённых уравнений. Его использование приводит к построению гибких, иерархически развиваемых моделей сложных систем, обладающих модульной структурой и эффективной реализацией. Основной частью данного подхода является расщепление сложной нелинейной системы уравнений по физическим процессам на ряд энергетически сбалансированных подсистем. Каждая отдельная подсистема может повторно расщепляться на подсистемы более простой структуры. Данная методология иллюстрируется на решении задач гидродинамики Мирового океана и Чёрного моря.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия возрастающий интерес к задачам усвоения данных наблюдений в математических моделях геофизической гидродинамики определяется значительным прогрессом в трёх областях науки и техники. Это создание всё более мощных вычислительных комплексов, разработка новых спутниковых и контактных измерительных технологий, а также новых методов и вычислительных алгоритмов. Возможность анализа и обработки больших потоков информации и использования её в моделях привела к постановке новых математических задач геофизической гидродинамики. Необходимость синтеза данных измерений и данных моделирования породила сложнейшие научные и технологические проблемы, связанные с усовершенствованием вычислительных методов моделирования и анализа природных явлений.

В задачах геофизической гидродинамики математические модели используются для исследования общего поведения гидродинамических течений, а также для предсказания их динамики, как происходит, например, в задачах метеорологии и океанографии [1].

Отличительной характеристикой исследования гидродинамических течений является важность наличия данных наблюдений. Прежде всего, из-за нелинейности мы не можем ожидать глобальных теоретических результатов относительно гидродинамических течений, речь может идти только о некоторой окрестности конкретной ситуации, где имеются данные. Кроме того, геофизические науки не являются строго экспериментальными, т. е. конкретная гипотеза не может быть проверена повторением натурального эксперимента. Каждый момент времени (эпизод) уникален. Поэтому исследование гидродинамических течений можно проводить, используя в качестве источника информации о конкретном эпизоде как данные наблюдений, так и модель.

Методы «усвоения данных» используются для того, чтобы связать эти источники информации и затем предсказать состояние течения в нужный момент времени. В последние десятилетия

* parm@inm.ras.ru

достигнут значительный прогресс в науках о Земле благодаря улучшению систем наблюдений и пониманию закономерностей геосистемы. Цель усвоения данных — найти лучшую оценку состояния конкретной физической системы, используя как информацию, полученную из наблюдений системы, так и её математическую модель. Техника усвоения данных широко применяется в науках о Земле. Наибольшие приложения она получила в метеорологии и океанографии, где наблюдения атмосферы и океана усваиваются в атмосферные и океанские модели с целью получения начальных условий (или других параметров модели) для дальнейшего моделирования и прогноза. В последние годы методы усвоения данных начинают применяться и для анализа других измерений геосистемы, включая биосферу, криосферу и поверхность почвы.

Описание теоретических и практических идей усвоения данных можно найти в различных областях науки [2–9]. Развитие данного направления в значительной степени основано на трудах Гурия Ивановича Марчука. В 70-е годы XX века Г. И. Марчук сформулировал фундаментальный подход к решению проблем долгосрочного прогноза погоды и климатической изменчивости, основанный на сопряжённых уравнениях гидротермодинамики атмосферы и океана. В дальнейшем в работах Г. И. Марчука было дано развитие теории сопряжённых уравнений и алгоритмов возмущений для исследования различных классов задач математической физики, описываемых сложными системами и математическими моделями [3]. Эти подходы явились основным содержанием многолетних исследований Г. И. Марчука и его научной школы в ИВМ РАН в различных областях математики и её приложениях к проблемам геофизической гидродинамики, моделям охраны окружающей среды, теории климата и его изменений, математическим проблемам обработки информации от спутников, теории приливов и др.

В настоящее время происходят существенные качественные изменения систем измерений и мировое научное сообщество получает всё больше и больше данных о различных характеристиках нашей геосистемы. Поэтому разработка технологий вариационного усвоения данных наблюдений, основанных на современных подходах и учитывающих последние достижения в этом направлении, является актуальной проблемой.

В данной работе излагаются подходы к решению задач вариационного усвоения данных, развиваемые в Институте вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН и основанные на сочетании методов расщепления и сопряжённых уравнений. Данная методология иллюстрируется на примере решения задач гидротермодинамики Мирового океана и Чёрного моря.

1. ИДЕИ И МЕТОДЫ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ

Остановимся кратко на развитии идей и методов усвоения данных в науках о Земле [1].

Первая попытка объективного анализа данных была выполнена Пановски [10]. Суть его метода — двумерная (2D) полиномиальная интерполяция данных наблюдений. В дальнейшем этот подход был развит Гилкристом и Крессманом [11], которые ввели область влияния для каждого наблюдения и предложили использовать так называемое «поле бэкграунда» — поле первого приближения.

В подходе Бергторссона и Дуза [12] поле первого приближения играет более важную роль: их методика усвоения основана на анализе разности данных наблюдений и поля первого приближения, а не самих значений функции наблюдений. Они попытались оптимизировать веса, приписанные каждому наблюдению. Впоследствии модификация этого подхода была дана Крессманом [13] и состояла в нескольких итерациях анализа — так называемый метод последовательных поправок (Successive Correction Method, SCM). Хотя данный метод имеет свои недостатки (с его помощью мы приближаемся к данным наблюдений, которые могут содержать ошибки), он нашёл применение для оперативного использования во многих бюро прогнозов погоды.

Подход, основанный на методе статистической интерполяции, восходит к работам Гаусса, Колмогорова, Винера, а в науках о Земле стал известен благодаря монографии Гандина [14]. Такой подход обычно называют оптимальной интерполяцией (Optimal Interpolation, OI) [15]. Наблюдениям присваивают веса, связанные с их ошибками. Метод оптимальной интерполяции применялся во многих оперативных центрах, начиная с конца 1970-х годов [15]. В дальнейшем этот метод получил развитие в работах Лоренса [16], который использовал различные аппроксимации для решения уравнений состояния системы, а также предложил «гибрид» двух методов — оптимальной интерполяции и последовательных поправок.

Метод оптимальной интерполяции и его модификации до настоящего времени используются для оперативного анализа данных при предсказании погоды [16, 17], а также при ассимиляции океанографических данных [18]. Большую популярность приобрёл метод ансамблевой оптимальной интерполяции (EnOI) [19, 20], который позволяет построить параллельные алгоритмы усвоения данных [21].

В 1960 году Калманом был предложен статистический метод усвоения, который стали называть фильтром Калмана. Непрерывный аналог этого метода называют фильтром Калмана—Бьюси [22]. Существуют различные обобщения этого метода на нелинейный случай [23]. В настоящее время большим успехом пользуется расширенный фильтр Калмана — метод EKF (extended Kalman filter) [24], в котором используется линеаризация модели около некоторого состояния, а также ансамблевый фильтр Калмана — метод EnKF (ensemble Kalman filter) [25], основанный на использовании метода Монте—Карло на каждом временном шаге. Многоэлементный четырёхмерный анализ гидрофизических полей на основе динамико-стохастических моделей разрабатывался в МГИ [26]. Модификации алгоритма Калмана на основе аппроксимаций ковариационных матриц использовались при моделировании циркуляции Чёрного моря [27].

В следующем разделе мы остановимся на ещё одном подходе — вариационном усвоении данных.

2. МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ

Значительным прорывом в решении задач усвоения данных было применение вариационных методов и, в частности, методов оптимального управления. Очень плодотворной оказалась идея минимизировать некоторый функционал, связанный с данными наблюдений, на траекториях (решениях) рассматриваемой модели (см., например, [1]). Тем самым, задача об усвоении данных формулируется как задача оптимального управления. Теоретические основы исследования и решения таких задач заложены в классических работах Р. Беллмана, Л. С. Понтрягина, Н. Н. Красовского, Ж.-Л. Лионса и Г. И. Марчука.

Впервые вариационный формализм был использован в метеорологии Сасаки [28], а в задачах динамической океанографии — Прово и Сальмоном [29].

Впервые трёхмерное вариационное усвоение данных (3D-VAR) для оперативного анализа было применено в Национальных центрах прогноза окружающей среды NCEP (США) [30], а позднее использовалось в Европейском центре среднесрочного прогноза погоды ECMWF и NASA Data Assimilation Office [31].

В настоящее время всё больший интерес вызывает четырёхмерное усвоение данных (4D-VAR), при котором линеаризованные модели и сопряжённые к ним используются для усвоения данных наблюдений на заданном временном интервале. Впервые на практике система 4D-VAR была применена в Европейском центре среднесрочного прогноза погоды [32].

Как известно, при решении задач минимизации возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении было использование теории

сопряжённых уравнений Г. И. Марчуком и Ж.-Л. Лионсом. Начиная с известных работ [33–36], применение сопряжённых уравнений для исследования и численного решения задач об усвоения данных (в том числе для вычисления градиента функционала) широко практикуется многими исследователями [37–44].

Проиллюстрируем постановку задачи четырёхмерного вариационного усвоения данных на примере задачи о восстановлении начального условия. Рассмотрим задачу на интервале $(0, T)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A(\varphi, t), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0^b \quad (1)$$

и введём функционал от её решения:

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \left(C_1 (\varphi_0 - \varphi_0^b), \varphi_0 - \varphi_0^b \right) + \frac{1}{2} \int_0^T [C_2 (\mathcal{H}\varphi - \psi^0), \mathcal{H}\varphi - \psi^0] dt,$$

где \mathcal{H} — (линейный) оператор наблюдений, ψ^0 — функция наблюдений, φ_0^b — заданный вектор, C_1, C_2 — весовые операторы, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. Как правило, C_1, C_2 выбираются в виде $C_1 = B^{-1}$, $C_2 = R^{-1}$, где B, R — ковариационные операторы ошибок $\xi = \varphi_0^b - \varphi^t|_{t=0}$ и $\varepsilon = \psi^0 - \mathcal{H}\varphi^t$ соответственно, где φ^t — точное решение системы (1). Такие весовые операторы (или их приближения) часто выбираются в практических задачах [24, 45, 46].

Предположим, что начальное условие φ_0 нам неизвестно. Тогда задача об усвоении данных формулируется следующим образом: найти φ_0, φ такие, что они удовлетворяют системе (1) и на множестве решений функционал J достигает своего наименьшего значения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A(\varphi, t), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad J(\varphi_0) = \inf_v J(v). \quad (2)$$

По определению

$$J'(\delta\varphi_0) = \left(C_1 (\varphi_0 - \varphi_0^b), \delta\varphi_0 \right) + \int_0^T (C_2 (\mathcal{H}\varphi - \psi^0), \mathcal{H}\delta\varphi) dt,$$

где $\delta\varphi$ удовлетворяет системе TLM (tangent linear model):

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = A'(\varphi, t) \delta\varphi, \quad t \in (0, T), \quad \delta\varphi|_{t=0} = \delta\varphi_0. \quad (3)$$

Пусть

$$-\frac{d\varphi^*}{dt} = [A'(\varphi, t)]^* \varphi^* - p, \quad \varphi^*|_{t=T} = 0, \quad (4)$$

где $p = \mathcal{H}^* C_2 (\mathcal{H}\varphi - \psi^0)$, \mathcal{H}^* — оператор, сопряжённый к \mathcal{H} , а φ^* — решение сопряжённой задачи (4). Тогда из соотношения сопряжённости

$$\int_0^T (p, \delta\varphi) dt = -(\varphi^*|_{t=0}, \delta\varphi_0)$$

получаем градиент

$$J'(\delta\varphi_0) = \left(C_1 (\varphi_0 - \varphi_0^b), \delta\varphi_0 \right) + \int_0^T (p, \delta\varphi) dt = \left(C_1 (\varphi_0 - \varphi_0^b) - \varphi^*|_{t=0}, \delta\varphi_0 \right).$$

Необходимое условие оптимальности [2] приводит задачу к системе уравнений для трёх неизвестных $\varphi_0, \varphi, \varphi^*$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A(\varphi, t), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0; \quad (5)$$

$$-\frac{d\varphi^*}{dt} = [A'(\varphi, t)]^* \varphi^* - \mathcal{H}^* C_2(\mathcal{H}\varphi - \psi^0), \quad \varphi^*|_{t=T} = 0; \quad (6)$$

$$C_1(\varphi_0 - \varphi_0^b) - \varphi^*|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

где $[A'(\varphi, t)]^*$ — оператор, сопряжённый к производной оператора модели A . Система (5)–(7) носит название «системы оптимальности» и играет важную роль для исследования и численного решения задач об усвоении данных.

Эта система может быть получена также из принципа максимума Понтрягина, сформулированного для исходной задачи минимизации [39], или методом множителей Лагранжа [47].

Разрешимость нелинейных задач об усвоении данных и строгое обоснование численных методов их решения — непростая проблема. Достаточно полные результаты, касающиеся разрешимости линейных задач оптимального управления вида (2), (5)–(7) были получены Ж. Лионсом с использованием разработанного им общего подхода HUM (Hilbert Uniqueness Method). Дальнейшее развитие этого подхода, а также другие методы исследования задач оптимального управления рассматривались в работах К. Бардоса, Д. Руссела, А. И. Егорова, А. В. Фурсикова, Е. Зуаза, В. И. Агошкова и др. Некоторые результаты о разрешимости слабонелинейных задач об усвоении данных были получены в [38, 43]. Дальнейшие обобщения и новые приложения были предложены в последующие годы [44, 48, 49].

Для построения численного алгоритма решения задачи об усвоении данных можно использовать известные методы минимизации, либо решать систему оптимальности. При численном решении задачи часто необходимо вычислять градиент исходного функционала J . Это можно делать с помощью выбранной подходящим образом сопряжённой задачи. В нашем примере градиент функционала вычисляется следующим образом: при заданном v находим последовательно решения прямой и сопряжённой задач

$$\frac{d\varphi}{dt} = A(\varphi, t), \quad t \in (0, T), \quad \varphi|_{t=0} = v; \quad (8)$$

$$-\frac{d\varphi^*}{dt} = [A'(\varphi, t)]^* \varphi^* - \mathcal{H}^* C_2(\mathcal{H}\varphi - \psi^0), \quad \varphi^*|_{t=T} = 0 \quad (9)$$

и полагаем

$$J'(v) = C_1(v - \varphi_0^b) - \varphi^*|_{t=0}. \quad (10)$$

В работах многих авторов большое внимание уделяется численному построению сопряжённой модели (9), которая может быть получена как путём дискретизации непрерывной задачи [50, 51], так и непосредственным транспонированием кода дискретной линеаризованной задачи [44, 52]. В последнем случае часто используют методы автоматического дифференцирования [47]. Сравнение этих двух подходов к построению дискретной сопряжённой задачи проводится, например, в работе [50].

Алгоритмы четырёхмерного усвоения данных [1, 6, 7, 9], представляются в настоящее время наиболее эффективными. В последние годы появилось много работ по сравнению ансамблевого метода Калмана и вариационного усвоения данных [53, 54]; кроме того был разработан так называемый гибридный подход, сочетающий в себе ансамблевый метод и вариационную ассимиляцию данных [55, 56], а также ансамблевый метод 4D-VAR [57, 58].

Отметим, что технология 4D-VAR требует хранения достаточно большого объёма данных, т. к. при решении сопряжённой задачи необходимо иметь данные, полученные в ходе решения прямой задачи. Также метод 4D-VAR требует дополнительных вычислительных затрат при решении прямой и сопряжённой задачи при усвоении данных и использовании результатов усвоения в модели. Эти недостатки в какой-то мере можно уменьшить, используя метод расщепления и применяя параллельные алгоритмы решения задач.

3. МЕТОДЫ 4D-VAR В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

Применение методологии вариационного усвоения данных проиллюстрируем на примере решения задачи об ассимиляции температуры поверхности океана в модели крупномасштабной циркуляции Мирового океана. Пусть задача рассматривается в области $D = \{(x, y, z) : (x, y, R) \in \Omega, 0 < z < H(x, y)\}$. Границу области $\Gamma \equiv \partial D$ мы будем представлять как объединение четырёх непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S \equiv \Omega -$ «невозмущённая поверхность», $\Gamma_{w,op}$ — жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ — твёрдая часть вертикальной боковой границы, Γ_H — дно океана (моря). Характеристические функции частей границы $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}$ и Γ_H будем обозначать как m_S, m_{op}, m_c и m_H соответственно.

Рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} - g\nabla \xi + A_u \mathbf{u} + (A_k)^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_a - \frac{g}{\rho_0} \nabla \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^H \Theta(z) u_1 dz \right] - m \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} u_2 dz \right] = f_3, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости, ξ — функция уровня, T — температура, S — солёность, $\rho_1(T, S) = \rho_0 \beta_T (T - T^{(0)}) + \rho_0 \beta_S (S - S^{(0)}) + \gamma \rho_0 \beta_{TS} (T, S) + f_P$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, f_T, f_S, f_P — заданные функции «внутренних» источников, $g = \text{const} > 0$, $\rho_0, T^{(0)}$ и $S^{(0)}$ — «невозмущённые» значения плотности воды, температуры и солёности соответственно, β_T, β_S — коэффициенты, $\beta_{TS}(T, S)$, $P_a, f_3 \equiv f_3(x, y, \xi, t) \equiv f_3(x, y, t)$ — заданные функции, а γ — числовой параметр. Здесь и в дальнейшем используется следующая весовая функция: $\Theta(z) \equiv r(z)/R$, R — радиус Земли, $n = 1/r$, $m = 1/(r \cos y)$, H — глубина океана (моря). Далее вводится дифференциальный оператор $A_\varphi \varphi \equiv -\text{div}(\nu_\varphi \nabla \varphi)$, где φ может принимать значения u, v, T, S ; $(A_k)^2$ — оператор четвёртого порядка при $A_\varphi = A_k$, который определяется матрицей $\hat{k} = \text{diag}\{k_{ii}\}$ с неотрицательными диагональными элементами k_{ii} , являющимися коэффициентами вязкости по соответствующим направлениям.

Граничные условия на поверхности океана будем задавать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^H \Theta \mathbf{u} dz \right) \mathbf{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на границе } \partial\Omega; \\ U_n^{(-)} u - \nu \frac{\partial u}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u = \tau_x^{(a)} / \rho_0 \quad U_n^{(-)} v - \nu \frac{\partial v}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k v = \tau_y^{(a)} / \rho_0; \\ A_k u = 0, \quad A_k v = 0; \end{aligned}$$

$$U_n^{(-)}T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T(T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)}d_T;$$

$$U_n^{(-)}S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S(S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)}d_S.$$

Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w) \equiv (\mathbf{u}, w)$, $U_n = (\mathbf{U}\mathbf{N}) = u_1N_1 + u_2N_2 + wN_3$, \mathbf{N} — единичный вектор внешней нормали к границе, $U_n^{(-)} = (|U_n| - U_n)/2$, τ_x, τ_y — компоненты векторов касательных напряжений ветра вдоль осей координат, γ_T и γ_S — коэффициенты релаксации к заданным значениям температуры и солёности соответственно, k_{33} — коэффициент вертикальной вязкости, ν — коэффициент турбулентного обмена, Q_T и Q_S — потоки тепла и солёности на поверхности соответственно. Остальные граничные и начальные условия задаются согласно [41, 44].

Задача крупномасштабной динамики океана в терминах функций u, v, ξ, T, S формулируется следующим образом: найти u, v, ξ, T, S , удовлетворяющие уравнениям (11) при соответствующих граничных и начальных условиях.

Одной из особенностей решения данной задачи является использование метода расщепления. Приведём схему расщепления, используемую для аппроксимации исходной математической модели динамики океана и нахождения полного решения задачи $\phi = (u, v, \xi, T, S)$.

Применим для аппроксимации получаемой задачи одну из схем метода суммарной аппроксимации, заключающуюся в реализации следующих шагов. На первом шаге метода решается задача для температуры:

$$T_t + (\mathbf{U}, \nabla)T - \operatorname{div}(\nu_T \cdot \nabla T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в области } D;$$

$$U_n^{(-)}T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T(T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)}d_T \text{ на границе } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} = 0 \text{ на границе } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$U_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} = U_n^{(-)}d_T + Q_T \text{ на границе } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} = 0 \text{ на границе } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j). \quad (12)$$

На втором шаге метода расщепления решается задача для солёности:

$$S_t + (\mathbf{U}, \nabla)S - \operatorname{div}(\nu_S \cdot \nabla S) = f_S \text{ в области } D \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$S = S_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D;$$

$$U_n^{(-)}S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S(S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)}d_S \text{ на границе } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{N}} = 0 \text{ на границе } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$U_n^{(-)}S + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{N}} = U_n^{(-)}d_S + Q_S \text{ на границе } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j);$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{N}} = 0 \text{ на границе } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j). \quad (13)$$

Третий шаг схемы расщепления заключается в решении подзадачи для определения u, v, ξ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} - g \nabla \xi + A_u \mathbf{u} + (A_k)^2 \mathbf{u} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left[P_a + g \int_0^z \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right] \quad \text{в области } D \times (t_{j-1}, t_j); \\
\xi_t - \operatorname{div} \left(\int_0^H \Theta \mathbf{u} dz \right) &= f_3 \quad \text{в области } \Omega \times (t_{j-1}, t_j); \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_{j-1}, \quad \xi = \xi_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1}; \\
\left(\int_0^H \Theta \mathbf{u} dz, \mathbf{N} \right) n + \beta_0 m_{\text{op}} \sqrt{gH} \xi &= m_{\text{op}} \sqrt{gH} d_s \quad \text{на границе } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j). \quad (14)
\end{aligned}$$

Таким образом, при реализации шагов 1–3 после первого шага получаем приближение к T , после второго — к S , а после третьего — к $\mathbf{u} = (u, v)$ и ξ , т. е. подзадачи на этих шагах независимы друг от друга и могут решаться в параллельном режиме. Возможно дальнейшее использование подходящих методов расщепления для реализации данного алгоритма. Например, в данной работе проводилось расщепление по трём пространственным координатам при получении полной численной модели и в приведённых ниже численных экспериментах.

Отметим, что применение расщепления при построении численных алгоритмов приводит к появлению дополнительных членов в разностной схеме, что вызывает ухудшение аппроксимационных свойств численного алгоритма. При расчётах следует учитывать возможную потерю устойчивости на промежуточных шагах схемы расщепления из-за возможной потери свойства положительной определённости для составляющих операторов.

Сформулируем теперь задачу вариационной ассимиляции данных о температуре поверхности океана. Рассмотрим уравнение для температурного блока в виде

$$\begin{aligned}
T_t + (\mathbf{U}, \nabla)T - \operatorname{div}(\nu_T \cdot \nabla T) &= f_T \quad \text{в области } D \times (t_{j-1}, t_j); \\
T &= T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1} \quad \text{в области } D, \quad -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \quad \text{на границе } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\
\frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} &= 0 \quad \text{на границе } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j); \quad U_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} = U_n^{(-)}d_T + Q_T \quad \text{на границе } \Gamma_{w,\text{op}} \times (t_{j-1}, t_j); \\
\frac{\partial T}{\partial \mathbf{N}} &= 0 \quad \text{на границе } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j); \quad T_j \equiv T \quad \text{в области } D \times (t_{j-1}, t_j).
\end{aligned}$$

Пусть дополнительной неизвестной (управлением) является функция полного потока Q . Введём функционал стоимости вида

$$\begin{aligned}
J_\alpha &\equiv J_\alpha(Q, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_\Omega \alpha |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + J_0(\phi); \\
J_0(\phi) &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_\Omega m_0 |T - T_{\text{obs}}|^2 d\Omega dt.
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha \equiv \alpha(\lambda, \theta, t)$ — функция, играющая роль регуляризатора (возможен случай, когда $\alpha(\lambda, \theta, t) = \text{const} \geq 0$) и которая может быть размерной величиной, а $Q^{(0)} \equiv Q^{(0)}(\lambda, \theta, t)$ — заданная функция.

Задача вариационной ассимиляции формулируется следующим образом: требуется найти решение ϕ задачи и функцию Q , такие, чтобы на них функционал принимал наименьшее значение.

Как известно, данная задача имеет эквивалентное представление через систему оптимальности. Введём в рассмотрение сопряжённую задачу. Тогда система оптимальности для T в классическом виде примет вид

$$\begin{aligned} T_t + \frac{1}{2} \left[w_1 \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w_1 T)}{\partial z} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} r^2 \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} &= f_T, & T &= T_1(t_j); \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= Q, & \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} &= 0, \\ T_t^* - \frac{1}{2} \left[w_1 \frac{\partial T^*}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w_1 T^*)}{\partial z} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(r^2 \nu_T \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) &= 0; \\ \nu_T \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{z=H} &= 0, & \left(-w_1 T^* - \nu_T \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= m_0(T - T_{\text{obs}}); \\ \alpha(Q - Q^{(0)}) + T^* &= 0. \end{aligned}$$

Как следует из теории обратных задач и теории сопряжённых уравнений, решение этой системы обеспечивает минимум введённому ранее функционалу. С параметром регуляризации $\alpha > 0$ получаемая оптимальная оценка для Q будет устойчива по отношению к ошибкам наблюдений.

Для решения сформулированной задачи в работе использовался следующий итерационный алгоритм: если $Q^{(k)}$ есть уже построенное приближение к Q , то решается прямая задача при $Q \equiv Q^{(k)}$, сопряжённая задача, а затем определяется следующее приближение $Q^{(k+1)}$ по формулам

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \gamma_k [\alpha(Q^{(k)} - Q^{(0)}) + T_2^*] \quad \text{на поверхности } \Omega.$$

Здесь параметр γ_k выбирается так, чтобы рассматриваемый итерационный процесс сходился. После определения $Q^{(k+1)}$ решение задач повторяется уже с новым приближением $Q^{(k+1)}$, а затем вычисляется $Q^{(k+2)}$ и т. д. Итерации повторяются до выполнения подходящего критерия сходимости процесса. Так, в представленных ниже численных экспериментах, итерационный процесс завершался при достижении относительной ошибки между итерациями в 10^{-3} .

Отметим, что в зависимости от выбора итерационного параметра скорость сходимости может меняться. Возможен случай, когда процесс сходится очень медленно или не сходится совсем. Однако в теории есть случаи, когда можно подобрать параметр таким образом, что процесс будет сходиться за 5–10 итераций. В рассматриваемом эксперименте параметр вычислялся исходя из особенностей самой системы и алгоритм сходился до машинной точности за 3–5 итераций.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИРОВОГО ОКЕАНА

Для экспериментов разработанная в ИВМ РАН трёхмерная модель гидротермодинамики океана [1] была дополнена описанной выше процедурой усвоения температуры поверхности океана T_{obs} с целью восстановления потоков тепла [41].

В качестве объекта моделирования рассматривалась акватория Мирового океана. Параметры рассматриваемой области и её географические координаты могут быть описаны следующим образом: « σ -сетка» [1], количество точек $360 \times 337 \times 40$ (соответственно по широте, долготе, глубине). Первая точка «сетки C » [1] — точка с координатами $22,5^\circ$ восточной долготы и $78,25^\circ$ южной широты. Шаги сетки по λ и θ постоянны и равны $1,0^\circ$ и $0,5^\circ$ соответственно. Шаг по времени $\Delta t = 1$ час.

В качестве T_{obs} использовались данные температуры поверхности Мирового океана [59], представленные С. А. Лебедевым (Геофизический Центр РАН) на сетке модели за январь 2004 года,

в каждый момент времени (т. е. каждый час). В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток за январь 2004 года, полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction). Вычисления включали в себя ассимиляцию T_{obs} ; рассчитывался срок до 30 суток (январь 2004 года).

Целью численного эксперимента, результаты которого приводятся ниже, являлась проверка возможности усвоения неполной информации о температуре поверхности океана для получения всех гидротермодинамических параметров, при этом модель, выступающая в качестве интерполянта, позволяет строить согласованные поля всей системы.

Результаты проведённого численного эксперимента представлены на рис. 1–4. Так, на рис. 1 представлены результаты расчёта температуры поверхности океана с помощью модели без использования блока усвоения T_{model} . На рис. 2 представлен расчёт температуры поверхности океана, который проводился с блоком усвоения по процедуре, описанной в предыдущем разделе (T_{assim}). Разность между значениями температуры поверхности океана, полученными при расчёте без блока усвоения и с использованием данного блока, показана на рис. 3. На рис. 4 приведена разность между данными наблюдений, усреднёнными за 20 часов, и расчётом с помощью модели с блоком усвоения данных на тот же промежуток времени. Отметим, что данные известны только по траектории спутника, пролетающего над акваторией, поэтому в них наблюдаются пробелы, отмеченные на рисунке белым цветом.

В целом модель с алгоритмом усвоения показывает хорошее воспроизведение температуры поверхности океана. По результатам численных экспериментов можно заключить, что в экваториальной области температура поверхности океана становится ближе к реально наблюдаемой, особенно в Атлантическом океане и Бенгальском заливе. В среднем температура поверхности океана стала ближе к наблюдаемым данным на $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. В некоторых частях Мирового океана разность расчёта с усвоением и без усвоения данных составила $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Также отметим, что поля всех гидротермодинамических параметров океана остаются согласованными. Однако, усвоение только температуры поверхности океана незначительно влияет на остальные гидродинамические характеристики Мирового океана. Для большего влияния требуется привлечение других типов данных, например профилей температуры и солёности в рассматриваемой акватории, и расчёты за больший промежуток времени.

5. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОРЯ С ВАРИАЦИОННЫМ УСВОЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ И СОЛЁНОСТИ

К настоящему времени в Институте вычислительной математики РАН им. Г. И. Марчука разработаны несколько моделей гидродинамики морей и океанов. Это приведённая выше модель Мирового океана, модель Чёрного моря (включающая акваторию Азовского моря), Балтийского моря и т. д. [60–62]. Многочисленные эксперименты показали вычислительную эффективность моделей и адекватность воспроизведения ими реальных циркуляций. Отметим важные ресурсы дальнейшего улучшения моделей: совершенствование численных алгоритмов и методов усвоения данных наблюдений. Рассмотрим в качестве примера задачу моделирования динамики Чёрного и Азовского морей с вариационным усвоением данных наблюдений. Модель морской динамики основана на системе примитивных уравнений, записанных в сферической системе координат в приближениях гидростатики и Буссинеска [1]. Это уравнения вида (11) в σ -системе координат, где $\sigma = (z - \zeta)/(H - \zeta)$, z — обычная вертикальная координата, H — глубина моря, ζ — отклонение уровня моря от невозмущённого состояния. Уравнения решаются с помощью метода расщепления.

Опишем подсистему четырёхмерного вариационного усвоения полей температуры и солёно-

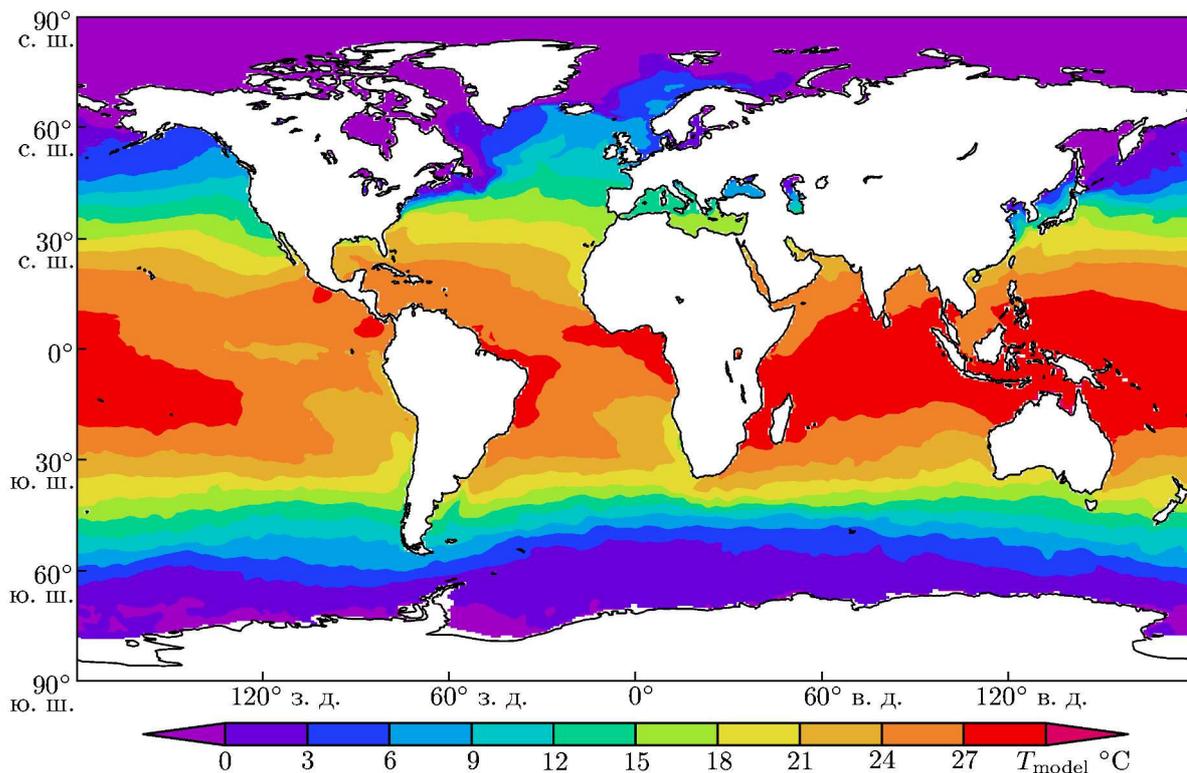


Рис. 1. Расчёт без блока усвоения, январь 2004 года

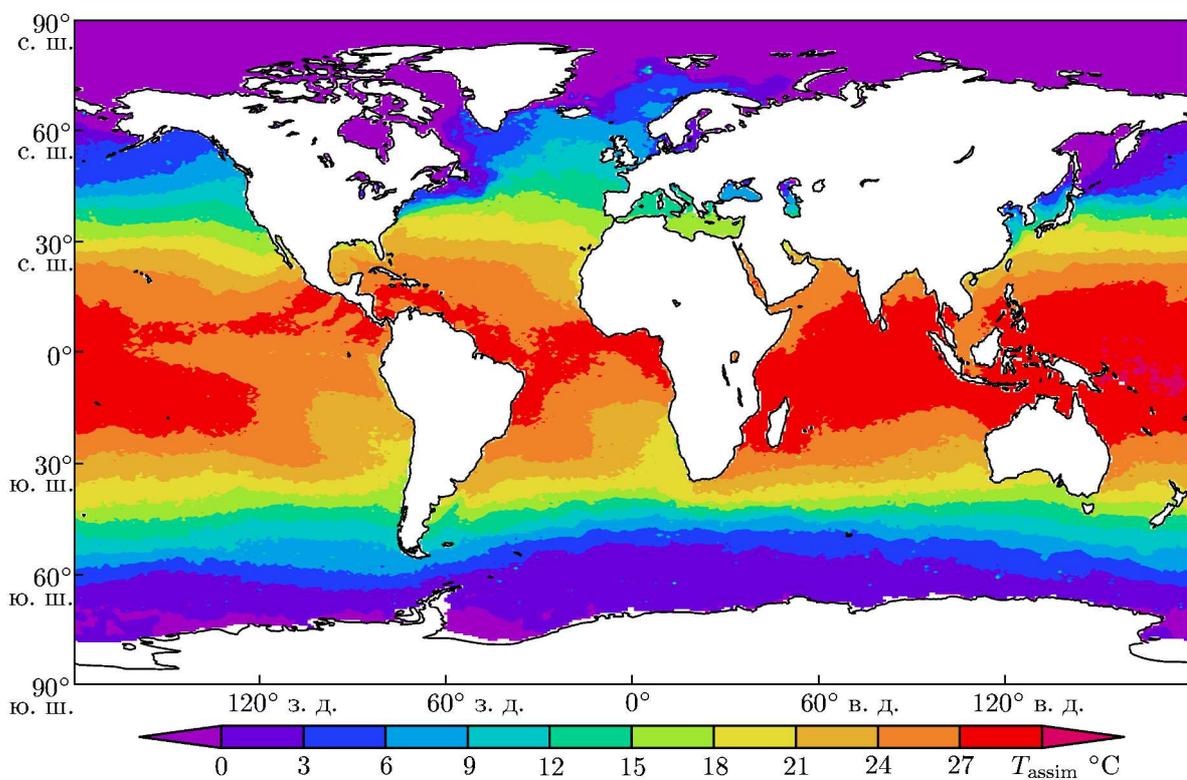


Рис. 2. Расчёт с блоком усвоения, январь 2004 года

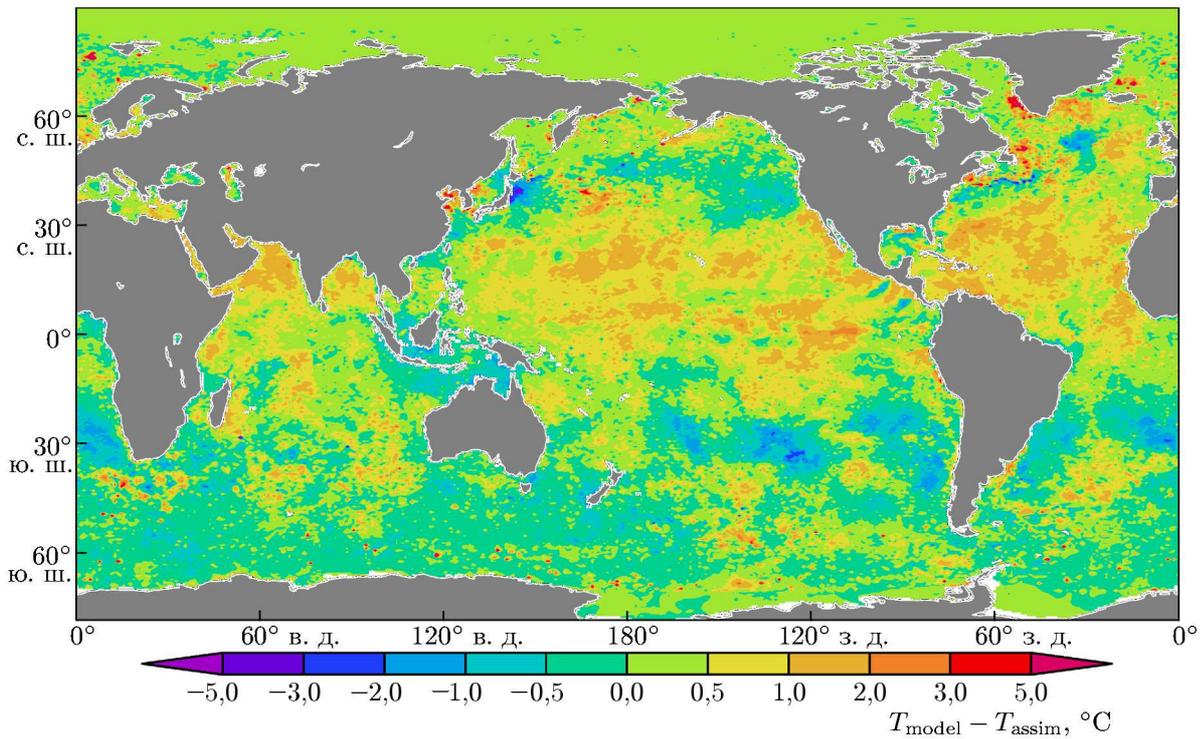


Рис. 3. Разность в температурах поверхности океана при расчёте с помощью модели без блока усвоения и с блоком усвоения, январь 2004 года

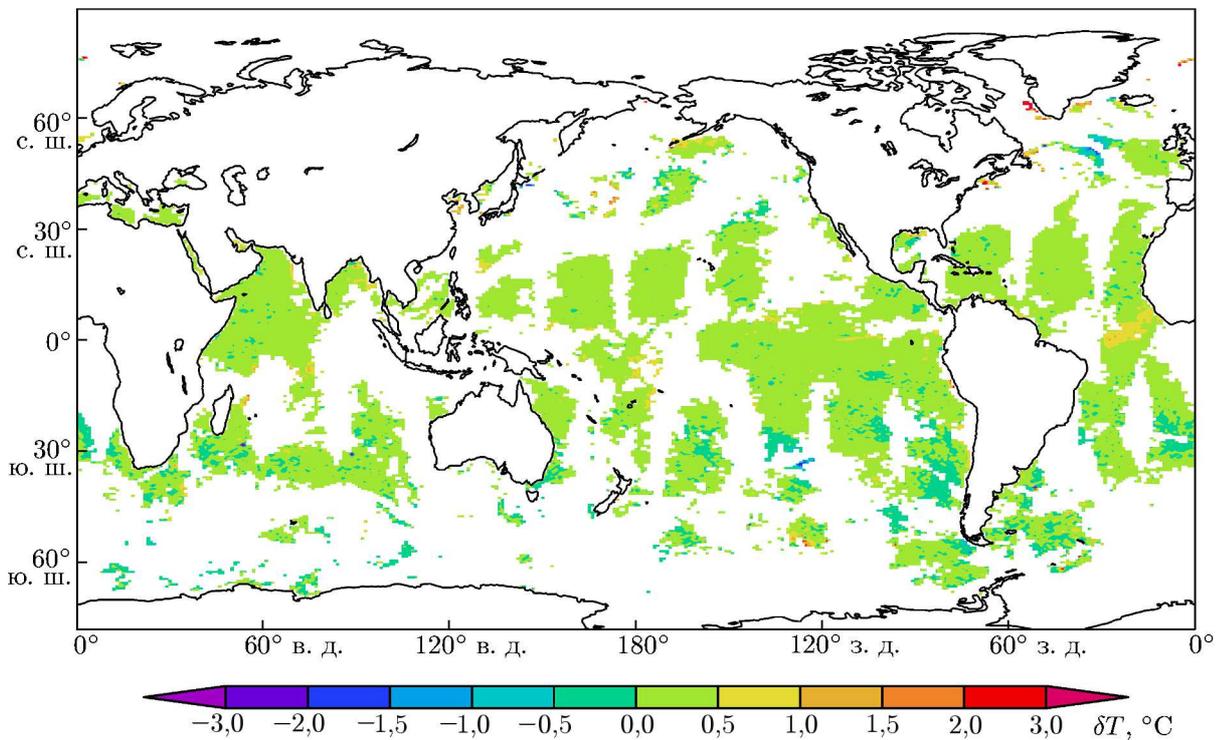


Рис. 4. Отклонение температуры δT , рассчитанной с блоком усвоения, от данных наблюдений (усреднение за 20 час), январь 2004 года

сти. В качестве прямых уравнений используем уравнения переноса/диффузии температуры и солёности. Для простоты предположим, что поле течений — все компоненты вектора скорости — известны. Существенной проблемой, возникающей при построении морских прогнозов, является задание начального условия для всех прогностических функций в определённый момент времени. Таких данных наблюдений для всей акватории Чёрного моря нет. Возникает задача построения начальных полей на основе комбинации измерений и модельных расчётов. В качестве наблюдений используем среднемесячные климатические оценки полей температуры и солёности. Процедуру четырёхмерного вариационного усвоения определим для подсистемы переноса/диффузии температуры и солёности, линеаризованной на расчётной модельной траектории.

При дальнейшем описании системы будем использовать следующие обозначения: $\lambda \equiv x$, $\theta \equiv y$. Пусть уравнения переноса/диффузии записаны в σ -системе координат, а компоненты вектора скорости $u(x, y, \sigma, t)$, $u_2(x, y, \sigma, t)$, $\omega(x, y, \sigma, t)$ и коэффициенты турбулентного обмена μ_T , μ_S , ν — известные функции. Пусть также $\Omega(x, y, z)$, $\text{mes}(\Omega)$ — трёхмерная область и объём Чёрного моря соответственно; $\Omega_0(x, y) = \Omega(x, y, 0)$, $\text{mes}(\Omega_0)$ — двумерная поверхность моря и её площадь соответственно; $(0, \bar{t})$ — интервал ассимиляции; $T(x, y, z, t)$, $S(x, y, z, t)$ — потенциальная температура и солёность; $\rho_{\text{pot}} = \rho_{\text{pot}}(T, S)$ — потенциальная плотность; $Q_T(x, y, t)$, $Q_S(x, y, t)$ — потоки тепла и соли на поверхности моря; \hat{T} , \hat{S} — данные наблюдений; T^0 , S^0 — значения соответствующих функций в начальный момент времени $t = 0$. Предположим, что полная информация о начальных полях температуры и солёности отсутствует, но известна их некоторая текущая оценка \hat{T}^0 , \hat{S}^0 . Сформулируем следующую вариационную задачу. Найти минимум функционала

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2\text{mes}(\Omega)\bar{t}} \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} \left[\alpha_T (T - \hat{T})^2 + \alpha_S (S - \hat{S})^2 \right] dt d\Omega + \\
 & + \frac{1}{2\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} \left[\alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0)^2 + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0)^2 \right] d\Omega + \\
 & + \frac{1}{2\text{mes}(\Omega_0)\bar{t}} \int_{\Omega_0} \int_0^{\bar{t}} \left[\beta_T (Q_T - \hat{Q}_T)^2 + \beta_S (Q_S - \hat{Q}_S)^2 \right] dt d\Omega_0 \quad (15)
 \end{aligned}$$

на множестве решений следующей системы уравнений:

$$\rho - \rho_{\text{pot}}(T, S) = 0; \quad (16)$$

$$0 < \sigma < 1 : \nu - \nu \left(\frac{\partial \rho_{\text{pot}}}{\partial \sigma} \right) = 0; \quad (17)$$

$$H \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T) + \omega \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + N_{x,y} T = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} T; \quad (18)$$

$$H \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S) + \omega \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] + N_{x,y} S = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial S}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} S; \quad (19)$$

$$\sigma = 0 : \frac{\nu}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = -Q_T^0, \quad \frac{\nu}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = -Q_S^0; \quad (20)$$

$$\frac{\mu_T}{r_x r_x} (Z_x T_\sigma - Z_\sigma T_x) Z_x + \frac{\mu_T}{r_y r_y} (Z_y T_\sigma - Z_\sigma T_y) Z_y + \nu \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0;$$

$$\sigma = 1 : \frac{\mu_S}{r_x r_x} (Z_x S_\sigma - Z_\sigma S_x) Z_x + \frac{\mu_S}{r_y r_y} (Z_y S_\sigma - Z_\sigma S_y) Z_y + \nu \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$N_{x,y}a = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (Hu_1 r_y a) + \frac{Hu_1}{r_x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (Hu_2 r_x a) + \frac{Hu_2}{r_y} \frac{\partial a}{\partial y} \right],$$

$$\Lambda_{x,y,\sigma} = \Lambda_{x,x} + \Lambda_{y,y} + \Lambda_{x,\sigma} + \Lambda_{y,\sigma},$$

$N_{x,y}$, $\Lambda_{x,y,\sigma}$ — операторы, описывающие горизонтальную адвекцию и боковой турбулентный обмен, $\alpha_T, \alpha_S, \alpha_T^0, \alpha_S^0, \beta_T, \beta_S$ — заданные весовые функции, $\nu_T = \nu_S = \nu$, H — глубина моря.

Решение задачи вариационной ассимиляции сводим к решению системы оптимальности, построенной из необходимого условия экстремума функционала (15). Система оптимальности включает уравнения прямой модели (16)–(21) и систему сопряжённых уравнений. Система сопряжённых уравнений и граничных условий имеет вид

$$-H \frac{\partial S^*}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega S^*) + \omega \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_S (S - \hat{S}) - N_{x,y} S^* = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} S^* + \frac{\partial \rho}{\partial S} \rho^*; \quad (22)$$

$$-H \frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega T^*) + \omega \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} \right] + \alpha_T (T - \hat{T}) - N_{x,y} T^* = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} + \Lambda_{x,y,\sigma} T^* + \frac{\partial \rho}{\partial T} \rho^*; \quad (23)$$

$$\nu^* - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial S}{\partial \sigma} \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} \right) = 0; \quad (24)$$

$$\rho^* - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\nu' \nu^*) = 0; \quad (25)$$

$$\sigma = 0 : \nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0, \quad -T^* + \beta_T (Q_T - \hat{Q}_T) = 0;$$

$$\sigma = 0 : \nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} = 0, \quad -S^* + \beta_S (Q_S - \hat{Q}_S) = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\mu_T}{r_x r_x} (Z_x T_\sigma^* - Z_\sigma T_x^*) Z_x + \frac{\mu_T}{r_y r_y} (Z_y T_\sigma^* - Z_\sigma T_y^*) Z_y + \nu \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0;$$

$$\sigma = 1 : \frac{\mu_S}{r_x r_x} (Z_x S_\sigma^* - Z_\sigma S_x^*) Z_x + \frac{\mu_S}{r_y r_y} (Z_y S_\sigma^* - Z_\sigma S_y^*) Z_y + \nu \frac{\partial S^*}{\partial \sigma} = 0. \quad (27)$$

Здесь $\nu' \equiv d\nu(\eta)/d\eta$ — производная по аргументу $\eta = \partial \rho_{\text{pot}} / \partial \sigma$, $r_x = R \sin y$, $r_y = R$, $r_z = 1$, $Z = (H - \zeta)\sigma + \zeta$, $Z_x \equiv \partial Z / \partial x \approx \sigma \partial H / \partial x$, $Z_y \equiv \partial Z / \partial y \approx \sigma \partial H / \partial y$, $Z_\sigma \equiv \partial Z / \partial \sigma \approx H$.

Краевые условия по времени для уравнений (16)–(27) имеют вид

$$T^* = S^* = 0, \quad \text{при } t = \bar{t};$$

$$T^* + \alpha_T^0 (T^0 - \hat{T}^0) = 0, \quad -HS^* + \alpha_S^0 (S^0 - \hat{S}^0) = 0, \quad \text{при } t = 0 : -H. \quad (28)$$

Итак, решение задачи вариационной ассимиляции заключается в нахождении таких T, S, T^0, S^0, Q_T, Q_S , при которых выполняются уравнения оптимальности (16)–(28) и достигается минимум функционала (15).

Сформулированную дифференциальную задачу аппроксимируем конечно-разностной схемой по трём пространственным координатам x, y, σ и неявно по времени t . Полученную систему дискретных уравнений можно решить итерационным методом, например с помощью одной из известных стандартных процедур типа градиентного спуска.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧЁРНОГО МОРЯ

Отметим некоторые известные гидрологические характеристики Чёрного моря. Для этого моря характерна высокая средняя температура воды (8,9 °C). Зимой наибольшие изменения про-

исходят в мелководном северо-западном районе, где температура может варьироваться в широких пределах (от 1 °С до 7 °С). Летом происходит хороший прогрев поверхностного слоя воды в среднем до 25÷26 °С. Температура повышается с северо-запада на юго-восток, летом это увеличение происходит плавнее, чем зимой. Средняя солёность вод Чёрного моря достаточно больша́я (в среднем 18 ПЕС), однако она почти в 2 раза меньше средней солёности вод Мирового океана. Распределение солёности по бассейну характеризуется небольшим увеличением с северо-запада на юго-восток. Опреснение у Керченского пролива и у восточного берега Крыма вызвано затеканием в этот район менее солёных вод Азовского моря (средняя солёность 11 ПЕС). В схеме течений Чёрного моря выделяется циклоническое течение, которое опоясывает всю его акваторию вблизи берегов. Внутри акватории находятся 2 циклонических круговорота, названные именем Книповича (гидролога, первым описавшего эти течения). Это движение вызвано в основном кориолисовой силой, однако направление и сила ветра в акватории играют существенную роль и приводят к изменению общего течения, внося в него неустойчивость.

С физической точки зрения особенность динамики Чёрного моря связана с его большой глубиной и относительно небольшим горизонтальным размером. Глубина открытой части Чёрного моря составляет около 2 км, а горизонтальный размер — порядка 1 000 км. Радиус Россби, описывающий характерный масштаб вихрей, в Чёрном море достаточно велик — около 20÷30 км. Это позволяет описать вихревую изменчивость динамики с помощью рассматриваемой численной модели. Расчётная область включает акваторию Чёрного и Азовского морей с шагом сетки 4 км по долготе и широте. По вертикали задаётся 40 уровней со сгущением у поверхности, шаг по времени 5 мин. Для задания атмосферного воздействия используются данные ERA-Interim [63]. Подробное описание численной модели, алгоритма четырёхмерного вариационного усвоения данных наблюдений и сведения о результатах численных расчётов приведены в работе [62]. Главной особенностью численного алгоритма решения системы оптимальности является то, что он основан на неявной схеме расщепления по трём геометрическим координатам.

Целью проведения представленных ниже численных экспериментов в акваториях Чёрного и Азовского морей являлось определение начальных условий для численного прогноза состояния рассматриваемой акватории, а также изучении влияния физических факторов на формирование особенностей циркуляции Чёрного моря.

Расчёты динамики Чёрного моря проводились в режиме «вариационная инициализация—прогноз» на период 1÷2 года по следующему алгоритму.

В момент времени $t = t_0$ (в начале каждого месяца) задаются исходные начальные условия: $u_1(t_0, x, y, \sigma)$, $u_2(t_0, x, y, \sigma)$, $\zeta(t_0, x, y)$, $T(t_0, x, y, \sigma)$, $S(t_0, x, y, \sigma)$.

На интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ решается полная система уравнений типа (11) с начальными условиями $u_1(t_0, x, y, \sigma)$, $u_2(t_0, x, y, \sigma)$, $\zeta(t_0, x, y)$, $T(t_0, x, y, \sigma)$, $S(t_0, x, y, \sigma)$; вычисляются компоненты вектора скорости $u_1(t, x, y, \sigma)$, $u_2(t, x, y, \sigma)$, $\omega(t, x, y, \sigma)$, а также коэффициенты вертикального турбулентного обмена $\nu(x, y, \sigma, t)$.

На интервале ассимиляции $t_0 \leq t \leq t_1$ решается задача вариационной минимизации функционала J (15), описываемая системой оптимальности (16)–(28). В результате находятся оптимальные начальные условия $T_{\text{opt}}(t_0, x, y, \sigma)$, $S_{\text{opt}}(t_0, x, y, \sigma)$.

Вычисленные оптимальные начальные условия для температуры и солёности заменяют исходные условия $T(t_0, x, y, \sigma)$, $S(t_0, x, y, \sigma)$. Проводится расчёт полной модельной системы уравнений (11) с новыми начальными условиями при $t = t_0$: $u_1(t_0, x, y, \sigma)$, $u_2(t_0, x, y, \sigma)$, $\zeta(t_0, x, y)$, $T_{\text{opt}}(t_0, x, y, \sigma)$, $S_{\text{opt}}(t_0, x, y, \sigma)$ на месяц в режиме прогноза.

Основная цель описываемых ниже вычислительных экспериментов состояла в изучении влияния физических факторов на формирование особенностей циркуляции Чёрного моря. В частности, влияния глобальных и локальных термохалинных эффектов на формирование крупномас-

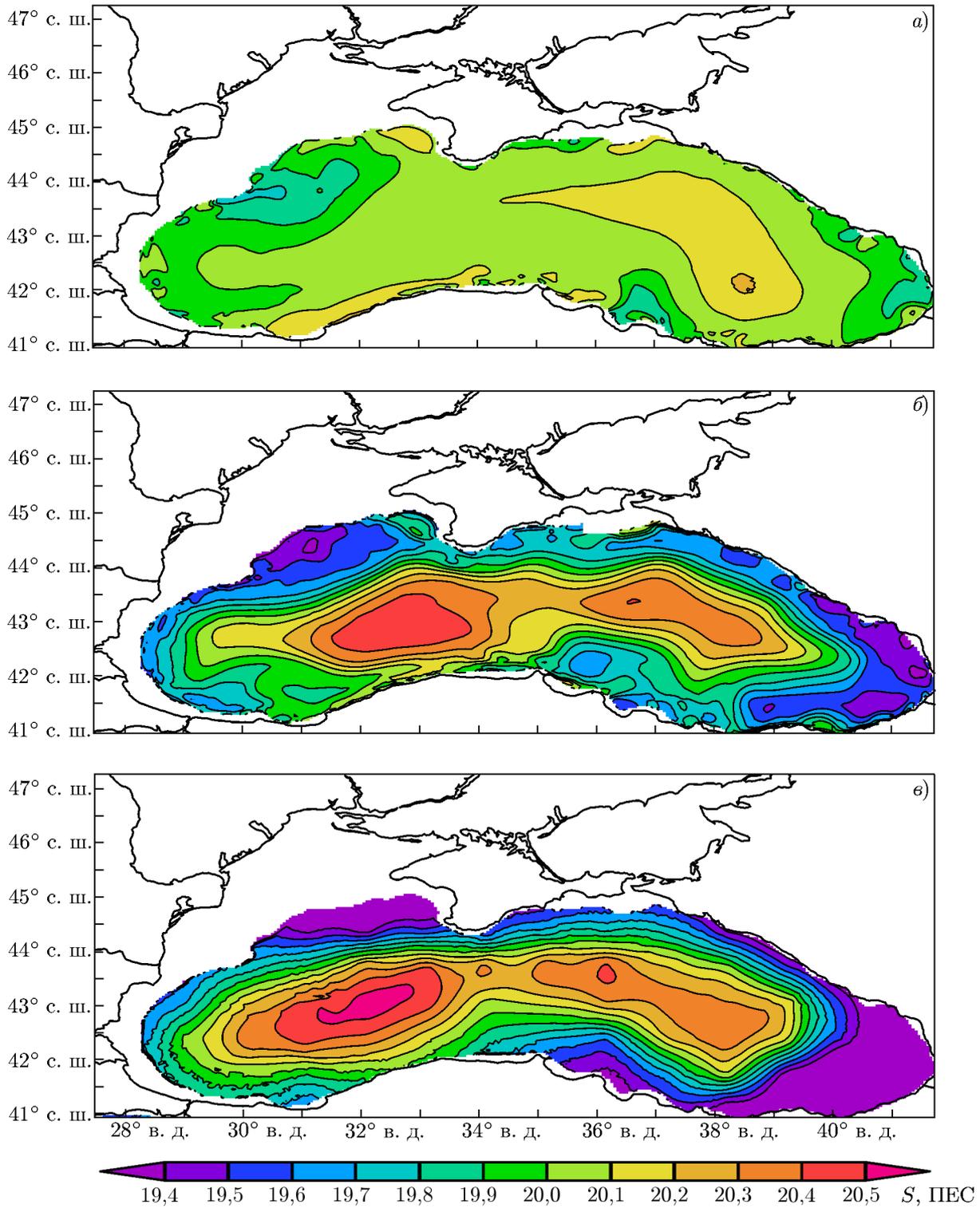


Рис. 5. Среднемесячная солёность на глубине 100 м за июль 2008 года: расчёт без ассимиляции (а), расчёт с ассимиляцией T и S (б), данные наблюдений (в)

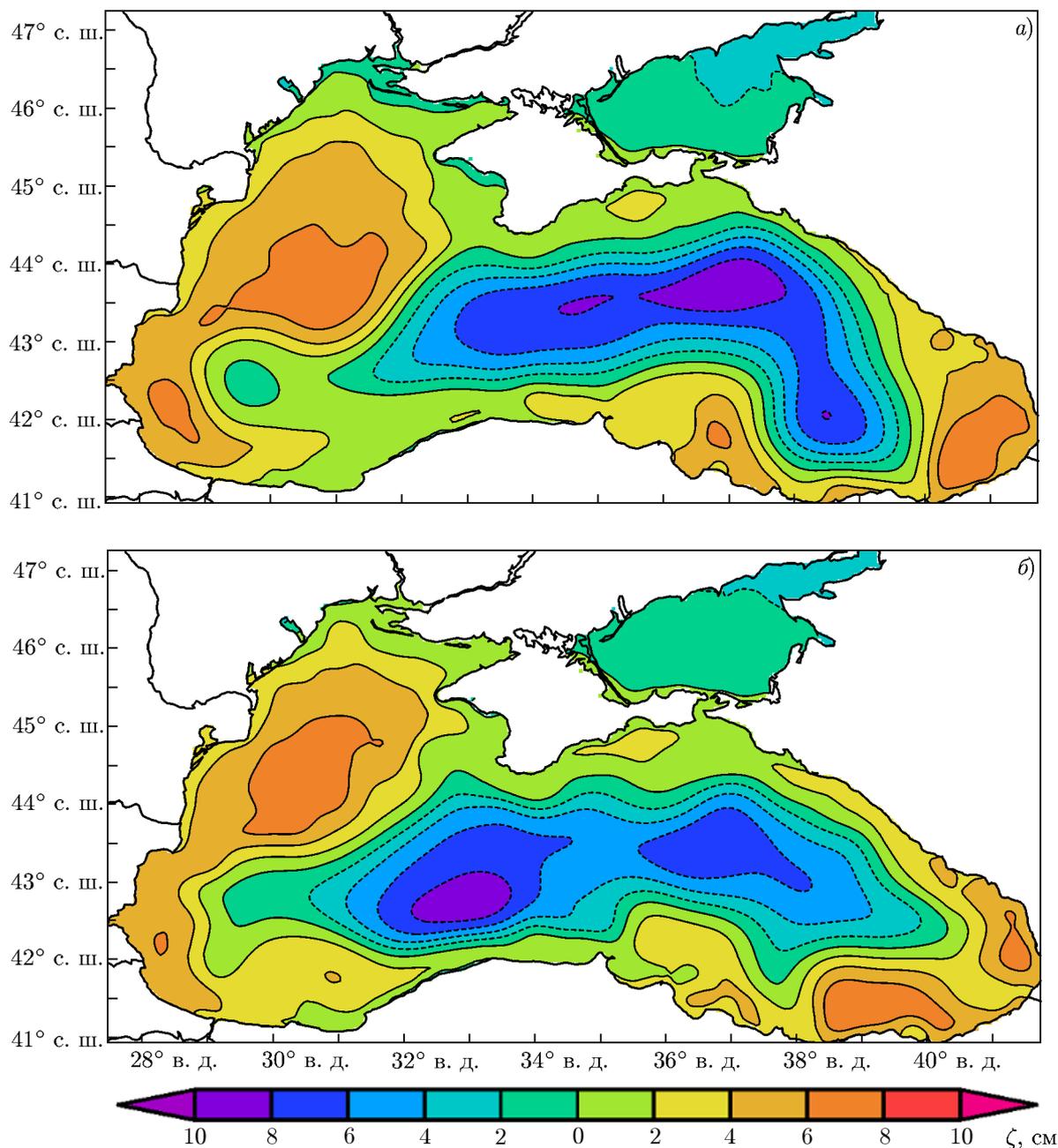


Рис. 6. Среднемесячное отклонение уровня моря за июль 2008 года: расчёт без ассимиляции (*a*) и расчёт с ассимиляцией T , S (*б*)

штабной циркуляции; роли солёности в мезомасштабной изменчивости; проявления эффектов от усвоения температуры и солёности в воспроизведении уровня моря. Структура расчётов следующая. Предварительный расчёт («разгон») модели был проведён без ассимиляции данных наблюдений на срок 1 год: с 01.01.2007 по 31.12.2007. Затем было выполнено несколько расчётов на 1 год с 01.01.2008 по 31.12.2008 с различными данными наблюдений. Первым был контрольный вариант без усвоения наблюдений — продолжение предварительного расчёта, остальные проведены в режиме «вариационная инициализация—прогноз». В качестве усваиваемых данных использовались среднемесячные поля температуры и солёности для всего бассейна, только поле солёности для

всего бассейна, температуры и солёности для юго-восточной подобласти моря. Выделим несколько интересных особенностей полученных результатов.

Режим «инициализация—прогноз» характеризуется более высоким уровнем кинетической энергии по сравнению с обычным расчётом без ассимиляции данных. В эксперименте с ассимиляцией T , S заметно выделяется спокойный летний период с июня по сентябрь. Он связан с наблюдаемым в природе ослаблением интенсивности атмосферного воздействия над черноморским регионом в это время. В модели с усвоением среднемесячных полей температуры и солёности заметно проявляется климатический сигнал и результаты расчётов существенно ближе к данным наблюдений (рис. 5). Разность средне-июльской температуры между расчётом без усвоения и с усвоением составляет около $2 \div 3$ °С (в средней части черноморского бассейна и у российского берега). На уровне 100 м наибольшая разность температур наблюдается в северо-восточной части Чёрного моря у побережья Болгарии, где она равна примерно $0,50 \div 0,75$ °С. В поле солёности на глубинах 10 м наибольшая разность 0,5 ПЕС видна в открытом море и в северной части у российского берега. В целом расчёт модели в режиме «вариационная инициализация—прогноз» показывает адекватность воспроизведения крупномасштабных полей Чёрного моря. По сравнению с расчётом без усвоения улучшается описание вертикальной структуры солёности (рис. 5), и как следствие, воспроизведение холодного промежуточного слоя.

Во всех расчётах проявляется циклонический характер циркуляции, охватывающий всю центральную часть моря. Это основное черноморское течение, наблюдаемое в течение всего года. Наиболее интенсивно оно в зимний период; летом его скорости уменьшаются, а в юго-восточной части моря возникают вихри у берегов Грузии и России.

Выделим три ярких обстоятельства. Первое — это усиление градиентности поля уровня и увеличение безвихревых течений при усвоении данных наблюдений (рис. 6). Второе — относительно небольшое отличие между расчётами с усвоением полей температуры и солёности и только солёности. Это говорит о том, что солёность вносит весьма значительный вклад в формирование крупномасштабной изменчивости уровня Чёрного моря. Третье — отчётливое воспроизведение вихрей в юго-восточной части моря при усвоении данных наблюдений в летний период. Это под-область, характеризующаяся значительной перестройкой динамики летом, изменением основного черноморского течения, формированием локальных вихрей. Эксперимент показывает, что динамика указанной подобласти особо чувствительна к усваиваемым данным наблюдений.

Следует отметить, что модель удовлетворительно воспроизводит крупномасштабную гидродинамику Чёрного моря. Отклонение прогноза без ассимиляции от данных наблюдений в основной области составляет чуть более 1 °С, в северо-западной части градиент температуры воспроизведён реалистично; расчёт с ассимиляцией примерно на 0,5 °С улучшает результат прогноза.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен обзор методов ассимиляции данных, разработанных в последние десятилетия. Основное внимание уделено методам вариационной ассимиляции данных наблюдений, разработкой которых занимаются в Институте вычислительной математики им. Г. И. Марчука. Рассмотрена методика построения численной реализации алгоритма вариационной ассимиляции данных и приведены результаты численных экспериментов с применением данной методологии.

Проблемам моделирования состояния Мирового океана и его акваторий посвящена работа крупных научных центров по всему миру. В каждом из центров разрабатываются и внедряются в системы прогнозирования различные алгоритмы усвоения данных. Упомянем некоторые из таких систем. Например, прогностическая система ассимиляции (усвоения) океана (FOAM) в Ве-

ликобритании. В ней используется модель NEMO (Ядро для европейского моделирования океана) и модель морского льда с вариационным усвоением и использованием схемы 3D-VAR (трёхмерное вариационное усвоение). В национальных центрах США по прогнозированию окружающей среды (NCEP) внедрена система прогнозирования океана в реальном времени с использованием методологии усвоения многомерных данных. В японском метеорологическом научно-исследовательском институте разработана многовариантная система оценки океана с многомерным усвоением данных на основе 3D-VAR. Среди систем моделирования и прогнозирования состояния морской среды в применении к акватории Чёрного моря выделим систему, разработанную консорциумом нескольких стран (Болгария, Германия, Турция, Франция). Она включает в себя трёхмерное вариационное усвоение данных наблюдений и используется для прогноза состояния морской среды на 10 суток. В Морском гидрофизическом институте (МГИ) РАН в режиме оперативного прогноза работает система расчёта состояния и экологии Чёрного моря. Спутниковая информация в этой системе усваивается с помощью метода оптимальной интерполяции.

Таким образом, данное исследование является актуальным, и результаты, получаемые в ИВМ РАН, сопоставимы с мировыми исследованиями в области вариационного усвоения данных наблюдений. Далее опишем те особенности моделирования с использованием усвоения данных, которые были выявлены в ходе численных экспериментов.

В целом модель с алгоритмом усвоения для моделирования гидротермодинамики Мирового океана показывает хорошее воспроизведение температуры его поверхности. Итерационные процедуры, использованные для четырёхмерного вариационного усвоения температуры поверхности моря в акватории Мирового океана, показали хорошую сходимость, и для получения оптимального потока Q требовалось не более 10÷15 итераций. В некоторых экспериментах параметр итерационного процесса может быть вычислен исходя из особенностей самой системы, и в этом случае можно добиться сходимости процесса за 3÷5 итераций.

По результатам численных экспериментов можно заключить, что в экваториальной области температура поверхности океана становится ближе к реально наблюдаемой, особенно в Атлантическом океане и Бенгальском заливе. Также отметим, что поля всех гидротермодинамических параметров океана остаются согласованными. Однако усвоение только температуры поверхности Мирового океана незначительно влияет на его остальные гидродинамические характеристики. Для большего влияния требуется привлечение других типов данных, например профилей температуры и солёности в рассматриваемой акватории, и расчёты за больший промежуток времени.

Также в работе представлена численная модель гидродинамики Чёрного и Азовского морей с шагом сетки 4 км по долготе и широте и 40 уровнями по вертикали. Она включает модули четырёхмерной вариационной ассимиляции полей температуры и солёности. Проведены расчёты течений, уровня моря, температуры и солёности при заданном атмосферном воздействии за 2007–2008 годы. Расчёты показывают адекватность воспроизведения гидродинамических характеристик Чёрного моря.

Были проведены расчёты циркуляции Чёрного и Азовского морей с различными вариантами ассимиляции трёхмерных полей температуры и солёности. При ассимиляции данных модельные поля приближаются к данным наблюдений, улучшается воспроизведение поля течений, вертикальной структуры солёности, холодного промежуточного слоя. Отметим, что усвоение полей температуры и солёности вызывает заметные изменения уровня моря. В летний период более отчётливо воспроизводятся, в частности, мезомасштабные вихри в юго-восточной части Чёрного моря.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20–11–20057, разделы 2, 3, 4; проект 18–11–00163, разделы 5, 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дымников В. П., Залесный В. Б. Основы вычислительной геофизической гидродинамики. М. : ГЕОС, 2019. 448 с.
2. Lions J. L. Controle optimal des systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Paris : Dunod, 1968. 432 p.
3. Marchuk G. I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht : Springer, 1995. 474 p.
4. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. Practical Optimization. London : Academic Press, 1997. 401 p.
5. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М. : ИВМ РАН, 2003. 240 с.
6. Bennett A. F. Inverse modeling of the ocean and atmosphere. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. 236 p.
7. Daley R. Atmospheric Data Analysis. Cambridge : Cambridge University Press, 1991. 457 p.
8. Ghil M., Malanotte-Rizzoli P. // Adv. Geophys. 1991. V.33. P.141–266. [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60442-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60442-2)
9. Kalnay E. Atmospheric Modeling. Data Assimilation and Predictability. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. 341 p.
10. Panofsky H. // J. Appl. Meteor. 1949. V.6, No. 6. P.386–392. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1949\)006<0386:OWMA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1949)006<0386:OWMA>2.0.CO;2)
11. Gilchrist B., Cressman G. // Tellus. 1954. V.6, No. 4. P.309–318. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v6i4.8762>
12. Bergthorsson P., Doos B. // Tellus. 1955. V.7, No. 3. P.329–340. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v7i3.8902>
13. Cressman G. // Mon. Weath. Rev. 1959. V.87, No. 10. P.367–374. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1959\)087<0367:AOOAS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1959)087<0367:AOOAS>2.0.CO;2)
14. Гандин Л. С. Объективный анализ гидрометеорологических полей. Л. : Гидрометиздат, 1963. 286 с.
15. Lorenc A. C. // Mon. Weath. Rev. 1981. V.109, No. 4. P.701–721. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1981\)109<0701:AGTDM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1981)109<0701:AGTDM>2.0.CO;2)
16. Lorenc A. C. // Quart. J. R. Meteorol. Soc. 1986. V.112, No. 474. P.1177–1194. <https://doi.org/10.1002/qj.49711247414>
17. Douville H., Viterbo P., Mahfouf J.-F., Beljaars A. // Mon. Weath. Rev. 2000. V.128, No. 6. P.1733–1756. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2000\)128<1733:EOTOIA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2000)128<1733:EOTOIA>2.0.CO;2)
18. Cummings J. A. // Quart. J. R. Meteorol. Soc. 2005. V.131, No. 613. P.3583–3604. <https://doi.org/10.1256/qj.05.105>
19. Evensen G. // Ocean Dynamics. 2003. V.53, No. 4. P.343–367. <https://doi.org/10.1007/s10236-003-0036-9>
20. Sakov P., Sandery P. A. // Ocean Modelling. 2015. V.89. P.45–60. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2015.02.003>
21. Кауркин М. Н., Ибраев Р. А., Беляев К. П. // Океанология. 2016. Т. 56, № 6. С. 252–260.
22. Kalman R. E., Bucy R. S. // J. Basic. Eng. 1961. V. 83, No. 1. P.95–108. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2015.02.003>
23. Jazwinski A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory. London : Academic Press, 1970. 376 p.
24. Ghil M., Cohn S. E., Dalcher A. // The Interaction Between Objective Analysis and Initialization. Publ. Meteorol. 127 (Proc. 14th Stanstead Seminar) / ed. by D. Williamson. Montreal : McGill University, 1982. P. 83–97.

25. Evensen G. *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter*. Berlin : Springer. 2009. 307 p.
26. Саркисян А. С., Демьшев С. Г., Коротаев Г. К., Моисеенко В. А. // *Итоги науки и техники. Атмосфера, океан, космос — программа «Разрезы»*, Т. 6. М. : ВИНТИ, 1986. С. 88–89.
27. Кныш В. В., Коротаев Г. К., Мизюк А. И., Саркисян А. С. // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48, No. 1. С. 67–85.
28. Sasaki Y. // *Mon. Weath. Rev.* 1970. V. 98. P. 875–883. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1970\)098<0875:SBFINV>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1970)098<0875:SBFINV>2.3.CO;2)
29. Provost C., Salmon R. // *J. Mar. Res.* 1986. V. 44, No. 1. P. 1–34. <https://doi.org/10.1357/002224086788460175>
30. Parrish D. F., Derber J. C. // *Mon. Weath. Rev.* 1992. V. 120, No. 8. P. 1747–1763. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1992\)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1992)120<1747:TNMCSS>2.0.CO;2)
31. Courtier P., Andersson E., Heckley W., et al. // *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* 1998. V. 124, No. 550. P. 1783–1807. <https://doi.org/10.1002/qj.49712455002>
32. Courtier P., Thepaut J. N., Hollingsworth A. // *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* 1994. V. 120, No. 519. P. 1389–1408. <https://doi.org/10.1002/qj.49712051912>
33. Пененко В. В., Образцов Н. В. // *Метеорология и гидрология*. 1976. Т. 11, № 1. С. 1–11.
34. Marchuk G. I., Penenko V. V. // *Modelling and Optimization of Complex Systems: Proc. Of the IFIP-TC7 Working conf.* / ed. by G. I. Marchuk. New York : Springer, 1979. P. 240–252.
35. Le Dimet F.-X., Talagrand O. // *Tellus*. 1986. V. 38A, No. 2. P. 97–110. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v38i2.11706>
36. Lewis J. M., Derber J. C. // *Tellus*. 1985. V. 37A, No. 4. P. 309–322. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.1985.tb00430.x>
37. Navon I. M. // *Variational Methods in Geosciences*. V. 5. /ed. by Y. K. Sasaki. New York : Elsevier, 1986. P. 29–34. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-42697-0.50009-6>
38. Agoshkov V. I., Marchuk G. I. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 1993. V. 8, No. 1. P. 1–16. <https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.1.1>
39. Marchuk G. I., Zalesny V. B. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 1993. V. 8, No. 4. P. 311–326. <https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.4.311>
40. Marchuk G. I., Shutyaev V. P. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 1994. V. 9, No. 3. P. 265–279. <https://doi.org/10.1515/rnam.1994.9.3.265>
41. Agoshkov V. I., Parmuzin E. I., Zalesny V. B., et al. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2015. V. 30, No. 4. P. 203–212. <https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0018>
42. Agoshkov V. I., Assovskii M., Zalesny V. B., et al. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2015. V. 30, No. 3. P. 129–142. <https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0013>
43. Шутяев В. П. *Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных*. М. : Наука, 2001. 239 с.
44. Агошков В. И., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. // *Журн. выч. мат. и мат. физ.* 2008. Т. 48, № 8. С. 1371–1391.
45. Ide K., Courtier P., Ghil M., Lorenc A. C. // *J. Met. Soc. Japan*. 1997. V. 75, No. 1B. P. 181–189. https://doi.org/10.2151/jmsj1965.75.1B_181
46. Mogensen K., Balmaseda M. A., Weaver A. T., et al. *NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model*, ECMWF Technical Memorandum, 2009. No. 120. 8 p.
47. Евтушенко Ю. Г., Засухина Е. С., Зубов В. И. // *Журн. выч. мат. и мат. физ.* 1997. Т. 2, № 12. С. 1449–1458.
48. Агошков В. И., Ипатова В. М. // *Дифф. уравнения*. 2007. Т. 43, № 8. С. 1064–1075.
49. Агошков В. И., Ипатова В. М. // *Докл. АН*. 2007. Т. 412, № 2. С. 151–153.
50. Sirkes Z., Tziperman E. // *Mon. Weather Rev.* 1997. V. 125, No. 12. P. 3373–3378.

- [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1997\)125<3373:FDOAOA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1997)125<3373:FDOAOA>2.0.CO;2)
51. Parmuzin E. I., Shutyaev V. P., Diansky N. A. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V. 22, No. 2. P. 177–198. <https://doi.org/10.1515/RJNAMM.2007.009>
 52. Lawless A. S., Nichols N. K., Balloid S. P. // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 2003. V. 129, No. 589. P. 1 237–1 254. <https://doi.org/10.1256/qj.02.75>
 53. Lorenc A. // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 2003. V. 129, No. 595. P. 3 183–3 203. <https://doi.org/10.1256/qj.02.132>
 54. Fairbairn D., Pring S. R., Lorenc A. C., et. al. // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 2014. V. 140, No. 678. P. 281–294. <https://doi.org/10.1002/qj.2135>
 55. Clayton A. M., Lorenc A. C., Barker D. M. // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 2013. V. 139, No. 675. P. 1 445–1 461. <https://doi.org/10.1002/qj.2054>
 56. Bonavita M., Holm E., Isaksen L., et. al. // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 2016. V. 142, No. 691. P. 287–303. <https://doi.org/10.1002/qj.2652>
 57. Liu C., Xiao Q., Wang B. // Mon. Weath. Rev. 2008. V. 136, No. 9. P. 3 363–3 373. <https://doi.org/10.1175/2008MWR2312.1>
 58. Desroziers G., Camino J.-T., Berre L. // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 2014. V. 140, No. 684. P. 2 097–2 110. <https://doi.org/10.1002/qj.2325>
 59. Zakharova N. B. // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 459, No. 4. Art. no. 042007. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/459/4/042007>
 60. Zalesny V. B., Zakharova N. B., Gusev A. V. // Russ. J. Numer. Anal. Math. 2011. V. 26, No. 2. P. 209–229. <https://doi.org/10.1515/RJNAMM.2011.012>
 61. Марчук Г. И., Залесный В. Б. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 1. С. 21–36.
 62. Залесный В. Б., Гусев А. В., Мошонкин С. Н. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49, № 6. С. 699–716.
 63. http://data-portal.ecmwf.int/data/d/interim_daily/

Поступила в редакцию 28 мая 2020 г.; принята в печать 28 октября 2020 г.

VARIATIONAL DATA ASSIMILATION METHODS IN GEOPHYSICAL HYDRODYNAMICS MODELS AND THEIR APPLICATION

E. I. Parmuzin, V. B. Zalesny, V. I. Agoshkov, and V. P. Shutyaev

We consider direct and inverse problems of geophysical hydrodynamics, associated with prognosis, posterior analysis, and variational assimilation of observational data. The focus is on numerical algorithms for solving problems with incomplete information (initial and boundary conditions). Along with the classical algorithms, an approach to setting and solving these problems developed in the works of G. I. Marchuk and his scientific school is presented. The approach is based on a combination of splitting methods and adjoint equations. This leads to the construction of flexible, hierarchically developed models of complex systems with a modular structure and efficient implementation. The main part of this approach is splitting a complex nonlinear system of equations for physical processes into a number of energetically balanced subsystems. Each individual subsystem can reuse splitting into subsystems of a simpler structure. The methodology is illustrated by solving the problems of hydrodynamics of the World Ocean and the Black Sea.