

УДК 530.182

РЕКОНСТРУКЦИЯ АРХИТЕКТУРЫ СВЯЗЕЙ В АНСАМБЛЯХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ ПО ИХ СИГНАЛАМ МЕТОДАМИ ПРИЧИННОСТИ ПО ГРЕЙНДЖЕРУ И ЧАСТНОЙ НАПРАВЛЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

М. В. Корнилов^{1,2}, И. В. Сысоев^{1,2}, Д. И. Астахова^{1,2}, Д. Д. Кульминский^{1,2},
Б. П. Безручко^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2}*

¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН;

² Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

В работе решается задача детектирования связанности в ансамбле радиотехнических генераторов хаоса с запаздыванием в собственной динамике двумя распространёнными методами: методом условной причинности по Грейнджеру и методом частной направленной когерентности. Оба подхода основаны на эмпирических прогностических моделях. Тестирование оценок на значимость осуществлялось по суррогатным временным рядам, построенным методом перестановки реализаций. Были рассмотрены несколько экспериментальных временных рядов динамики всех элементов ансамбля, полученных в различных экспериментах, где генераторы были связаны в цепочку и в кольцо. Подробно рассматривалась способность методов выявлять существующие связи и не допускать ложного обнаружения опосредованных взаимодействий. Показано, что оба подхода в целом верно выявляют связанность. В то же время число пропущенных и ложных связей существенно выше, чем при использовании специализированной методики, разработанной ранее с учётом дополнительной информации о структуре узлов. Основные пропущенные связи относятся к случаю, когда ведущий генератор работает в режиме колебаний с ярко выраженной периодической составляющей. В этом случае метод причинности по Грейнджеру детектирует несуществующие опосредованные связи. Частная направленная когерентность в целом даёт большее число ложных выводов об опосредованных и непосредственных связях. При этом результаты обоих методов варьировались от эксперимента к эксперименту даже при одной и той же архитектуре связей, более существенно — для метода частной направленной когерентности.

ВВЕДЕНИЕ

Выявление наличия и направления связи между системами на основе полученных от них сигналов является актуальной задачей современной науки и находит применение в климатологии [1], медицине и физиологии [2], экономике [3] и радиофизике [4]. Дополнительную сложность представляют собой случаи, когда тестируемых на связанность систем больше двух, вследствие чего требуется различать прямое и опосредованное взаимодействие. На сегодняшний момент существует множество различных методов, позволяющих решать данную задачу: причинность по Грейнджеру [5] с её обобщёнными вариантами [6–9], энтропия переноса [10], частная направленная когерентность [11], подходы, основанные на моделировании фазовой динамики [12–14]. Имеются варианты метода причинности по Грейнджеру, адаптированные для работы в сравнительно коротком временном окне [15, 16]. Однако не существует универсального алгоритма и, зачастую, для каждой отдельной задачи приходится специальным образом настраивать используемый метод [17]. Также следует отметить, что в большинстве работ, посвящённых тестированию эффективности работы методов оценки связанности, рассматривается либо численный эксперимент, либо экспериментальные данные, как правило, нейрофизиологической природы [18]. Примеры по сопоставлению различных методов представлены, например, в работах [2, 19, 20]. Основной недостаток численного эксперимента заключается в том, что он не может воспроизвести

* kornilovmv@gmail.com

все погрешности и помехи, присущие реальному измерительному процессу. Нейрофизиологический эксперимент, как правило, имеет другой недостаток: действительная архитектура связей в системе неизвестна и результаты не с чем сравнить [21]. Поэтому особый интерес представляет сравнение работоспособности методов по данным численного и натурального радиофизического экспериментов, т. к. в нём, с одной стороны, можно заранее сконструировать проверяемую структуру связей, а с другой — будут присутствовать все погрешности и неточности измерений.

Кроме того, в последние годы был разработан целый набор подходов к реконструкции структуры связей осцилляторов по временным рядам, для которых существует дополнительная информация об уравнениях для отдельного узла: для осцилляторов Рёсслера и Лоренца [22], систем с гладкими нелинейными функциями из некоторого ограниченного набора [23], обобщённых осцилляторов Ван дер Поля [24], нейроосцилляторов [25], фазовых осцилляторов [26]. Для систем с запаздыванием такие результаты были получены в работах [4, 27]. Подобные подходы требуют большей информации об объекте исследования, как правило, об уравнениях (структуре модели) для отдельных узлов и о типе/способе внесения связей, и следовательно, они должны быть более специфичны и чувствительны, чем общие подходы, например причинность по Грейнджеру.

В данной работе рассматриваются два наиболее популярных способа детектирования связанности между системами по их сигналам, основанные на построении эмпирических прогностических моделей. Первый подход — метод нелинейной условной причинности по Грейнджеру [6], представляющий собой обобщение классического метода причинности по Грейнджеру [5] с использованием полиномов общего вида. Из-за ограничений на число коэффициентов модели использование данного подхода для больших ансамблей напрямую затруднительно. Поэтому далее будут рассматриваться группы по три осциллятора и тестирование связей на прямые/опосредованные будет осуществляться по отдельности в каждой из таких групп, как было предложено в работе [28]. Второй подход — расчёт частной направленной когерентности [11]. Эта методика теоретически позволяет детектировать все связи в ансамбле из произвольного числа элементов и различать прямые и опосредованные взаимодействия, но работает только для линейных связей. Исследование её эффективности в численном эксперименте было проведено нами в работе [29].

Оба подхода применяются к экспериментально измеренным временным рядам 10 радиотехнических генераторов с запаздыванием (детали и параметры экспериментальной установки можно найти в работе [4]). Цель данной работы — на основе анализа чувствительности и специфичности рассмотренных подходов выявить возможные трудности и проблемы детектирования направленной связанности, которые невозможно обнаружить в численном эксперименте. Также её целью является сопоставление результатов реконструкции архитектуры связей с результатами, которые были получены в работе [4] специализированным алгоритмом, использующим дополнительную информацию о структуре уравнений для отдельного элемента сети.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Экспериментальные данные были получены с использованием установки, описанной в работе [4]. Она представляет собою систему из $D = 10$ связанных генераторов хаоса с запаздыванием следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = f_i[x_i(t - \tau_i)] + \sum_{j=0, j \neq i}^{D-1} k_{i,j} [x_j(t) - x_i(t)]. \quad (1)$$

Здесь $i, j = 0, \dots, D - 1$, $x_i(t)$ и $x_i(t - \tau_i)$ — напряжение на входе и на выходе линии задержки соответственно, $\varepsilon_i = R_i C_i$, где R_i — сопротивление, и C_i — ёмкость фильтра нижних частот

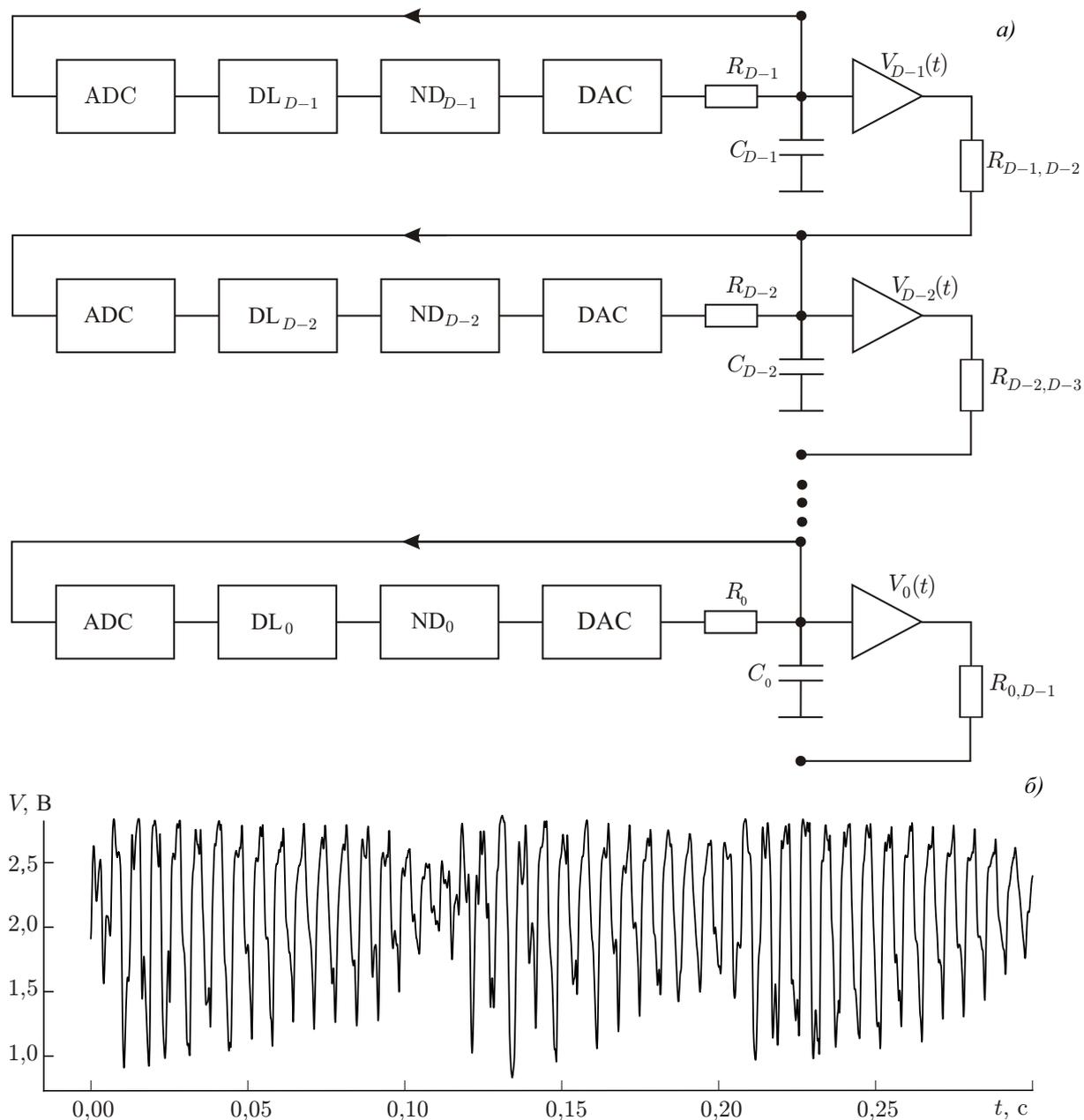


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки из D генераторов с номерами от 0 до $D - 1$ (а) и временной ряд одного из генераторов (б). Здесь ADC — аналого-цифровой преобразователь, DL — линия задержки, DN — нелинейное устройство, DAC — цифро-аналоговый преобразователь

первого порядка, коэффициент связи определялся как $k_{i,j} = R_i/R_{i,j}$ (см. рис. 1а). Квадратичная нелинейная функция f_i была организована цифровым способом с помощью микроконтроллера. Параметры генераторов выбирались из диапазонов $\tau_i \in [2,50, 4,75]$ мс, $\varepsilon_i \in [203, 536]$ мкс линейно, т. е. $\tau_i = 2,5 + 0,25i$ и $\varepsilon_i = 203 + 37i$, $i = 0, \dots, D - 1$. Параметры связи выбирались из диапазона $k_{i,j} \in [0,10; 0,23]$ случайным образом, $k_{i,j} = 0$ для всех $j \neq i + 1$. Для автономных генераторов использованные параметры соответствуют хаотическому режиму с выраженным временным масштабом. Схема установки показана на рис. 1а, пример временного ряда одного из генераторов представлен на рис. 1б.

Всего были записаны и проанализированы на связанность 22 временных ряда, полученных от установки в различных экспериментах в режиме установившихся хаотических колебаний. Далее рассмотрены два ряда, для которых генераторы были связаны однонаправленно в кольцо по схеме $9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 9$ и два ряда, для которых те же генераторы были связаны в цепочку (т. е. связь с нулевого генератора на девятый была разомкнута). Далее для общности рассмотрены те ряды, где частота выборки составляла 100 кГц, а общее время наблюдения — не менее 10 с (длина ряда $N_{\text{гес}} = 10^6$ отсчётов). Каждый ряд делился на 10 неперекрывающихся интервалов с длиной $N = 10^5$ отсчётов, каждый интервал анализировался отдельно, что позволило оценить чувствительность и специфичность методов статистически.

2. МЕТОДЫ

2.1. Постановка задачи

Пусть имеются колебательные временные ряды $\{x_i(t_n)\}$, $i = 1, \dots, D$ от D объектов, измеренные с шагом выборки $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, $2 \leq n \leq N$. Далее для простоты будем везде писать $x_i(n)$ вместо $x_i(t_n)$. Требуется определить архитектуру связей в ансамбле, т. е. узнать, какие из D осцилляторов оказывают влияние на другие (и какие именно) осцилляторы (т. е. требуется определить факт взаимодействия и его направление, но не силу). Архитектура связей считается постоянной на всём времени наблюдения. При этом стоит отметить, что, хотя один генератор может воздействовать на второй опосредованно — через третий, при выявлении такого рода связи она будет считаться ложноположительной, т. к. в данной работе ставится цель выявить архитектуру связей между осцилляторами, и истинными полагаются только физически имеющиеся в натурном эксперименте связи. Также желательно минимизировать число ложно определённых связей (ошибки первого рода), т. е. добиться высокой специфичности, и также минимизировать число пропущенных связей (ошибки второго рода), т. е. добиться высокой чувствительности.

Основная идея как метода причинности по Грейнджеру, так и метода частной направленной когерентности состоит в том, что если учёт данных из временного ряда $\{x_j(n)\}$ системы с номером j значимо помогает прогнозировать будущее значение во временном ряду $\{x_i(n)\}$ системы с номером i , то признаётся, что между ними существует связь.

2.2. Причинность по Грейнджеру

Предложенный в оригинальной работе Грейнджера подход позволяет выявить наличие связи между двумя системами. Сам алгоритм разбит на два шага. На первом шаге строится индивидуальная модель

$$x'_i(n + \tau) = f\{x_i(n), x_i(n - l), \dots, x_i[n - (D_s - 1)l], \mathbf{c}^s\}. \quad (2)$$

Здесь $x'_i(n + \tau)$ — предсказанное значение в момент времени $n + \tau$, которое может отличаться от измеренного $x_i(n + \tau)$, f — аппроксимирующая функция (в данной работе это отображения последования с полиномиальной нелинейностью, параметры которых — размерность и степень полинома — подбирались как было предложено в работе [30] в соответствии с критерием Шварца [31]), l — лаг модели (количество шагов дискретного времени между точками ряда, образующими D_s -мерный вектор состояний модели), τ — дальность прогноза (расстояние между предсказываемой точкой и наиболее близкой к ней точкой вектора состояний), \mathbf{c}^s — неизвестный вектор коэффициентов. В данной работе последний подбирался методом наименьших квадратов так, чтобы

минимизировать среднеквадратичную ошибку аппроксимации индивидуальной модели (2):

$$\varepsilon_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau+(D_s-1)l+1}^N [x'_i(n) - x_i(n)]^2. \quad (3)$$

На втором шаге строится совместная модель, в которой, кроме данных из ряда x_i , дополнительно используется D_a членов ряда x_j :

$$x''_i(n + \tau) = g\{x_i(n), x_i(n - l), \dots, x_i[n - (D_s - 1)l], \\ x_j(n), x_j(n - l), \dots, x_j[n - (D_a - 1)l], \mathbf{c}^J\}, \quad (4)$$

где $x''_i(n + \tau)$ — предсказанное моделью значение, \mathbf{c}^J — коэффициенты совместной модели. После этого аналогичным образом минимизируется среднеквадратичная ошибка аппроксимации совместной модели:

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau+(D_m-1)l+1}^N [x''_i(n) - x_i(n)]^2, \quad D_m = \max(D_s, D_a). \quad (5)$$

В качестве меры связанности, как правило, используется показатель улучшения прогноза (также называемый улучшением прогноза или причинностью по Грейнджеру):

$$PI = 1 - \varepsilon_J^2 / \varepsilon_s^2. \quad (6)$$

Если $PI=0$ (учёт сигнала x_j не помог в предсказании x_i), то считают, что x_j не воздействует на x_i . Если же $PI \rightarrow 1$ (учёт сигнала x_j существенно улучшил предсказание x_i), считают, что x_j воздействует на x_i .

Однако данный тест позволяет выявить связь в определённом направлении между двумя системами и не способен различить прямое и опосредованное взаимодействие. Для того, чтобы решить эту проблему, был предложен алгоритм, состоящий из трёх последовательных тестов, который способен выявить архитектуру связей в системе из трёх осцилляторов. Для этого необходимо построить прогностические модели следующего вида:

$$x'_{i|j}(n + \tau) = f_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad x'_{i|p}(n + \tau) = f_{ip}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_p), \quad x'_{i|j,p}(n + \tau) = f_{ijp}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_p), \\ x'_i(n + \tau) = f_i(\mathbf{x}_i), \quad x'_{j|p}(n + \tau) = f_{jp}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_p), \quad (7)$$

где $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_p$ — реконструированные методом временных задержек по скалярным временным рядам векторы состояний, функции $f_j, f_{ij}, f_{ip}, f_{jp}, f_{ijp}$ — полиномы общего вида. Тогда выявление архитектуры связей сведётся к оценке значимости следующих показателей улучшения прогноза:

$$PI_{x_j \rightarrow x_i} = 1 - \frac{\varepsilon_{i|j,p}^2}{\varepsilon_{i|j}^2}, \quad PI_{x_p \rightarrow x_i} = 1 - \frac{\varepsilon_{i|j,p}^2}{\varepsilon_{i|p}^2}, \quad PI_{x_p \rightarrow x_j} = 1 - \frac{\varepsilon_{j|p}^2}{\varepsilon_j^2}, \quad (8)$$

где $\varepsilon_j^2, \varepsilon_{i|j}^2$ и т. д. — среднеквадратичные ошибки аппроксимации соответствующих моделей с нелинейными функциями $f_j, f_{j|p}$ и т. д.

Методика, предложенная в работе [28], позволяет выявить архитектуру связей для трёх односторонне связанных осцилляторов в заранее заданном направлении. Поэтому для её применения к данным натурального эксперимента было принято решение разбить 10 связанных осцилляторов на группы по три следующим образом: $9 \rightarrow 8 \rightarrow 7, 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6, 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$,

5 → 4 → 3, 4 → 3 → 2, 3 → 2 → 1, 2 → 1 → 0, 1 → 0 → 9, 0 → 9 → 8. Следует отметить, что таким образом можно исследовать только структуры типа кольца или цепочки с некоторыми дополнительными связями (только через 1). В данной работе мы ограничились этим методом.

Далее, функции f_{x_i} , f_{x_i, x_j} выбирались в виде степенных полиномов общего вида, как это было предложено в работе [6], а для подбора параметров метода использовались рекомендации работ [32, 33], после чего, в соответствии с критерием Шварца, были выбраны $D_s = 4$, $D_a = 1$ и порядок полиномов $P = 3$, следуя методике, предложенной в работе [30].

2.3. Частная направленная когерентность

Для начала представим имеющиеся D скалярных временных ряда в виде одного векторного ряда

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \dots \\ x_D(n) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(n). \quad (9)$$

Тогда линейная авторегрессионная модель эволюции вектора $\mathbf{x}(n)$ будет иметь вид

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{r=1}^d \mathbf{A}_r \mathbf{x}(n-r) + \mathbf{w}(n), \quad (10)$$

где $\mathbf{w}(n)$ — вектор ошибок модели (невязок) в n -й момент времени, который также рассматривают как динамический шум, d — параметр модели, определяющий число предыдущих значений вектора \mathbf{x} , учитываемых при прогнозе следующего, \mathbf{A}_r — матрица связанности на сдвиге r шагов дискретного времени.

Для того, чтобы рассчитать коэффициенты $a_{i,j}(r)$ матрицы \mathbf{A}_r , модель (10) представляется в форме

$$x_i(n) = \sum_{r=1}^d \sum_{j=1}^D a_{i,j}(r) x_j(n-r) + w_i(n). \quad (11)$$

Уравнение (11) даёт возможность оценить i -е строчки всех матриц \mathbf{A}_r сразу, оценку нужно проводить для всех компонентов сигнала $i = 1, \dots, D$. Далее с полученными коэффициентами проводится Z -преобразование, смысл которого в переходе из временной области в частотную. Во временной области коэффициенты $a_{i,j}(r)$ можно интерпретировать как вклад текущего значения динамической переменной j -го осциллятора в прогноз значения i -го осциллятора, отстоящего от него на $r\Delta t$ по времени вперёд. В частотной области появится соответствующий коэффициент $a_{i,j}(f)$, где приближённо можно считать, что $f = 1/(r\Delta t)$. При этом значения f можно выбрать произвольно, но очевидно, что значения больше половины частоты выборки $f > 1/(2\Delta t)$ бессмысленны, поскольку соответствующая информация согласно теореме Котельникова в сигнале отсутствует. Аналогично, разрешение по частоте соответствует длине модели — полному временному интервалу, захваченному моделью, т.е. $\delta f \approx 1/(d\Delta t)$. Поэтому при выборе d следует стремиться захватить все основные временные масштабы, и если какой-либо из них будет превышать величину $(d\Delta t)$, он не будет разрешён и возможное взаимодействие на этом масштабе этим методом диагностировано не будет. В данной работе для дальнейших расчётов использовалось значение $d = 200$, чтобы захватить основной характерный период колебаний. Перейдём из временной области в частотную, заменив \mathbf{A}_r на $\mathbf{A}(f)$:

$$\mathbf{A}(f) = \sum_{r=1}^d \mathbf{A}_r z^{-r} \Big|_{z=\exp(-i2\pi f)}. \quad (12)$$

Для удобства вводится матрица $\bar{\mathbf{A}}(f) = \mathbf{E} - \mathbf{A}(f)$, где \mathbf{E} — единичная матрица. С её помощью частная направленная когерентность выражается как

$$\text{PDC}_{ij}(f) = \frac{\bar{a}_{i,j}(f)}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}_j^{\text{H}*}(f) \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{a}}_j(f)}}, \quad (13)$$

где индекс H обозначает эрмитово сопряжение, $\bar{\mathbf{a}}_j$ — векторы-столбцы матрицы $\bar{\mathbf{A}}(f)$.

Величина $0 \leq \text{PDC}_{ij}(f) \leq 1$ характеризует линейный непосредственный (т.е. не опосредованный через другие осцилляторы) вклад осциллятора j в динамику осциллятора i на частоте f . Учесть нелинейное взаимодействие частично можно, если использовать достаточно большую размерность [34]. Если $\text{PDC}_{ij}(f) \rightarrow 1$, можно утверждать, что динамика i -го осциллятора полностью определяется (направленно когерентна) динамикой j -го осциллятора на частоте f . Если $\text{PDC}_{ij}(f) \rightarrow 0$, значит, j -й осциллятор не влияет на i -й осциллятор на частоте f . Вклад на разных частотах будет в общем случае различен. Так, вклад может быть велик на тех частотах, где мощность мала: в этом отношении частная направленная когерентность повторяет обычную ненаправленную когерентность, которая нормирована на индивидуальные спектры мощности, см. знаменатель в формуле (13). Если мы хотим обнаружить реально значимые взаимодействия, следует выбрать тот диапазон частот, где сосредоточена основная мощность колебаний. Для исследуемых генераторов это диапазон $[0; 200]$ Гц. Связь считалась обнаруженной, если хотя бы на одной частоте в этом диапазоне значение PDC превышало суррогатный уровень. При этом следует отметить, что если увеличить диапазон в два раза, до 400 Гц, чтобы захватить вторую и третью гармоники колебаний, результаты принципиально не изменятся.

2.4. Тестирование на значимость

Поскольку оба используемых подхода будут на практике давать ненулевые выводы о связанности почти всегда из-за дефицита данных и конечного шага выборки (см. [6, 35, 36]), необходимо использовать некоторый критерий значимости выводов о связанности. Как правило, это делается путём установления некоторого порога значимости. Если рассчитанная мера превышает такой порог, связь признаётся существующей. Иначе, если мера слишком мала и не превышает порог, связь считается несуществующей (или утверждается, что связь обнаружить не удалось).

Установить порог можно исходя из соображений о распределении оценок связанности. Пороговое значение располагается на краю распределения в правой части, как правило, так, чтобы функция распределения в пороговом значении превышала некоторое наперёд заданное число, например $\gamma = 0,95$. Тогда вероятность ошибки первого рода составляет $p = 1 - \gamma = 0,05$ и называется уровнем значимости. Существуют аналитические способы расчёта уровня значимости, например предложенный в работе [37]. Однако все они, как правило, требуют весьма существенных допущений и априорных знаний об объекте исследования. Если такие знания отсутствуют, можно воспользоваться методами генерации суррогатных данных. Есть несколько способов к генерации суррогатных временных рядов [38], но для метода причинности по Грейнджеру наиболее адекватен подход, основанный на перестановке реализаций, как это было показано на различных примерах в работах [39, 40]. Именно этот подход и был использован далее для обеих рассмотренных мер.

Для того, чтобы получить ансамбль реализаций, при всех расчётах измеренный ряд с длиной N_{rec} значений делился на $L = 10$ частей, таким образом получались ряды с длиной $N = N_{\text{rec}}/L = 10^5$ отсчётов. Из этих рядов было получено $L(L - 1) = 90$ суррогатных пар рядов (всевозможные пары, кроме тех, где номера рядов совпадали), для которых был проведён такой

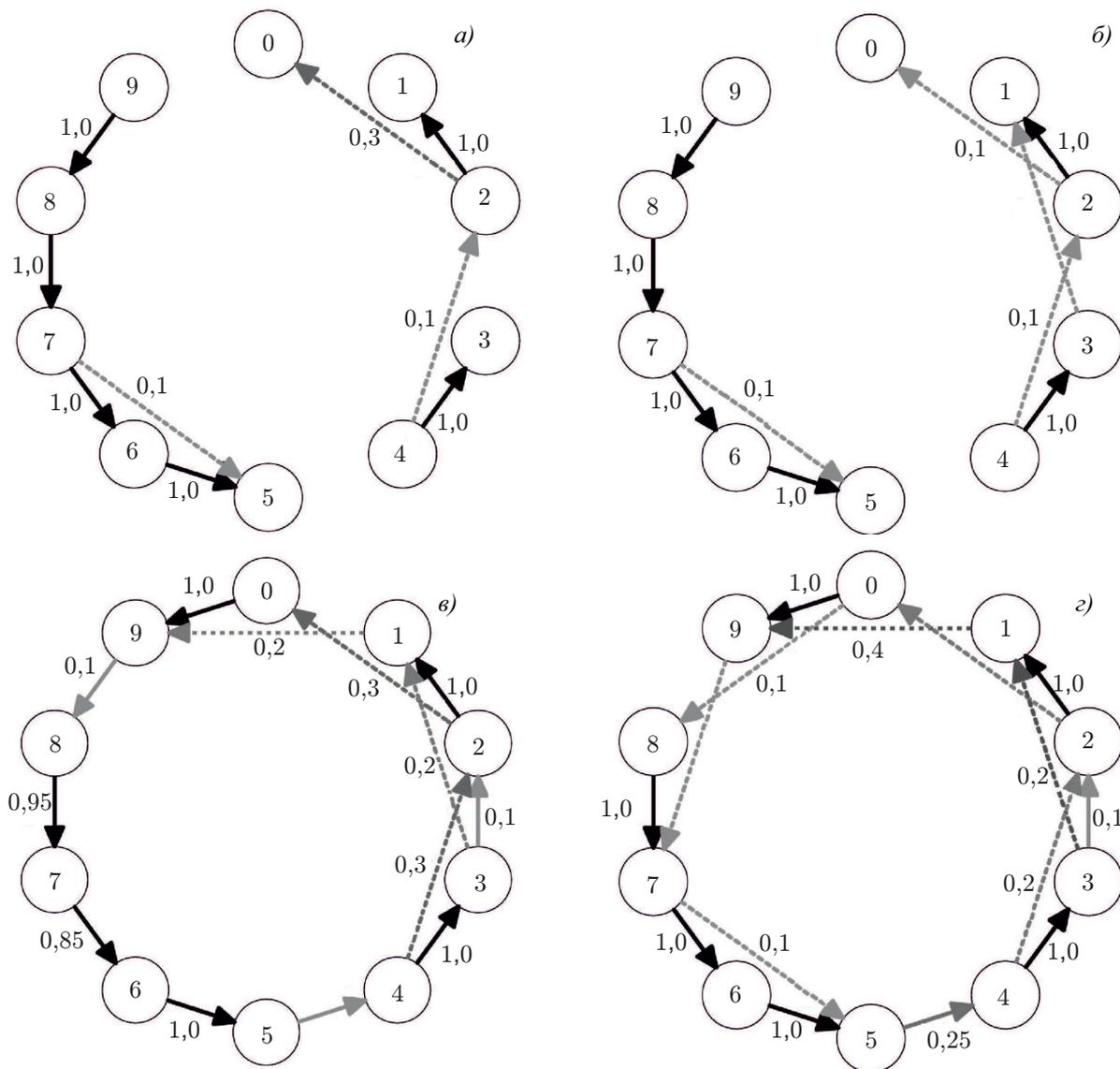


Рис. 2. Архитектура связей, выявленная методом причинности по Грейнджеру для 4 различных экспериментов: цепочка связанных генераторов (а, б), кольцо (в, г). Числами представлена доля реализаций, для которых связь выявлялась в соответствующем направлении

же анализ, что и для $L = 10$ истинных рядов. Полученные по всем суррогатным рядам значения PI и PDC были отсортированы по убыванию, и в качестве суррогатного уровня было взято четвертое сверху значение, что примерно соответствует уровню значимости $p = 0,05$. Для PDC суррогатный уровень строился на каждой частоте отдельно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ СВЯЗАННОСТИ

3.1. Определение связей методом причинности по Грейнджеру

Результаты выявления архитектуры связей методом условной причинности по Грейнджеру представлены на рис. 2. Видно, что в большинстве случаев и для кольца (рис. 2а, б), и для

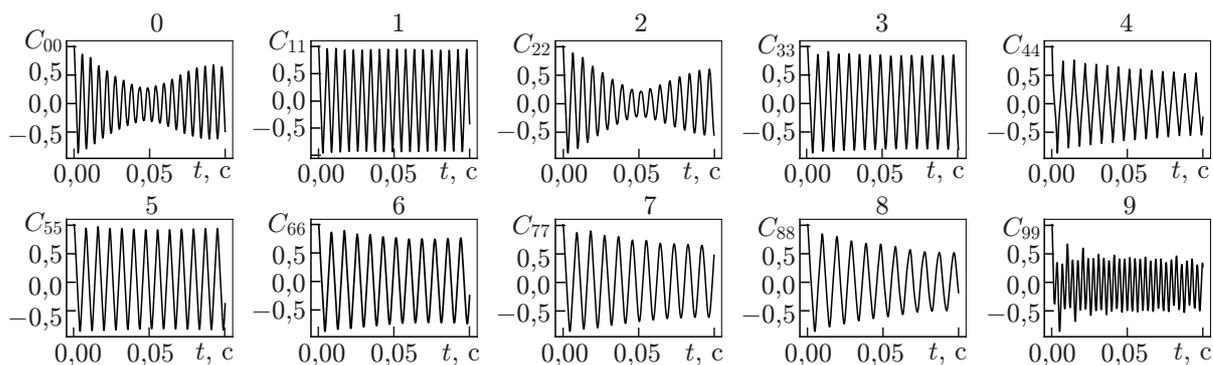


Рис. 3. Автокорреляционные функции для всех 10 генераторов ансамбля, связанных в цепочку, для которых результаты реконструкции связей представлены на рис. 2а

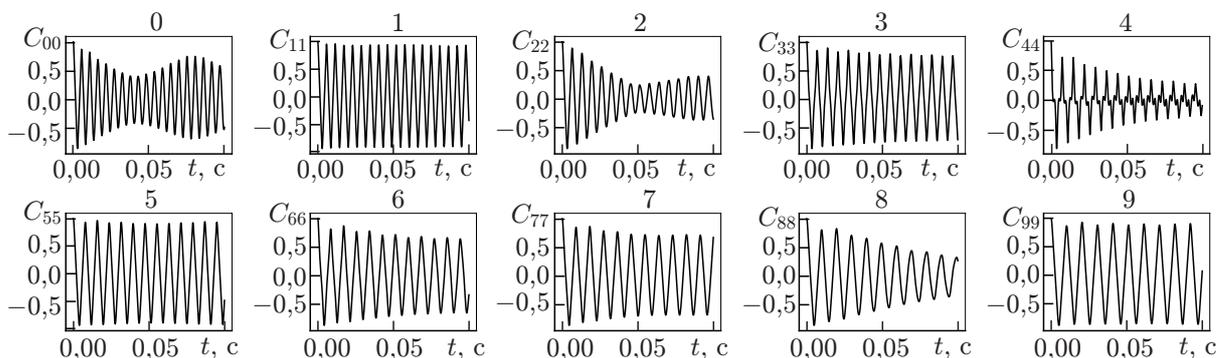


Рис. 4. Автокорреляционные функции для всех 10 генераторов ансамбля, связанных в кольцо, для которых результаты реконструкции связей представлены на рис. 2в

цепочки (рис. 2в, г) реально существующие связи между соседними генераторами выявляются с большой вероятностью (часто с вероятностью 1, как это показано над соответствующими стрелками). Тем не менее, если рассмотреть цепочку, есть три связи между генераторами, которые никогда не детектируются: $5 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 0$. При этом для тех же узлов присутствуют редко детектируемые опосредованные связи: $7 \rightarrow 5$, $4 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 0$, а для второй реализации (рис. 2г) также $3 \rightarrow 1$.

Объяснить такое поведение можно с помощью автокорреляционных функций сигналов (см. рис. 3) для соответствующих генераторов при учёте того, что метод причинности по Грейнджеру основан на построении и сопоставлении ошибок предсказательных моделей. Видно, что автокорреляционные функции для 1-го, 3-го и 5-го генераторов очень близки к периодическим и практически не спадают. Это значит, что сами сигналы этих генераторов периодические и даже почти гармонические. Следовательно, сигналы этих генераторов не несут значимой информации и оказываются малополезны для предсказания динамики генераторов № 0, 2 и 4, на которые 1-й, 3-й и 5-й генераторы воздействуют непосредственно. Слабое отличие колебаний в 1-м, 3-м и 5-м генераторах от периодических обусловлено внешним воздействием на них генераторов № 2, 4 и 6 соответственно. Это воздействие всегда корректно определяется данным методом. Поскольку именно эти генераторы несут ответственность за слабую неперIODичность сигналов 1-го, 3-го и 5-го генераторов и, следовательно, являются основным источником полезной информации, логично видеть опосредованное влияние 4-го генератора на 2-й и 2-го на 0-й. Влияние 7-го генератора на 5-й, выявленное в 1 случае из 10, может объясняться тем, что временные масштабы колебаний для 7-го и 6-го генераторов очень близки, как это видно из рис. 3. Для других рас-

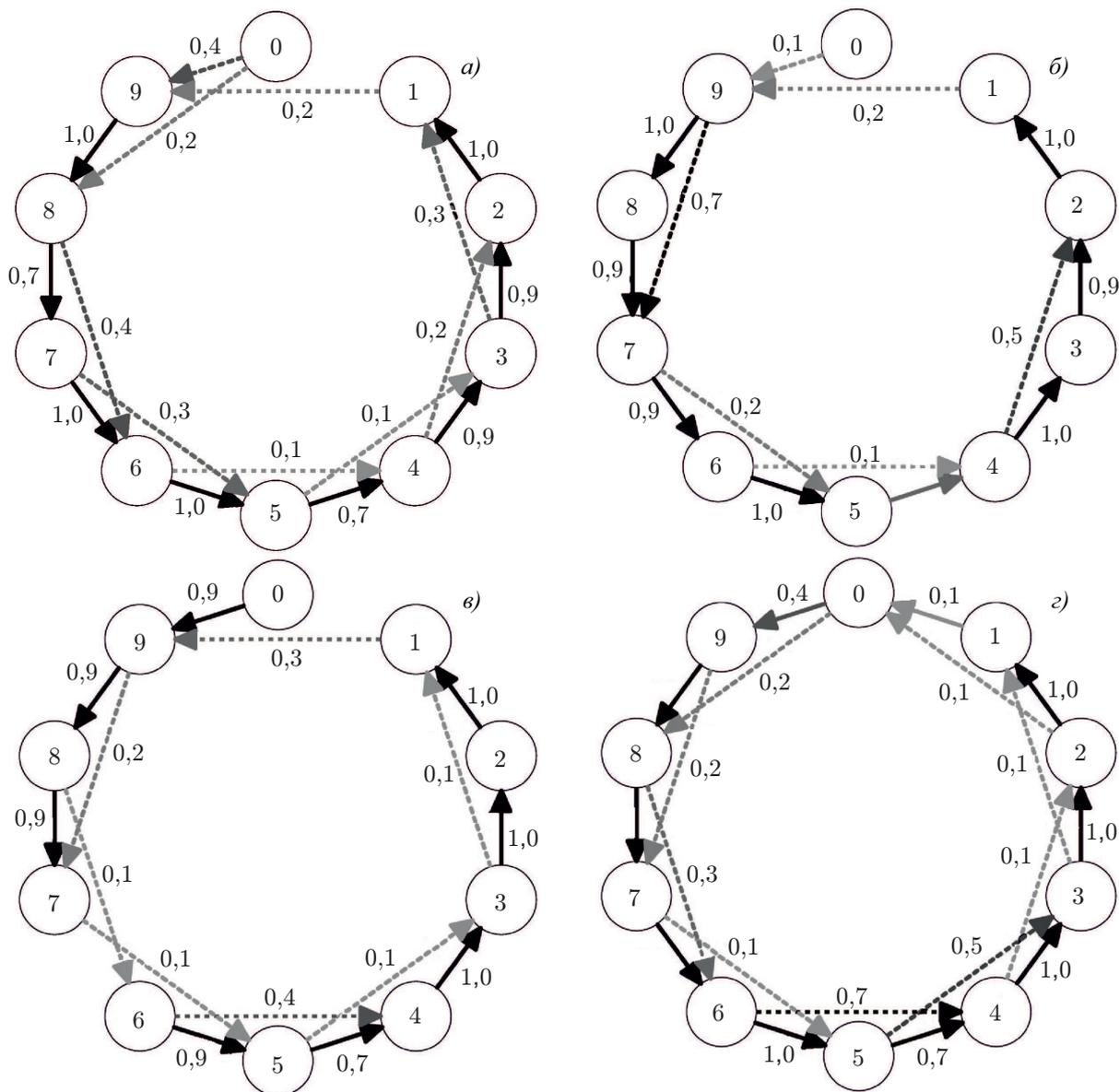


Рис. 5. Архитектура связей, выявленная методом частной направленной когерентности для 4 различных экспериментов: цепочка связанных генераторов (а, б) и кольцо (в, г). Числами представлена доля реализаций, для которых связь выявлялась в соответствующем направлении. Схема построена с учётом только связей на частотах $100 \leq f \leq 200$ Гц

смотренных троек генераторов столь близкое соотношение основных частот не наблюдалось.

Результаты, полученные для кольца, в целом совпадают с описанными выше результатами для цепочки с некоторыми исключениями, объяснимыми изменениями в динамике отдельных узлов сети вследствие подключения связи $0 \rightarrow 9$. Сама эта связь диагностируется всегда верно. При этом изменились характеристики колебаний 3-го генератора (автокорреляционная функция стала спадать быстрее) и 9-го — его автокорреляционная функция, наоборот, стала очень близка к периодической (см. рис. 3). В результате связанность со стороны 3-го осциллятора стала диагностироваться в редких случаях, а связь со стороны 9-го на 8-й, наоборот, вовсе не выявляется на рис. 2г и выявляется только в одной десятой случаев для рис. 2в. Связь со стороны 5-го

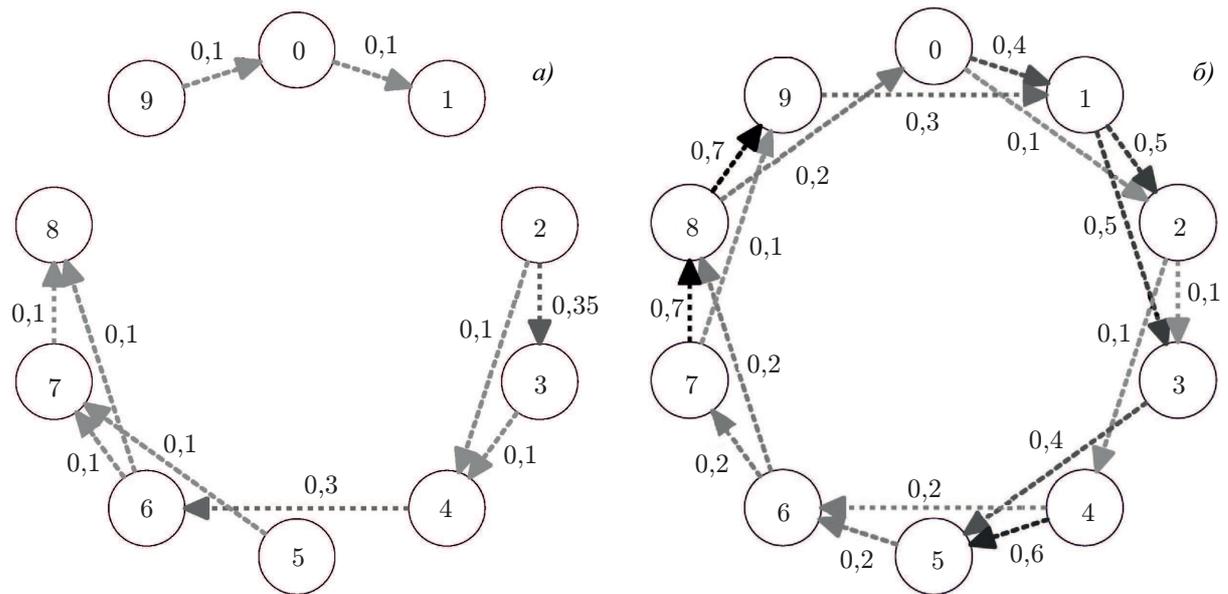


Рис. 6. Архитектура связей, выявленная методами нелинейной причинности по Грейнджеру (а) и частной направленной когерентности (б) для связанных в цепочку элементов при тестировании в заведомо неверную сторону (все выявленные связи — лишние). Числами представлена доля реализаций, для которых связь выявлялась в соответствующем направлении. Для частной направленной когерентности построены связи только на частотах $100 \leq f \leq 200$ Гц

осциллятора на 4-й стала диагностироваться в некоторых случаях, видимо, по иной причине: колебания и автокорреляция 4-го генератора стали сильно нелинейными и релаксационными, что увеличило значимость учёта влияние 5-го генератора на него при предсказании его динамики (сигналы стали меньше похожи).

В целом для кольца результаты оказываются менее точными, чем для цепочки: появляются ошибки при детектировании связанности от 8-го к 7-му и от 7-го к 6-му генераторам, а опосредованные связи диагностируются в целом значительно чаще: 25 случаев из 200 возможных по двум экспериментам (12,5 %) для кольца против 9 из 160 возможных (5,6 %) для цепочки.

На рис. 6а представлены результаты определения связанности методом причинности по Грейнджеру, когда направление распространения сигнала по кольцу было изначально выбрано неверно. Видно, что в целом специфичность метода неплоха: для большинства осцилляторов связи в неверную сторону определяются только в 10 % случаев. Ложные связи, в том числе опосредованные, чаще всего выявляются от узлов, имеющих быстро спадающую корреляционную функцию и сильно нерегулярную динамику, таких как генераторы № 2, 4, 6.

3.2. Определение связей методом частной направленной когерентности

Метод частной направленной когерентности по построению будет показывать все возможные связи, а не только связи по кольцу или цепочке в выбранном направлении. Однако в таком случае результаты сложно сопоставлять с результатами, полученными методом причинности по Грейнджеру. Поэтому анализировались только связи с ближайшим генератором и следующим через один генератор по кольцу и по цепочке в одну сторону (эти результаты приведены на рис. 5), а также в противоположную сторону (см. рис. 6б).

Результаты, полученные для цепочки, в целом удовлетворительны (см. рис. 7): аналогично

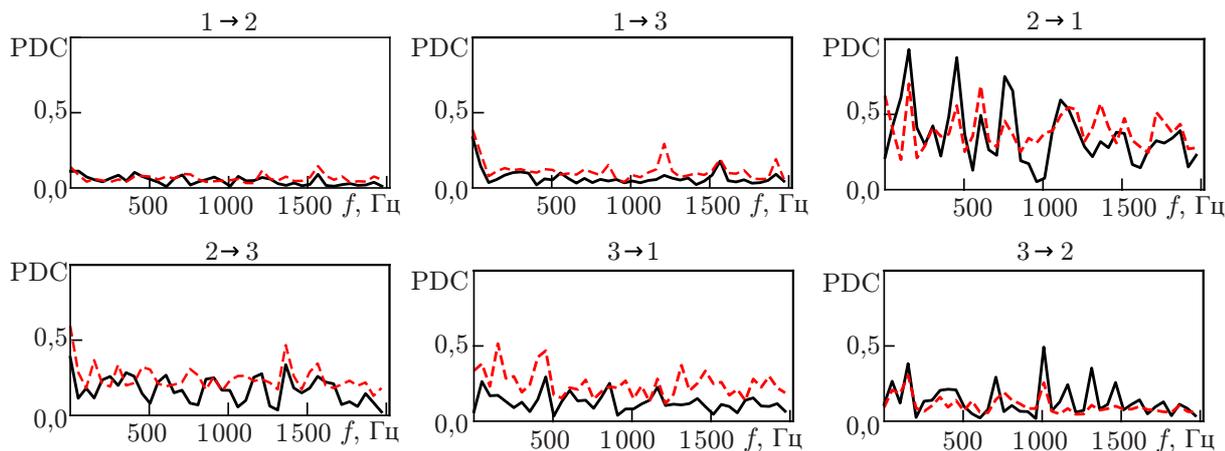


Рис. 7. График зависимостей частной направленной когерентности PDC от частоты для элементов цепочки генераторов 1–3. Чёрными сплошными линиями показаны зависимости для реальных данных (сегмент № 2), красными штриховыми — для суррогатных данных

методу причинности по Грейнджеру, плохо определяются связи в парах генераторов $1 \rightarrow 0$ и $5 \rightarrow 4$, а связь $3 \rightarrow 2$ определяется в целом лучше. Графики на диагонали, отражающие влияние осциллятора самого на себя, на рис. 7 отсутствуют, как это принято в современных работах [41], поскольку сами авторы метода неоднократно подчёркивали, что они, как правило, лишены физического смысла [42], хотя и привели их в работе [11] в ряде примеров из соображений воспроизводимости результатов. В части реализаций выявляется ложная связь $0 \rightarrow 1$, а также довольно много опосредованных связей.

Для кольца в первом эксперименте (см. рис. 5б) вовсе не выявляется связь $7 \rightarrow 6$. Связи в направлении генератора № 4 выявляются гораздо лучше, чем для цепочки, но при этом появляется много ложных опосредованных связей в разных реализациях в направлении $6 \rightarrow 4$. Специфичность результатов оказывается существенно ниже, чем при использовании метода причинности по Грейнджеру (см. рис. 6а, б): наблюдается большое число пар (4 из 10), в которых несуществующие связи в обратную сторону обнаруживаются в 50 % и более случаев и 1 пара ($1 \rightarrow 3$), в которой в 50 % случаев диагностировались даже опосредованные связи в неверном направлении.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Тестирование методов определения связанности на экспериментальных радиотехнических системах даёт возможность наблюдать некоторые эффекты, которые сложно воспроизвести в численном эксперименте: неидентичность отдельных элементов, построенных на аналоговой базе, и вариация их параметров в зависимости от времени привели к тому, что результаты для двух экспериментов, проведённых с теми же генераторами и одной и той же архитектурой связей, несколько отличались. При этом отличия оказались наиболее заметными для самых проблемных ситуаций.

Существование режимов, очень близких к периодическим, в ряде генераторов привело к потере информации о связанности в направлении от них. При этом в части случаев проявились опосредованные связи через 1 генератор: информационный сигнал как бы просачивался через периодический генератор, но его источником выступал предстоящий генератор, а приёмником — элемент сети, стоящий после.

Также удалось обнаружить, что воздействие со стороны генераторов, чьи сигналы очень регулярны, может быть детектировано хотя бы в части случаев, если ведомый генератор находится в режиме, сильно отличном от периодического по основной частоте и форме колебаний.

Метод частной направленной когерентности в целом даёт больше ошибок в связях, имея существенно меньшую специфичность: определяет большое число как ложноположительных опосредованных связей, так и ложноположительных обратных. Это может быть обусловлено двумя причинами: его линейностью и недостаточным усреднением. Необходимость использования большой размерности [34] и большого относительно других методов объёма выборки [29] уже были установлены в численном эксперименте и связаны с необходимостью учесть линейными моделями нелинейные взаимодействия и собственную нелинейность отдельных элементов ансамбля. При этом при интерпретации использовались только значения, соответствующие частотам, реально присутствующим в сигналах генераторов, но по построению рассчитывались и значения на других, «мусорных», частотах (т. е. тех, на которых мощность сигнала очень невелика или есть только шумы наблюдения).

Детектирование связей в кольцевых системах оказалось в целом менее надёжным, чем в цепочках обеими рассмотренными методиками: имелось как больше пропущенных, так и больше паразитных опосредованных связей. Здесь наши результаты подтверждают результаты, полученные ранее методом частной направленной когерентности для моделей нейроосцилляторов в численном эксперименте [29].

Из общих соображений следует, что с увеличением длины временного ряда вариации результатов для различных экспериментов должны уменьшиться, а точность восстановления архитектуры связей — увеличиться (хотя в работе [36] также высказывалась идея, что при очень больших длинах ряда будет диагностироваться всё больше ложноположительных взаимодействий, т. е. чувствительность будет расти в ущерб специфичности). К сожалению, в рамках поставленного эксперимента проверить это оказалось невозможно вследствие ограничения записывающей аппаратуры на длину реализации (мы использовали значение последней близкое к максимально возможному), поэтому данный вопрос заслуживает дополнительного рассмотрения.

Следует также отметить, что специализированные методы детектирования связей, которые для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием первого порядка, были предложены в работах [4, 27], дают в целом лучшие результаты, чем неспецифичные подходы (т. е. рассмотренные здесь методы причинности по Грейнджеру и частной направленной когерентности). Если сопоставить результаты данной работы с результатами [4], видно, что специализированные подходы позволяют при том же числе узлов в сети добиться значительно меньшего числа ложноположительных связей (т. е. имеют лучшую специфичность) и пропускать меньше реально существующих связей (т. е. имеют лучшую чувствительность). Нужно только понимать, что специализированные подходы являются гораздо более «хрупкими», т. е. ошибки в дополнительной информации или её недостаток очень существенно ограничивают их работоспособность или даже приводят к полной невозможности их применения, в то время как методы причинности по Грейнджеру и частной направленной когерентности в принципе не требуют знать ничего, кроме временных рядов всех осцилляторов ансамбля, и при этом позволяют в общих чертах восстановить архитектуру связей в нём. Таким образом, разработка и применение специализированных методов однозначно имеют смысл, но пренебрегать универсальными подходами в общем случае нельзя, поскольку они тоже бесполезны, а нужная для применения специализированных методик информация далеко не всегда может быть доступна.

В рамках данной работы нами сделан первый шаг в области тестирования по экспериментальным данным методов обнаружения направленной связанности сетей радиотехнических генераторов, рассмотрены только две простейшие архитектуры связей: цепочка и кольцо. Исследование

более общего случая, в том числе других архитектур связей (звезда, случайные связи), иерархических сетей, сетей типа «малый мир», несомненно актуально, но выходит за рамки данной работы. Рассмотрение таких более сложных сетей потребует изменить организацию эксперимента: во-первых, придётся модифицировать аппаратную реализацию связей между генераторами, во-вторых, увеличить число элементов в ансамбле, поскольку для малого числа генераторов сети типа «малый мир» вырождаются. Различение прямых и опосредованных связей методом нелинейной причинности по Грейнджеру в таком случае может потребовать модификации подходов [6, 28], поскольку непосредственное использование метода [6] даже для 10 осцилляторов приведёт к слишком большому числу коэффициентов модели и, как следствие, плохим статистическим свойствам этих коэффициентов (большим оценкам ошибок среднего), а при использовании тестирования группами по три генератора, как это предлагалось в работе [28], большое число тестов приведёт к необходимости использования очень жёстких поправок на множественное тестирование. Возможно, дополнительная оптимизация модели, как это предлагалось в работе [43], позволила бы хотя бы частично продвинуться в этом направлении.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-12-00201).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov D. A., Mokhov I. I. // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 80, No. 1. Art. no. 016208. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.016208>
2. Gourevitch B., le Bouquin-Jeannes R., Faucon G. // *Biological Cybernetics*. 2006. V. 95, No. 4. P. 349–369. <https://doi.org/10.1007/s00422-006-0098-0>
3. Chiou-Wei S. Z., Chen C. F., Zhu Z. // *Energy Economics*. 2008. V. 30, No. 6. P. 3063–3076. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2008.02.002>
4. Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. // *Phys. Rev. E*. 2016. V. 94, No. 5. Art. no. 052207. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052207>
5. Granger C. W. J. // *Econometrica*. 1969. V. 37, No. 3. P. 424–438. <https://doi.org/10.2307/1912791>
6. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. // *Phys. Lett. A*. 2004. V. 324, No. 1. P. 26–35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
7. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. // *Phys. Rev. E*. 2006. V. 73, No. 6. Art. no. 066216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.066216>
8. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100, No. 14. Art. no. 144103. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.144103>
9. Kondrashov D., Kravtsov S., Robertson A. W., Ghil M. // *J. Climate*. 2005. V. 18, No. 21. P. 4425–4444. <https://doi.org/10.1175/JCLI3567.1>
10. Schreiber T. // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85, No. 2. P. 461–464. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.461>
11. Baccala L. A., Sameshima K. // *Biological Cybernetics*. 2001. V. 84, No. 6. P. 463–474. <https://doi.org/10.1007/PL00007990>
12. Rosenblum M., Pikovsky A. // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64, No. 4. Art. no. 045202(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.045202>
13. Smirnov D., Bezruchko B. // *Phys. Rev. E*. 2003. V. 68, No. 4. Art. no. 046209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.046209>
14. Навроцкая Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2019. Т. 27, № 1. С. 41–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

15. Hesse W., Möller E., Arnold M., Schack B. // *J. Neurosci. Methods*. 2003. V. 124. P. 27–44. doi:10.1016/S0165-0270(02)00366-7
16. Sysoeva M. V., Sitnikova E., Sysoev I. V., et al. // *J. Neurosci. Methods*. 2014. V. 226. P. 33–41. <https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2014.01.028>
17. Bezruchko B., Smirnov D. *Extracting knowledge from time series*. Berlin : Springer-Verlag, 2010. 410 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12601-7>
18. Сысоев И. В., Корнилов М. В., Сысоева М. В. *Причинность по Грейнджеру: разработка, тестирование, приложение к задачам нейрофизиологии*. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2019. 164 с.
19. Smirnov D. A., Schelter B., Winterhalder M., Timmer J. // *Chaos*. 2007. V. 17, No. 1. Art. no. 013111. <https://doi.org/10.1063/1.2430639>
20. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. и др. // *Успехи физ. наук*. 2008. Т. 178, № 3. С. 323–329. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803h.0323>
21. Sakkalis V. // *Computers in Biology and Medicine*. 2011. V. 41, No. 12. P. 1110–1117. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2011.06.020>
22. Shandilya S. G., Timme M. // *New J. Physics*. 2011. V. 13, No. 1. Art. no. 013004. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/1/013004>
23. Brunton S., Proctor J., Kutz J. // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2016. V. 113. P. 3932–3937. <https://doi.org/10.1073/pnas.1517384113>
24. Sysoev I. V. // *Physica D*. 2018. V. 384–385. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2018.07.004>
25. Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Pikovsky A. S. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2018. V. 57. P. 342–351. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.006>
26. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 79, No. 4. Art. no. 046204. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.046204>
27. Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. // *Письма в ЖТФ*. 2012. Т. 38, № 15. С. 1–9.
28. Корнилов М. В., Сысоев И. В. // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44, № 10. С. 86–95. <https://doi.org/10.21883/PJTf.2018.10.46103.17201>
29. Астахова Д. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2019. Т. 27, № 6. С. 8–24 <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-6-8-24>
30. Сысоева М. В., Сысоев И. В. // *Письма в ЖТФ*. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110.
31. Schwarz G. // *The Annals of Statistics*. 1978. V. 6, No. 2. P. 461–464. <https://doi.org/10.1214/aos/1176344136>
32. Сысоева М. В., Диканев Т. В., Сысоев И. В. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 2. С. 54–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2012-20-2-54-62>
33. Корнилов М. В., Сысоев И. В., Безручко Б. П. // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10, № 3. С. 279–295.
34. Sommerlade L., Eichler M., Jachan M., et al. // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 80, No. 5. Art. no. 051128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.051128>
35. Kornilov M. V., Medvedeva T. M., Bezruchko B. P., Sysoev I. V. // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. V. 82. P. 11–21. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.10.027>
36. Smirnov D. A. // *Phys. Rev. E*. 2014. V. 90, No. 6. Art. no. 062921. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.062921>
37. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. // *Письма в ЖТФ*. 2013. Т. 39, № 13. С. 40–48.
38. Theiler J., Eubank S., Longtin A., et al. // *Physica D*. 1992. V. 58, No. 1–4. P. 77–94. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90102-S](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90102-S)
39. Корнилов М. В., Сысоев И. В. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22, № 4. С. 66–76. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-66-76>

40. Sysoev I. V., Sysoeva M. V. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. V. 309. P. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.005>
41. Nunes R. V., Reyes M. B., de Camargo R. Y. // *Biological Cybernetics*. 2019. V. 113, No. 3. P. 309–320. <https://doi.org/10.1007/s00422-019-00796-8>
42. Takahashi D. Y., Baccalá L. A., Sameshima K. // *J. Appl. Stat.* 2007. V. 34, No. 10. P. 1 255–1 269. <https://doi.org/10.1080/02664760701593065>
43. Северюхина А. Н. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013 Т. 21, № 3. С. 88–96. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2013-21-3-88-95>

Поступила в редакцию 3 марта 2020 г.; принята в печать 15 июня 2020 г.

RECONSTRUCTION OF THE COUPLING ARCHITECTURE IN THE ENSEMBLES OF RADIO-ENGINEERING GENERATORS BY THEIR SIGNALS USING THE METHODS OF GRANGER CAUSALITY AND PARTIAL DIRECTIONAL COHERENCE

M. V. Kornilov, I. V. Sysoev, D. I. Astakhova, D. D. Kulminsky, B. P. Bezruchko, and V. I. Ponomarenko

In this work, we solve the problem of detecting the connectivity in the ensemble of radio-engineering chaos generators with a delay in the own dynamics by two widespread methods, namely, the method of the Granger conditional causality and the method of partial directional coherence. Both approaches are based on the empirical predictive models. The estimates are tested for significance using the surrogate time series built by rearrangement of realizations.

Several experimental time series of the dynamics of all the ensemble elements, which were obtained in various experiments where the generators were connected in a chain and a ring, are considered. The abilities of the methods to reveal the existing couplings and rule out false detection of the indirect interactions are considered in detail.

Both methods are shown to correctly reveal the connectivity on the whole. At the same time the number of the missed and false couplings is significantly higher than that when using the special method, which was developed earlier with allowance for additional information on the node structure. The main missed couplings refer to the case where the leading generator operates in the oscillation regime with a pronounced periodic component. In this case, the Granger causality method detects nonexistent indirect couplings. On the whole, the frequency directional coherence yields a greater number of false conclusions on the indirect and direct couplings. The results of both methods varied from one experiment to another even for the same coupling architecture while the variation was more pronounced for the method of partial directional coherence.