

УДК 519.673+519.172.3+537.321

## САМООРГАНИЗУЮЩАЯСЯ ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ ИСКРОВОГО РАЗРЯДА В ГРОЗОВОМ ОБЛАКЕ

А. А. Булатов<sup>1\*</sup>, Д. И. Иудин<sup>1,2,3</sup>, А. А. Сысоев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной физики РАН;

<sup>2</sup> Приволжский исследовательский медицинский университет;

<sup>3</sup> Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Нижний Новгород, Россия

Предложена мелкомасштабная транспортная модель формирования древа электрического разряда и представлен анализ её реализации для одного характерного случая условий грозового облака. Среди инновационных особенностей модели можно выделить отсутствие привязки к пространственной сетке, высокое пространственно-временное разрешение, учёт асимметрии развития положительных и отрицательных стримеров и временной эволюции параметров разрядных каналов. Используемый в работе критерий стримерно-лидерного перехода сформулирован в терминах температуры канала и опирается на хорошо известный универсальный для искрового разряда механизм ионизационно-перегревной неустойчивости. В рамках используемого подхода прогретый хорошо проводящий лидерный канал формируется за счёт объединения токов десятков тысяч стримеров, каждый из которых изначально обладает пренебрежимо малой проводимостью и температурой, не отличающейся от температуры окружающей среды. Модельное билидерное древо имеет электродинамические характеристики, промежуточные между известными для лабораторной длинной искры и развитой молнии, что ожидаемо для «молодого» молниевое лидера. Морфологические характеристики и электрические параметры рассчитанного разрядного древа зарождающегося модельного лидера молнии согласуются с современными данными о развитии молниевое разряда.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время не вызывает сомнения тот факт, что зарождению молнии предшествует появление в грозовом облаке системы положительных стримеров (подробный обзор данной темы может быть найден в работе [1]). Вместе с тем до сих пор нет единого мнения о том, каким образом стримерная активность приводит к формированию молниевое разряда. Не существует также численных моделей, способных воспроизвести процесс формирования достаточно длинного для поддержания собственного развития хорошо проводящего лидерного канала в грозовом облаке, максимальная напряжённость электрического поля в котором на порядок ниже поля пробоя воздуха [2].

Наиболее цельное, по мнению авторов, гипотетическое описание механизма формирования зародыша молнии в облаке с опорой на работы [3–5] было приведено в исследовании [6]. Предполагается, что положительные стримеры зарождаются в области усиленного поля, возникающего при поляризации одиночного гидрометеора во внешнем поле или при сближении пары противоположно заряженных гидрометеоров. При этом считается, что развивающаяся с гидрометеора система положительных стримеров или совокупность перекрывающихся стримерных систем, развивающихся с соседних гидрометеоров, выносит положительный заряд в направлении роста и аккумулирует отрицательный заряд в точке старта. В конце концов, это приводит к появлению пучка отрицательных стримеров, растущих в противоположном направлении. Менее многочисленные, но более мощные отрицательные стримеры теперь уже биполярной стримерной системы,

\* bulatov@ipfran.ru

прогреваясь, формируют канал пространственного лидера и, участвуя в процессе разделения заряда, усиливают поле на периферии разрядной структуры, провоцируя появление ещё одной (вторичной) системы положительных стримеров, развитие которой происходит подобным же образом. Далее вторичная стримерная система поляризуется по аналогии с исходной. В ходе совместного развития положительные стримеры вторичной системы сливаются с отрицательными стримерами первичной, создавая единый канал, прогреваемый токами выравнивания потенциала. В результате многократного повторения данного процесса перекрывающаяся и сливающаяся цепочка биполярных стримерных систем формирует канал лидера молнии.

Недавно в работе [1] был предложен принципиально новый механизм инициации молнии, основанный на индуцированном шумом кинетическом переходе, происходящем в стохастическом поле заряженных гидрометеоров. Результатом неравновесного фазового перехода являются пятна ионной плазмы с линейными размерами, достигающими нескольких дециметров, и временем жизни порядка нескольких десятков миллисекунд (см. также работы [7, 8]). Существенно, что резкий рост ионной проводимости происходит в экспоненциально редких компактных областях пространства на фоне исчезающе малых изменений средней проводимости среды. При этом предполагается, что в ходе поляризации, обусловленной крупномасштабным электрическим полем грозы, поле на концах плазменных пятен усиливается до величины, достаточной для инициации положительных стримеров. По мере роста концентрации пятен ионной плазмы, как ожидается, коллективная динамика положительных стримерных систем обеспечивает появление лидерного канала в соответствии с качественной картиной описанных выше сценариев Леба и Петерсона, основанных на традиционной доктрине электрического пробоя в атмосфере.

Представленная феноменологическая модель иллюстрирует эволюцию разряда в рамках высказанных в работах [1, 9] предположений для выбранного авторами набора параметров. Данная работа посвящена инновационному развитию модельного подхода, предложенного в работе [10], где были изложены базовые принципы стохастической эволюции древа молниевых разрядов как саморазвивающегося направленного динамического графа с нелинейными связями. Фактически задачей работы [10] было применение построенной модели к количественному описанию одного характерного примера начальной стадии молниевых разрядов в грозовом облаке. Из представленного в [10] обзора существующих моделей молниевых разрядов следует, что в их подавляющем большинстве отсутствуют как привязка событий к физической шкале времени и, соответственно, временная эволюция параметров разрядных каналов, так и хорошо известная асимметрия развития разрядов с положительной и отрицательной полярностями. Важно также отметить, что пространственное разрешение существующих моделей молниевых разрядов (см., например [10–14]) составляет несколько сотен метров, что не позволяет корректно описывать принципиально важный для начальной стадии развития молнии процесс стримерно-лидерного перехода, происходящий на гораздо более мелких масштабах.

Вместе с тем в данной работе решён целый ряд актуальных для моделей развития молниевых разрядов проблем. Во-первых, в предложенной модели впервые отсутствует привязка вершин проводящих связей к узлам пространственной решётки, т. е. направление роста разрядного канала не имеет принципиальных ограничений, свойственных всем остальным подобным моделям, в которых морфология разрядных структур ограничена шагом пространственной решётки. Во-вторых, в данной модели используется относительно малая 30-сантиметровая длина связи, что позволяет говорить о её высоком пространственно-временном разрешении. В-третьих, в данной модели учитывается асимметрия полей развития положительных и отрицательных стримеров. В-четвёртых, в модели использован самосогласованный механизм роста проводимости канала, отвечающий развитию ионизационно-перегревной неустойчивости. Данные свойства модели позволили успешно воспроизвести основные особенности коллективной динамики множества одно-

временно развивающихся стримерных разрядов, которая, как это следует из результатов моделирования, является принципиальной основой формирования билидерного канала молниеводного лидера в грозовом облаке.

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

### 1.1. Постановка задачи

В данной работе моделируется начальная стадия развития молниеводного разряда в области однородного крупномасштабного электрического поля грозы с размерами порядка сотен метров. Для определённости предполагается, что область пространства, в которой начинает развиваться разрядное дерево, находится на высоте примерно 6 км над уровнем моря, что совпадает с типичной высотой инициации молнии [15]. Напряжённость однородного вертикально ориентированного электрического поля  $E_{\text{ext}}$ , в котором формируется разряд, составляет 2,7 кВ/см, что близко к максимальной измеренной в грозовом облаке величине [2]. В связи со значительной удалённостью разрядного дерева от поверхности земли (максимальное расстояние между отдельными узлами разряда много меньше расстояния до земли) в данной модели вычисление электрического поля осуществляется без учёта отражённого в ней заряда. В целях оптимизации расчётов моделирование происходит с автоматическим выбором шага по времени. Характерный временной шаг  $\Delta t$  составляет  $10^{-11} \div 10^{-9}$  с.

Электрическая цепь, образуемая проводящими структурами молниеводного разряда, моделируется в виде динамического графа, вложенного в трёхмерное пространство. Базовыми элементами модели являются вершины и рёбра графа. Вершины соответствуют ёмкостным элементам цепи, а рёбра — резистивным. Пример фрагмента такого графа представлен на рис. 1.

Каждой вершине графа с индексом  $i$  отвечает динамическая переменная — сосредоточенный в ней электрический заряд  $q_i$ . Каждому ребру с индексом  $j$  ставится в соответствие проводимость  $G_j$  и температура нейтральных частиц  $T_j$ , которые также являются динамическими переменными задачи. Единственным геометрическим параметром вершины является её эффективный радиус  $R = 3$  см. По мнению авторов, данный радиус (ёмкостной коэффициент) соответствует масштабу, на котором распределён заряд «коллективной головки» стримерного пучка. Все рёбра являются цилиндрами и имеют одинаковые длины  $L_0 = 30$  см и радиусы  $r = 1,4$  мм. Таким образом, с точки зрения электродинамики, система представляет собой совокупность идеально проводящих сфер, соединённых проводниками с конечными проводимостями, благодаря чему модель учитывает распределённую ёмкость проводников. Индуктивности каждой отдельной связи и образуемых ими электрических цепей считаются пренебрежимо малыми.

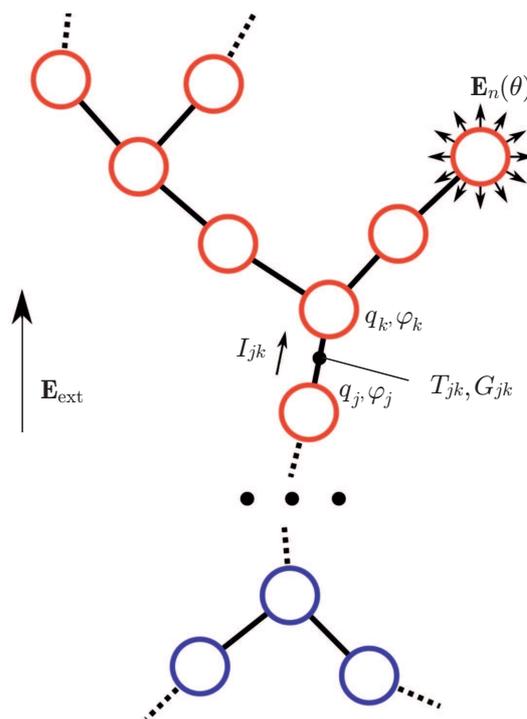


Рис. 1. Представление разрядного дерева в виде трёхмерного графа

Эволюция системы определяется двумя процессами: непрерывной вариацией динамических переменных и бифуркациями, изменяющими структуру графа. Первый из них отвечает за перераспределение заряда, изменение температуры и проводимости различных частей системы, второй — за приращение либо распад отдельных каналов разрядной структуры.

## 1.2. Рост и распад разрядных каналов

Разряд начинает развиваться из простейшей проводящей структуры, образованной парой изначально незаряженных вершин и ребром между ними, поляризация которой происходит под действием внешнего электрического поля. При этом можно считать, что возникновение исходной стримерной связи является результатом описанного в исследованиях [1, 8] процесса эволюции ионной компоненты в грозовом облаке.

Изменение структуры графа может происходить тремя заложенными в модель способами: 1) возникновение новых вершин одновременно с новыми рёбрами; 2) возникновение рёбер между парой уже существующих вершин и 3) отмирание существующих рёбер-проводников из-за диссипации их проводимости при недостаточном электрическом поле. Рассмотрим каждый из этих процессов подробнее.

Рост моделируемого разряда происходит посредством возникновения новых вершин графа, соединённых новыми рёбрами с уже существующими вершинами. Каждые новообразованные вершина и ребро ассоциируются с однонаправленным пучком стримеров с одинаковой полярностью и длиной  $L_0 = 30$  см. Выбор данного значения длины модельной связи связан с тем, что порядок её величины совпадает с размерами описанных в работе [8] дециметровых ионных пятен, электрические поля которых предположительно являются основой возникновения положительных стримеров. Поскольку стример распространяется до тех пор, пока находится в области достаточно сильного для поддержания его дальнейшего роста электрического поля [16, с. 172], логично предположить, что длина модельной связи не должна сильно отличаться от масштаба локализации областей, являющихся источниками сильного электрического поля грозового облака. Кроме того, хорошо известно, что достаточно длинные стримеры в воздухе неизбежно начинают ветвиться [16]. Данный факт ограничивает максимальную длину стримерного пучка, при которой его ещё можно считать однонаправленным.

Вероятность возникновения стримерного разряда с малого элемента поверхности некоторого проводника с площадью  $dS$  за малый интервал времени  $dt$  описывается выражением

$$P_s(E_n, dS, dt) = f(E_n) dS dt, \quad (1)$$

где  $E_n$  — нормальная компонента электрического поля,  $f(E_n)$  — зависящая от поля вероятность возникновения стримера в единицу времени на единицу площади поверхности проводника. В данной работе используется следующий вид зависящей от направления электрического поля на поверхности электрода функции  $f(E_n)$ :

$$f[-^2/] = \begin{cases} (E_n[/] - 5 \cdot 10^5) 25, & E_n \geq 5 \cdot 10^5 /; \\ 0, & -10^6 / < E_n < 5 \cdot 10^5 /; \\ (-E_n[/] - 10^6) 25, & E_n \leq -10^6 /. \end{cases} \quad (2)$$

Насколько известно авторам, предлагаемый в данном исследовании метод определения вероятности возникновения новой связи не был применён ни в одной опубликованной на данный момент работе. При выборе конкретного вида функции  $f(E_n)$  основной акцент был сделан на учёте

асимметрии критических полей развития стримеров с положительной и отрицательной полярностями: формула (2) отвечает тому, что отрицательные стримеры, в соответствии с многочисленными экспериментами [16], имеют вдвое бóльшие пороговые поля. В общем случае, конкретный вид функции  $f(E_n)$  определяется свойствами газовой среды (химический состав газа, температура, давление, влажность и т. д.). В данном феноменологическом исследовании, в соответствии с принципом минимализма, используется простейшая линейная зависимость от модуля напряжённости электрического поля. При этом, как будет видно из раздела 2, применяемая в работе функция  $f(E_n)$  даёт физически корректные результаты. Заметим, что функция  $f(E_n)$  не является плотностью вероятности и поэтому не нормирована на единицу. Её физический смысл — количество возникающих стримерных разрядов на  $1\text{ м}^2$  за 1 с при заданном поле  $E_n$ .

В рамках рассматриваемой модели роль электродов, дающих начало пучкам стримеров, т. е. новым рёбрам и вершинам графа, играют идеально проводящие сферы, расположенные в вершинах графа. Распределение электрического поля на поверхности сферы во внешнем поле  $\mathbf{E}_0$  описывается выражением

$$E_n(\theta) = 3 |\mathbf{E}_0| \cos \theta + E_1. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{E}_0$  — внешнее по отношению к рассматриваемой сфере поле, создаваемое постоянным вертикальным полем  $E_{\text{ext}}$  и зарядами, сосредоточенными на всех прочих вершинах графа,  $\theta$  — угловая координата точки на сфере относительно направления внешнего поля  $\mathbf{E}_0$ ,  $E_1$  — собственное поле сферы, которое при величине её заряда  $q_i$  и радиусе  $R$  может быть найдено по формуле

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R^2}. \quad (4)$$

Из (1) и (3) следует распределение вероятности возникновения стримера с поверхности сферы по углу  $\theta$ :

$$dP(\theta < \theta_0) = \frac{2\pi R^2}{3E_0} [F(3E_0 + E_1) - F(3E_0 \cos \theta_0 + E_1)] dt, \quad (5)$$

где  $F(x)$  — неопределённый интеграл от функции  $f$ . В обозначении  $dP$  присутствует дифференциал, поскольку вероятность по-прежнему записывается для дифференциально малого промежутка времени  $dt$ . Максимальное значение  $dP$  достигается при  $\theta_0 = \pi$ , когда собственное  $E_1$  и внешнее  $E_0$  поля складываются по абсолютной величине:

$$dP_{\text{max}}(\theta < \pi) = \frac{2\pi R^2}{3E_0} [F(3E_0 + E_1) - F(-3E_0 + E_1)] dt. \quad (6)$$

Для моделирования процесса образования новых рёбер графа применяется метод Монте-Карло. Для конечного, но достаточно малого шага по времени  $\Delta t$  генерируется равномерно распределённое случайное число  $\zeta \in [0; 1)$ . Формулы (5) и (6) переписываются в терминах конечных величин:

$$\Delta P(\theta < \theta_0)[\Delta t] = \frac{2\pi R^2}{3E_0} [F(3E_0 + E_1) - F(3E_0 \cos \theta_0 + E_1)] \Delta t, \quad (7)$$

$$\Delta P_{\text{max}}[\Delta t] = \frac{2\pi R^2}{3E_0} [F(3E_0 + E_1) - F(-3E_0 + E_1)] \Delta t. \quad (8)$$

Если величина  $\zeta > \Delta P_{\text{max}}[\Delta t]$ , то за промежуток  $\Delta t$  новое ребро не образуется. Если  $\zeta \leq \Delta P_{\text{max}}[\Delta t]$ , то направление нового ребра определяется корнем уравнения

$$F(3E_0 \cos \theta + E_1) = F(3E_0 + E_1) - \zeta \frac{3E_0}{2\pi R^2 \Delta t}. \quad (9)$$

Направление ребра по углу  $\varphi$  выбирается равномерно из промежутка  $[0, 2\pi)$ .

Условием корректности выбранного метода генерации случайного события является малость шага по времени  $\Delta t$ , удовлетворяющего соотношению

$$\frac{dP_{\max}}{dt} \Delta t \ll 1. \quad (10)$$

При выполнении данного условия количество сгенерированных событий роста графа в единицу времени и, как следствие, скорость роста моделируемого разряда не зависят от шага по времени  $\Delta t$ . Другими словами, количество рёбер, добавляемых за одну секунду, определяется только радиусом сфер, величиной поля и видом функции  $f(E_n)$  из (2). В проведённых расчётах фактическая скорость перемещения зарядов соответствует типичным разрядным значениям и, разумеется, много меньше скорости света, причём на каждом шаге по времени переносится лишь малая часть накопленного заряда. Формально присутствующий в численной модели перенос зарядов со сверхсветовой скоростью соответствует физическому смыслу рассматриваемых случайных процессов и, как показывают проведённые расчёты, не вносит в моделируемые явления нежелательные нефизические особенности.

Поскольку при моделировании уравнение (5) решается численно, функция  $F$  для ускорения расчётов табулируется.

Отметим, что узлы динамического графа могут располагаться сколь угодно близко друг к другу. Направление ветвления моделируемых проводников определяется методом Монте-Карло из полного диапазона телесных углов, равного  $4\pi$ . Степень ветвления вершины ограничивается лишь локальным значением электрического поля. При этом максимальное наблюдаемое в расчётах число рёбер, имеющих общий узел-источник, не превышает несколько десятков. Для сравнения, в случае моделей, в которых используется пространственная решётка, число соседних узлов и, следовательно, возникающих из одной вершины связей, всегда конечно и ограничено числом 26. Таким образом, в данной модели структура проводников и их связность может быть гораздо более богатой, чем в случае моделей, в которых используются пространственные решётки.

Образование нового ребра между парой уже существующих узлов  $i$  и  $j$  графа происходит при условии

$$\frac{|\varphi_i - \varphi_j|}{L_0} > E_n \frac{L_0}{L_{i,j}}, \quad (11)$$

где  $L_{i,j}$  — расстояние между вершинами с индексами  $i$  и  $j$ . При этом соединяемые вершины должны быть расположены достаточно близко друг к другу:

$$L_{i,j} < 3L_0, \quad (12)$$

где  $L_0 = 30$  см — длина рёбер, добавляемых в процессе роста графа. Полярность возникающего между парой уже существующих узлов канала считается положительной. Тот факт, что величина стоящего в правой части уравнения (11) поля, как правило, меньше порогового поля роста положительного стримера  $E_n = 5 \cdot 10^5$  В/м из формулы (2), связан с тем, что средняя длина появляющегося между парой уже имеющихся узлов канала превышает длину модельной связи  $L_0$ .

Отмирание ребра графа  $k$  происходит при падении его проводимости ниже критического значения. Условие удаления ребра выглядит следующим образом:

$$G_k < 0,95G_0, \quad (13)$$

где  $G_0 = 10^{-10}$  См/м — начальная проводимость канала (см. (20)), которая является свободным параметром и слабо влияет на развитие разряда.

При отмирании проводящего ребра графа одна или несколько вершин могут оказаться отсоединёнными от основного канала разряда. Впоследствии они могут снова оказаться «подключёнными» к разрядной структуре при выполнении (11) и (12), либо же оставаться изолированными, внося вклад в пространственный заряд. Диссипация заряда за время моделирования (порядка  $1 \div 2$  мс) считается пренебрежимо малой. За счёт наличия изолированных вершин, окружающих разрядный канал, модель воспроизводит чехол лидера.

### 1.3. Эволюция динамических переменных

Электрическое поле в любой точке пространства с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  находится в электростатическом приближении и вычисляется следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \nabla\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}), \quad (14)$$

где  $N$  — количество вершин графа,  $r_i$  и  $q_i$  — координаты и заряд вершины с индексом  $i$ ,  $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$  — потенциал, создаваемый внешним электрическим полем  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ . Потенциал вершины  $i$ , представляющей собой идеально проводящую сферу радиуса  $R$ , можно представить как

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R} + \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Эволюция заряда вершины  $i$  описывается уравнением непрерывности

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{N_i} I_j, \quad (16)$$

где  $N_i$  — кратность вершины  $i$ , а  $I_j$  — ориентированные токи, втекающие в вершину  $i$  или вытекающие из неё по примыкающим к данной вершине рёбрам. Ток, текущий по ребру  $j$ , определяется его проводимостью и разностью потенциалов на его концах:

$$I_j = G \frac{\pi r^2}{L} (\varphi_{j1} - \varphi_{j2}), \quad (17)$$

где  $r$  и  $L$  — радиус и длина ребра,  $\varphi_{j1}$  и  $\varphi_{j2}$  — потенциалы соединяемых ребром вершин.

В процессе развития разряда температура сосредоточенного в нём нейтрального газа увеличивается. Когда температура канала превышает характерный порог  $T^* = 3000$  К, развивается ионизационно-перегревная неустойчивость. Эволюцию температуры нейтрального газа в объёме ребра  $k$  можно описать уравнением

$$\frac{dT_k}{dt} = \frac{1}{\pi L_k R_k^2 \rho c} I_k (\varphi_{k1} - \varphi_{k2}), \quad (18)$$

где  $c = 1$  кДж/(кг · К) — удельная теплоёмкость воздуха,  $\rho = 0,63$  кг/м<sup>3</sup> — его плотность. Выражение (18) описывает джоулев нагрев газа в приближении отсутствия потери тепла за счёт теплового потока с поверхности канала. Стоит отметить, что в данной модели температура канала влияет на его свойства лишь до момента, пока она не превышает 3050 К (см. далее). Поскольку и в модели, и в реальных условиях рост температуры до этого уровня происходит за время, гораздо меньшее величины, необходимой для проявления эффекта температуры, который, к тому

же, мал при малом значении максимальной температуры канала, уравнение (14) можно считать адекватным поставленной задаче. Так, согласно [16], рост температуры до  $1500 \div 2000$  К происходит за время порядка 0,3 мкс, в то время как релаксация температуры за счёт оттока тепла с внутренней части канала становится заметной на временах не меньших, чем 1 мс [17], что сопоставимо со временем моделирования.

Эволюция проводимости ребра  $k$  и функциональный вид зависимости развития ионизационно-перегревной неустойчивости описывается следующим эмпирическим образом:

$$G_k = [1 - \alpha(T_k)] G_k^I + \alpha(T_k) G_k^{II}, \quad (19)$$

$$\frac{dG_k^I}{dt} = \left[ \eta \left( \frac{\varphi_{k1} - \varphi_{k2}}{L_k} \right)^2 - \beta \right] G_k^I. \quad (20)$$

Здесь  $G_k^I$  — характерная проводимость канала до развития неустойчивости с начальным значением  $G_0 = 1 \cdot 10^{-10}$  См/м, а  $G_k^{II} = 10$  См/м — проводимость после её развития. Коэффициент  $\alpha(T)$  — сглаженная степ-функция, описывающая скачкообразный переход от стримерной проводимости к лидерной, происходящий при приближении температуры канала к пороговому значению  $T^* = 3000$  К:

$$\alpha(T) = \begin{cases} 0, & T < T^* - 50 \text{ К}; \\ 0,5 + \sin \left[ \frac{\pi}{2} \frac{T - T^*}{100} \right], & 2950 \text{ К} \leq T \leq 3050 \text{ К}; \\ 1, & T > T^* + 50 \text{ К}. \end{cases} \quad (21)$$

Выражения (19)–(21) представляют собой один из вариантов функционального описания процесса ионизационно-перегревной неустойчивости, приводящей к преобразованию стримерного канала в часть канала «молодого» лидера молнии с проводимостью  $G_k^{II} = 10$  См/м. Тестовые расчёты показали, что от конкретного вида (21) скачкообразного изменения проводимости канала с ростом температуры качественные результаты развития разряда не зависят.

Уравнение (20) описывает эволюцию проводимости до начала развития ионизационно-перегревной неустойчивости. Параметры  $\eta = 4,3 \cdot 10^{-5} (\text{В/м})^{-2} \text{с}^{-1}$  и  $\beta = 2,5 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$  отвечают за рост температуры канала в результате выделения джоулева тепла и её диссипацию соответственно.

Использованные в расчётах параметры приведены в табл. 1.

Таблица 1. Расчётные параметры модели

Параметр	Значение
внешнее электрическое поле, $E_{\text{ext}}$	$2,7 \cdot 10^9$ В/м
радиус вершины, $R$	3 см
радиус ребра, $r$	1,4 мм
длина ребра, $L_0$	30 см
плотность воздуха, $\rho$	0,63 кг/м <sup>3</sup>
удельная теплоёмкость воздуха, $c$	$10^3$ Дж/(кг · К)
начальная проводимость ребра, $G_0$	$1 \cdot 10^{-10}$ См/м
проводимость ребра после перегревной неустойчивости, $G_k^{II}$	10 См/м
постоянная роста проводимости, $\eta$	$4,3 \cdot 10^{-5} (\text{В/м})^{-2} \text{с}^{-1}$
постоянная релаксации проводимости, $\beta$	$2,5 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$
пороговая температура перегревной неустойчивости, $T^*$	3000 К
пороговое поле роста положительных стримеров, $E^+$	$0,5 \cdot 10^6$ В/м
пороговое поле роста отрицательных стримеров, $E^-$	$1,0 \cdot 10^6$ В/м

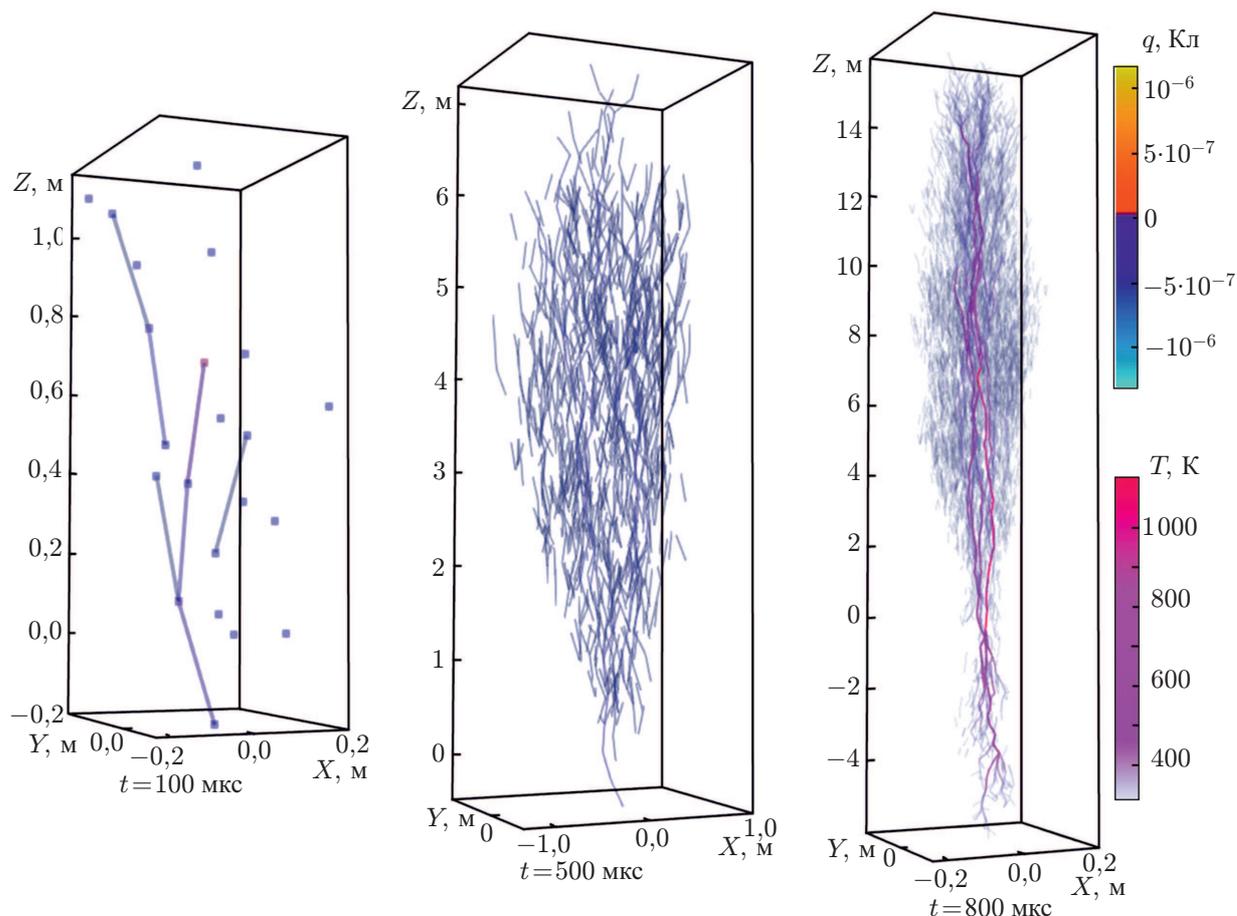


Рис. 2. Визуализация долидерной стадии развития модельного разряда. Возникновение первых одиночных стримеров, их объединение в связную токовую структуру и появление первых отрицательных стримеров

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе представленная транспортная самоорганизующаяся модель развития искрового разряда в воздухе была применена к изучению одного характерного примера начальной стадии развития молниевое разряда, на которой совокупное взаимодействие множества стримеров приводит к формированию лидера молнии.

На рис. 2 показана временная динамика моделирования долидерной части процесса зарождения молниевое канала в облаке. Спустя время  $t = 100$  мкс от начала моделирования система состоит всего из 22-вершин с небольшим количеством permanently возникающих и гаснущих связей. Электрическое поле, создаваемое разделёнными зарядами, на данном этапе недостаточно для возникновения большего числа стримерных каналов. Через 500 мкс от начала моделирования количество узлов составляет 3 330. Разряд на данном этапе представляет собой совокупность слабо связанных проводников, образующих группы по 2÷3 ребра, причём большинство гаснет через 10÷20 мкс после появления. Затем число рёбер начинает ускоренно расти, и в момент времени  $t = 800$  мкс наблюдаются устойчивые цепочки связанных проводников, эффективно прогреваемых токами поляризации. При этом общее число узлов модели составляет 25 тысяч. Электрическое поле на нижнем конце разряда становится достаточным для возникновения отрицательных стримеров.

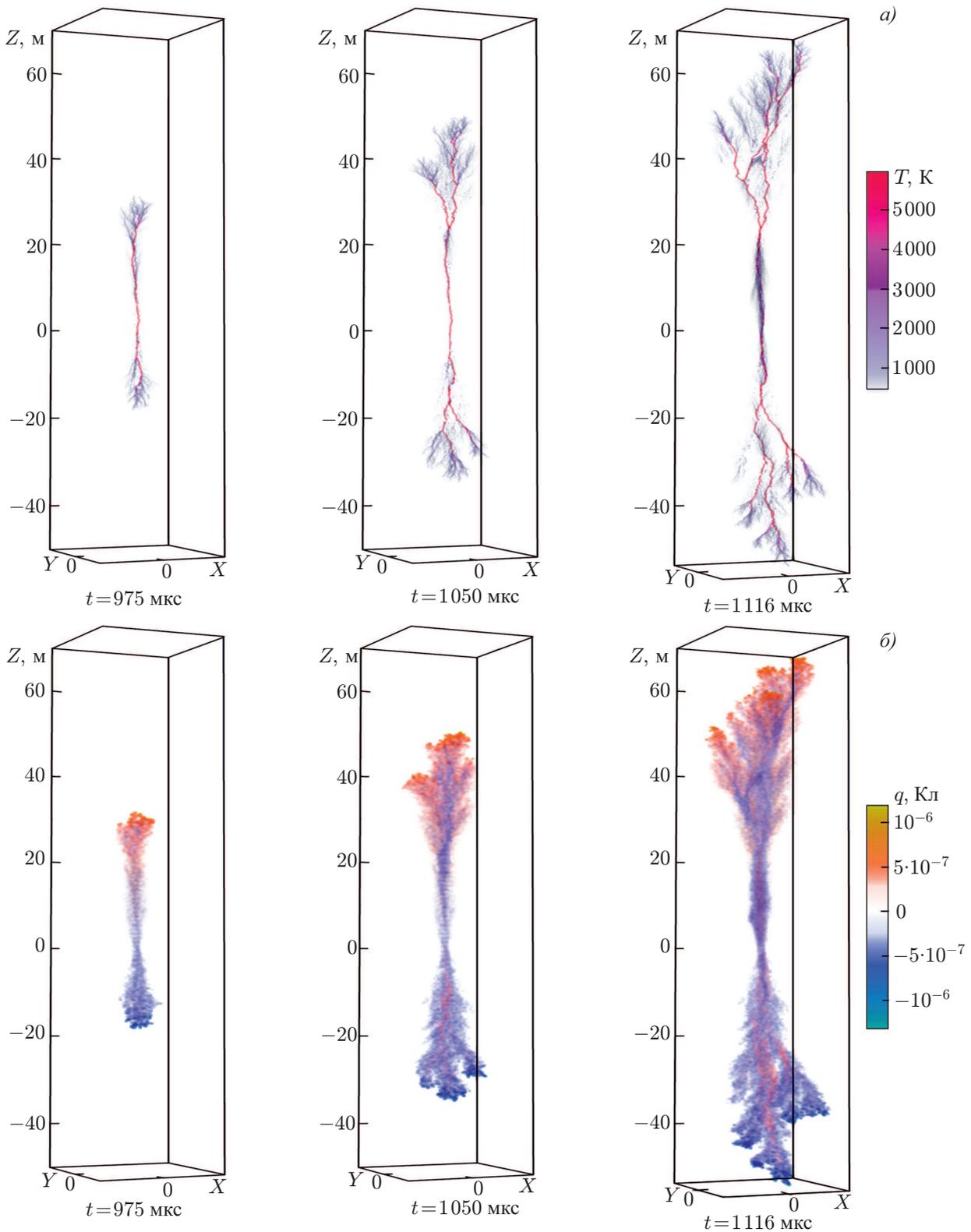


Рис. 3. Визуализация лидерной стадии развития молниевозряда. Распространение биполярного лидера молнии

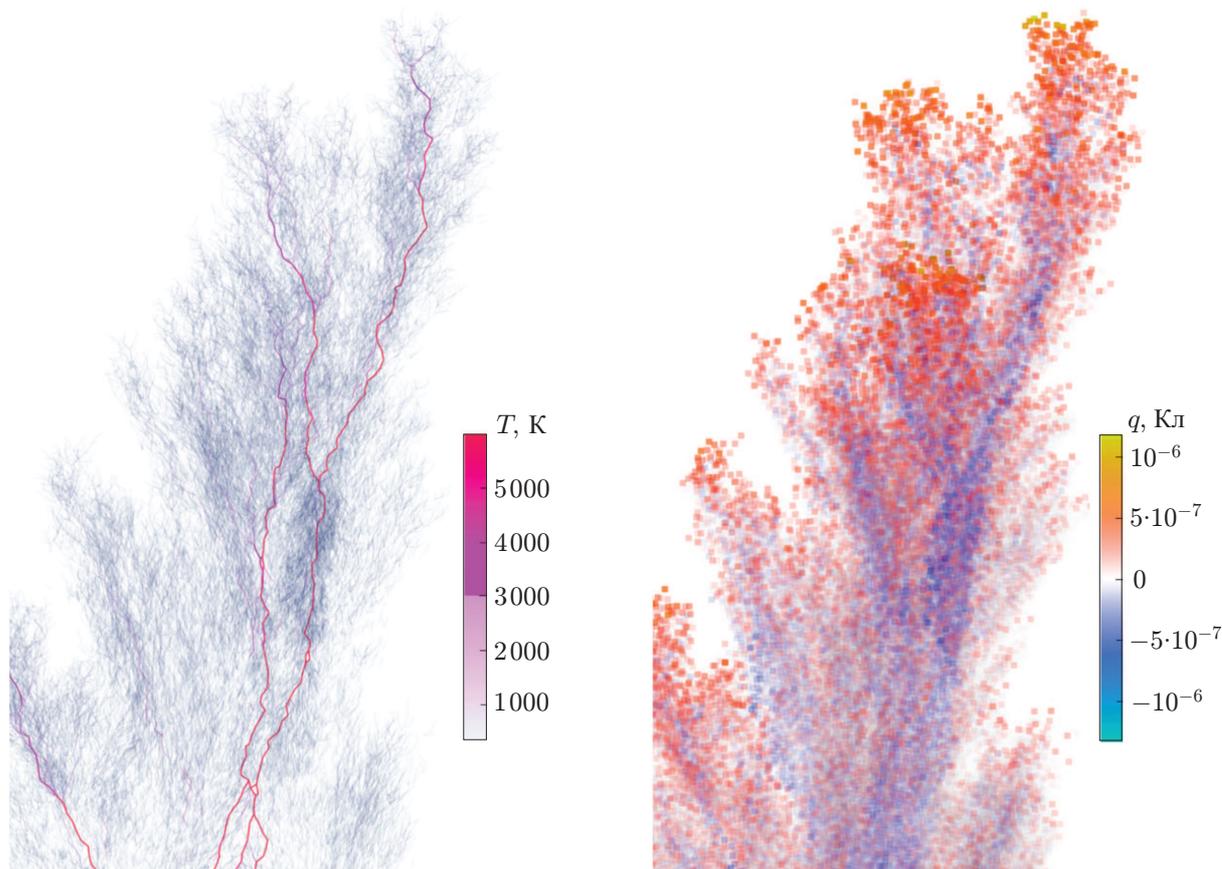


Рис. 4. Увеличенный фрагмент конца положительной части лидерного канала, визуализирующий структуру проводящих связей и распределение пространственного заряда в момент времени  $t = 1116$  мкс от начала моделирования

На рис. 3 приведена временная динамика моделируемого молниевых канала после формирования лидера. На панелях *a* показаны проводящие структуры, на панелях *b* — распределение заряда в пространстве. Начиная с момента времени  $t = 927$  мкс биполярный лидер стремительно развивается двунаправленным образом: его положительная часть распространяется вверх, а отрицательная — вниз, причём головки обоих лидеров продвигаются с примерно одинаковой скоростью порядка 210 км/с. К моменту времени  $t = 1116$  мкс число вершин модельного графа возрастает до 484 тысяч.

На рис. 4 показаны структура проводников и распределение заряда на конце положительной части биполярного лидера молнии в момент времени  $t = 1116$  мкс. Для простоты восприятия на данном рисунке отсутствуют холодные стримерные каналы и узлы, имеющие близкий к нулю заряд.

На рис. 5 показана осциллограмма тока в канале зарождающегося лидера молнии. График приведён с момента времени  $t = 500$  мкс, поскольку до этого отдельные пучки стримеров не образуют связанную цепочку. Начиная с  $t = 500$  мкс, по мере развития коллективного канала, ток стабилизируется и постепенно растёт. Увеличение тока на порядок в момент времени  $t = 927$  мкс соответствует стримерно-лидерному переходу — возникновению молниевых лидера. Второй, более плавный скачок тока при  $t = 1100$  мкс отвечает моменту соединения двух ветвей положительной части лидера с образованием петли, что приводит к снижению общего сопротивления канала.

Видеофайл, визуализирующий полный процесс развития модельного разряда, доступен по ссылке [18].

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

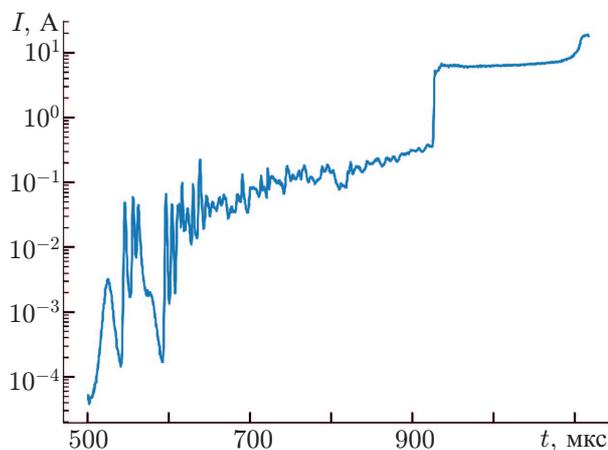


Рис. 5. Осциллограмма тока в канале зарождающегося лидера молнии

что, по крайней мере, превышают минимальное упоминаемое в литературе [20] значение радиуса стримерного канала, равное  $10^{-5}$  м. Выбор относительно малой длины модельной связи  $L_0 = 30$  см обусловлен стремлением как можно более детально описать процесс объединения множества стримеров в единый лидерный канал и, строго говоря, не нуждается в специальном обосновании, т. к. длина реального стримерного канала в зависимости от внешнего электрического поля в области его головки [16, с. 172] может быть любой. Начальная проводимость ребра  $G_0 = 10^{-10}$  См/м всего на несколько порядков превышает значение проводимости воздуха на высоте 6 км над уровнем моря, составляющее около  $10^{-13}$  См/м [21, рис. 1.3]. Это вполне согласуется с концепцией, согласно которой холодная плазма стримерного канала в области за головкой быстро теряет проводимость вследствие прилипания электронов и рекомбинации положительных и отрицательных ионов [19, с. 54]. Проводимость «зрелого» лидерного канала  $G_k^{\text{II}} = 10$  См/м на порядок выше таковой для лабораторного лидера с током 1 А [22, с. 605] и на три порядка меньше максимальной достижимой проводимости дугового канала развитой молнии [23].

Используемые в работе пороговые поля роста положительных и отрицательных стримеров, равные 5 и 10 кВ/м соответственно, совпадают со средними полями в стримерных зонах положительного и отрицательного лидеров при нормальных условиях [16]. Поскольку развитие модельного разряда происходит на высоте 6 км над уровнем моря, рассматриваемые поля, в соответствии с хорошо известным законом  $E/p = \text{const}$ , должны быть примерно вдвое меньше (согласно барометрической формуле, давление падает в  $e$  раз при увеличении высоты на каждые 8,4 км). Известно, однако, что используемые в численных моделях развития разрядов пороговые поля определяются пространственным разрешением модели и должны расти с уменьшением длины модельной связи (см. соотношение (14.39) монографии [24]), поэтому их следует рассматривать как некие эффективные значения. Для относительно малой длины элемента разрядного канала, равной 30 см, рассматриваемой в данной модели, используемые пороговые поля роста положительных и отрицательных стримеров приводят к адекватному описанию процесса инициации молниевых каналов в облаке.

В данной модели мы ассоциируем возникающую связь с однонаправленным пучком стримеров. Эта вынужденное приближение связано с тем, что стримерная зона даже слаботочного лабораторного лидера содержит более сотни тысяч одновременно развивающихся стримеров [19, с. 77], описание каждого из которых в отдельности выходит за рамки вычислительных возможностей авторов. Конкретный выбор значений физических величин, характеризующих электрические параметры стримерного пучка, определяется как имеющимися в литературе данными, так и степенью соответствия модельного разряда реальному. Так, например, радиусы модельных рёбер и вершин, составляющие 1,4 мм и 3 см соответственно, физически обоснованы в том смысле,

Следует отметить, что с точки зрения вычислений важны не значения отдельных параметров, а их комбинации. Так, например, текущие по разрядному дереву токи (17) определяются произведением проводимости связи на квадрат её радиуса, а из формулы (5) следует, что вероятность возникновения новой связи зависит не только от пороговых полей  $E^+$  и  $E^-$ , но от радиуса вершины  $R$ . Таким образом, можно утверждать, что указанные в табл. 1 значения проводимостей  $G_0$  и  $G_k^{\text{II}}$  определены с точностью до выбора радиуса канала  $r$ , а величины пороговых полей  $E^+$  и  $E^-$  имеют смысл только при указании конкретного радиуса вершины  $R$  и только в рамках предположения о её бесконечной проводимости. В связи с наличием данной неопределённости существенным критерием правильности выбора модельных параметров становятся конечные результаты расчётов, которые, как будет показано далее, вполне соответствуют реальности.

В предложенной модели вероятность возникновения новой связи или приращения существующего канала на каждом временном шаге пропорциональна его длительности  $\Delta t$ . Таким образом, можно говорить о пуассоновском характере данного процесса. В связи с этим при уменьшении шага по времени в  $N$  раз вероятность роста на каждом шаге также уменьшается в  $N$  раз, что, при прочих равных условиях, не меняет общее количество новых каналов, возникающих за единицу времени, а, следовательно, и скорости распространения разряда. Предсказываемая моделью скорость роста разрядного дерева имеет порядок величины  $10^5$  м/с и определяется величиной ребра, функцией  $F$  и другими параметрами в формуле (6), но не зависит от выбора временного шага. В проведённом моделировании переменный шаг по времени является лишь приёмом численного моделирования, обеспечивающим устойчивость интегрирования динамических переменных системы методом Рунге—Кутты 4-го порядка.

Отметим, что в данной работе учтена асимметрия полей распространения положительных и отрицательных стримеров (см. табл. 1), необходимость чего подчёркивается в работе [25]. Введение вдвое большего порогового поля роста отрицательных стримеров по сравнению с положительными позволило в полной мере воспроизвести процесс, описанный в работе [5], в которой подчёркивается ведущая роль именно положительных стримеров. Так, в модели сначала появляются положительные стримеры, переносящие положительный заряд в направлении роста и коллективным образом аккумулирующие отрицательный заряд в области точки-источника пучка. При этом создаваемое отрицательным зарядом поле позволяет инициировать отрицательные стримеры, возникающие к моменту времени  $t = 800$  мкс (см. рис. 2).

Одно из преимуществ представленной модели состоит в явном функциональном описании процесса стримерно-лидерного перехода, без которого рассмотрение зарождения молниеводного лидера было бы некорректным. Именно, преобразование стримерного канала в лидерный описывается соотношениями (18)–(21), моделирующими универсальный для искрового разряда процесс ионизационно-перегревной неустойчивости (см., например, [22]). Рост температуры газа за счёт джоулева энерговыделения  $\sigma E^2$  (см. соотношение (18)) в пучке однонаправленных стримеров, с которым ассоциируется модельная связь, приводит к увеличению приведённого поля  $E/N$  вследствие падения концентрации нейтральных частиц  $N$ , что, в свою очередь, обеспечивает быстрый рост температуры электронов  $T_e$ . В силу резкой зависимости частоты ионизации от  $T_e$  повышение температуры приводит к сильному возрастанию концентрации электронов и дальнейшему увеличению проводимости канала. Критерием, по которому в модели стримерные каналы отделяются от лидерных, является температура канала. При превышении температурой канала порогового значения  $T^* = 3000$  К, происходит быстрый рост его проводимости (см. выражение (19)), а сам канал из стримерного превращается в лидерный. Выбор пограничной температуры  $T^*$ , отделяющей стримерное состояние канала от лидерного, на уровне 3000 К связан с тем, что для сохранения электронной проводимости канал должен быть нагрет хотя бы до нескольких тысяч градусов [16].

Рассмотрение именно температуры в качестве основного фактора, определяющего состояние канала, соответствует концепции ионизационно-перегревной неустойчивости, наиболее медленным звеном которой является нагревание газа [22]. Эта неустойчивость стремится сконцентрировать ток вдоль узкого горячего канала, тем самым завершая процесс стримерно-лидерного перехода. Сразу оговоримся, что авторы не претендуют на функционально точное или количественное описание всех тонкостей сложнейшего процесса ионизационно-перегревной неустойчивости, которое неизбежно потребовало бы включения в модель элементов как плазмохимии, так и динамики эволюции радиуса канала во времени, что на текущий момент превышает имеющиеся у авторского коллектива вычислительные возможности. Более того, буквальное воспроизведение стримерно-лидерного перехода в рамках данной и любой другой подобной модели с сопоставимым пространственным разрешением невозможно хотя бы из-за того, что образование нового участка лидерного канала происходит в расположенной непосредственно перед лидерной головкой области сантиметрового масштаба [16, с. 233], в которой суммируются токи множества одновременно выпускаемых головкой лидера стримеров. Авторы, однако, убеждены, что общая идея универсального процесса ионизационно-перегревной неустойчивости, сводящегося к трансформации электрической энергии в тепловую и последующему росту проводимости канала за счёт резкого увеличения приведённого поля в нём, может быть качественно отражена даже с помощью довольно простых феноменологических соотношений (18)–(21), используемых в данной работе.

Стоит отметить, что электрические параметры модельного лидера ставят его в промежуточное положение между лабораторной длинной искрой и «зрелым» лидером молнии. Так, проводимость лидерного канала, составляющая величину порядка  $10 \text{ См/м}$  (предельное возможное в модели значение), превышает типичную проводимость лабораторного положительного лидера, равную  $1 \text{ См/м}$  [22], но на три порядка меньше проводимости дугового разряда молнии (порядка  $10^4 \text{ См/м}$  [21]). То же самое можно сказать о токе лидерного канала, составляющем около  $10 \text{ А}$  (см. рис. 5), в то время как типичные токи в каналах лабораторного и молниевых лидеров равны  $1 \text{ А}$  [22] и  $100 \text{ А}$  [21] соответственно. Продольное поле модельного лидерного канала падает до  $2,1 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ , что меньше поля в канале только что сформировавшегося стримера, которое, по крайней мере, должно превышать порог роста ( $5$  и  $10 \text{ кВ/см}$  для положительных и отрицательных стримеров соответственно). Погонная плотность чехла заряда, составляющая  $40$  и  $60 \text{ мкКл/м}$  для положительного и отрицательного модельных лидеров соответственно, также оказывается примерно на порядок меньше соответствующей величины для лидера молнии, по некоторым оценкам составляющей  $700 \div 1000 \text{ мкКл/м}$  [21].

Приведённые характеристики модельного лидера выглядят вполне естественно, т. к. в данной работе мы воспроизводим процесс формирования лидера молнии в облаке, т. е. рассматриваем переходную стадию от стримерной формы разряда к лидерной. Разумно предположить, что на начальном этапе развития электрические свойства «молодого» канала лидера молнии будут переходными между слаботочными лабораторными искровыми разрядами и установившимся дуговым каналом развитой молнии. В этом плане присутствующее в модели ограничение на максимальную допустимую проводимость канала, равную  $10 \text{ См/м}$ , не сказывается негативно на корректности полученных результатов.

Представленная в данной работе транспортная самоорганизующаяся модель начальной стадии развития молнии в облаке правильно воспроизводит ряд коллективных эффектов, явным образом не заложенных в исходный алгоритм. Во-первых, модель детально воспроизводит процесс образования чехла лидерного канала, являющегося источником импульса тока молнии на наиболее мощной по энергетике стадии возвратного удара. В данной работе образование чехла является естественным результатом развития моделируемого процесса и обеспечивается отмиранием слаботочных разрядных каналов. Хотя принято выделять два возможных источника чехла

заряда лидерного канала: стримерная зона лидера и возникающая с боковой поверхности канала стримерная корона [26], в данной работе можно говорить только о первом механизме, т. к. используемый в модели 3-сантиметровый радиус узла, с которого возникают модельные разряды, не позволяет адекватно описывать электрическое поле на поверхности лидерного канала, имеющего радиус порядка долей миллиметра [19]. Во-вторых, скорости распространения положительной и отрицательной частей модельного разряда на стадии лидера примерно совпадают и составляют около 210 км/с, что хорошо согласуется с данными натуральных наблюдений [25].

Из рис. 3 и 4 видно, что каналы положительной и отрицательной частей биполярного лидера окружены отрицательным и положительным цилиндрическими слоями заряда соответственно. Подобный эффект наблюдался в модели [27], посвящённой изучению коллективной динамики растущей с плоского электрода системы положительных стримеров. Авторы объясняют накопление отрицательного заряда в области основания положительной стримерной системы недостаточной проводимостью примыкающих к аноду разрядных каналов: поступающий от внешней более разветвлённой части системы положительных стримеров отрицательный заряд «застревает», не доходя до электрода, из-за низкой транспортной способности каналов внутренней части разрядного древа. В нашем случае наличие примыкающих к поверхностям лидерных каналов слоёв заряда, знак которых противоположен полярностям окружённых ими каналов, также объясняется тем, что проводимость ближайших к лидерным каналам стримеров оказывается недостаточной для того, чтобы полностью поставлять к лидерам приходящий от разветвлённой системы внешних стримеров заряд. Заметим, что в той же работе обосновывается физичность процесса установления проводящих связей между разрядными каналами одной и той же стримерной системы, возникающих, если заряды в паре близко расположенных узлов разрядной структуры в процессе развития разряда приобретают разные знаки. В нашей модели процесс возникновения рёбер между парой уже существующих вершин происходит аналогичным образом (см. подраздел 1.2).

В процессе отладки и настройки модели была качественно исследована её чувствительность к изменению параметров. По результатам численных экспериментов, чувствительность модели к отдельным параметрам можно охарактеризовать следующим образом.

1) Критическая температура  $T^*$  влияет на время начала стримерно-лидерного перехода и скорость распространения лидера. Модель воспроизводит качественно схожее поведение как минимум в пределах  $T^* \in [1\ 000\ \text{C}^\circ, 6\ 000\ \text{C}^\circ]$  при выборе подходящего внешнего поля  $E_{\text{ext}}$ .

2) Радиус вершины  $R$  и длина ребра  $L_0$  влияют на скорость перераспределения заряда, а также на скорость ветвления. Скорость переноса заряда в среднем определяется отношением  $R/L_0$ . Модель качественно сохраняет поведение в пределах  $R \in [1\ \text{см}, 5\ \text{см}]$ ,  $L_0 \in [10\ \text{см}, 60\ \text{см}]$  при выборе подходящего внешнего поля  $E_{\text{ext}}$ .

3) Радиус ребра  $r$  определяет его проводимость и, соответственно, скорость распространения заряда. Описанная динамика модели сохраняется как минимум при  $r \in [1\ \text{мм}, 3\ \text{мм}]$ .

4) Изменение начальной проводимости ребра  $G_0$  практически не существенно в пределах  $G_0 \in [10^{-12}\ \text{См/м}, 10^{-7}\ \text{См/м}]$  и не влияет ни на качественное, ни на количественное поведение модели. Данный эффект объясняется тем, что, согласно выражению (20), при возникновении нового ребра на начальном этапе происходит экспоненциальный рост проводимости, которая за короткое время достигает значения порядка  $10^{-4} \div 10^{-2}\ \text{См/м}$ . Таким образом, начальная проводимость  $G_0$  может быть выбрана достаточно произвольно.

5) Постоянные роста и релаксации проводимости  $\eta$  и  $\beta$ , а также внешнее поле  $E_{\text{ext}}$  существенным образом влияют на поведение модели. Из (20) видно, что они характеризуют в том числе критическое поле поддержания проводимости в стримерном пучке  $E_s = \sqrt{\beta/\eta}$ . Для того, чтобы происходил рост разрядного дерева, отношение  $E_{\text{ext}}/E_s$  должно составлять не менее 1,1. При изменении данного соотношения в пределах 10 % результирующее время возникновения

стримерно-лидерного перехода меняется в несколько раз.

б) Пороговые поля развития положительных и отрицательных стримеров  $E^+$  и  $E^-$  определяют асимметрию развития положительной и отрицательной частей разрядного дерева и регулируют скорости их распространения. Их изменение в пределах 20 % не оказывает существенного влияния на поведение модели.

Таким образом, модель обладает структурной устойчивостью вблизи выбранных значений параметров, что является необходимым критерием её корректности.

Отметим, что устойчивость численного решения модели обеспечивается в первую очередь корректно использованными численными методами интегрирования дифференциальных уравнений, что описано в Приложении 1. Автоматический выбор шага интегрирования совместно со схемой Рунге—Кутты 4-го порядка является общепринятым подходом к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности. Далее, в модели присутствует вносимая методом Монте-Карло случайность, что приводит к тому, что при каждом новом запуске конкретная реализация разрядного дерева происходит уникальным образом. Однако макропараметры (токи, заряды положительной и отрицательной частей, скорости распространения лидера) различаются не более, чем на единицы процентов. Для каждого расчёта дополнительно проверяется закон сохранения заряда. Результаты проверки показывают, что отклонение суммарного заряда от начального значения (от нуля) не превышает 0,3 % от суммарного положительного заряда. Таким образом, случайность и многократные запуски модели при одинаковой конфигурации позволяют уверенно заключить, что описанное в статье решение является устойчивым.

## ВЫВОДЫ

В данной работе представлена мелкомасштабная транспортная модель развития разряда, применённая к описанию процесса инициации молнии в облаке. Среди прогрессивных особенностей модели можно выделить отсутствие пространственной решётки, учёт асимметрии развития положительных и отрицательных стримеров и рассмотрение временной эволюции параметров разрядных каналов. Используемый в работе критерий стримерно-лидерного перехода сформулирован в терминах температуры канала и опирается на хорошо известный универсальный механизм ионизационно-перегревной неустойчивости.

Описанная в работе модель корректно воспроизводит ряд коллективных эффектов, явным образом не заложенных в исходный алгоритм. Среди них можно выделить процесс образования чехла лидерного канала, являющегося критически важным на наиболее интенсивной стадии возвратного удара, когда накопленный в чехле заряд стекает в землю, и результирующую скорость распространения положительной и отрицательной частей модельного билидера, которая хорошо согласуется с данными натурных наблюдений.

Было показано, что прогретый хорошо проводящий канал лидера молнии в воздухе формируется за счёт объединения токов десятков тысяч холодных слабо проводящих стримерных каналов и имеет электрические характеристики, которые можно охарактеризовать как промежуточные между известными для лабораторного и развитого молниевых разрядов. Морфология и электрические параметры разрядного древа зарождающегося модельного лидера молнии хорошо согласуются с современными данными о развитии молниевых разрядов. Расчёты проводились в достаточно широкой области параметров, для которой качественный характер развития разряда оказался одинаковым.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить В. А. Ракова за плодотворные дискуссии по теме данного исследования и рецензента статьи за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 19-17-00183).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

## Технические аспекты модели

Для численного расчёта транспортной самоорганизующейся модели был разработан специальный программный пакет, в основе которого лежит принцип модульности: логическая структура транспортной системы, законы эволюции динамических переменных и возникновения бифуркаций, разностная схема, подсистема вывода и прочие компоненты независимы друг от друга. Такой подход позволяет при необходимости легко модифицировать физические принципы, лежащие в основе модели. Программный пакет написан на языке C++ в соответствии с принципами объектно-ориентированного программирования. Пакет содержит приблизительно 15 тысяч строк кода. При разработке использовался ряд библиотек, основными из которых являются libVTK, Intel TBB, Qt, GTest и Boost. Для визуализации расчётов применён пакет ParaView. Полный исходный код модели находится в открытом доступе [28].

Алгоритм расчёта модели следующий.

1. Интегрирование динамических переменных, привязанных к вершинам и рёбрам графа, по схеме Рунге—Кутты четвёртого порядка с текущим шагом по времени  $\Delta t$  :

- (а) вычисление электрических полей и потенциалов во всех вершинах графа;
- (б) вычисление правых частей дифференциальных уравнений для всех динамических переменных для подшага метода Рунге—Кутты;
- (в) выполнение подшага;
- (г) выполнение п. 1а—п. 1в для всех подшагов;
- (д) оценка приращений динамических переменных. Модификация шага по времени  $\Delta t$  при недостаточной или избыточной точности расчёта. В случае, если шаг необходимо уменьшить — повторный расчёт итерации начиная с п. 1а.

2. Расчёт вероятностей и параметров бифуркаций системы в соответствии с введёнными правилами:

- (а) генерация новых вершин и рёбер графа методом Монте-Карло в соответствии с (9);
- (б) поиск и удаление рёбер с проводимостью ниже порогового значения;
- (в) нахождение и соединение пар вершин, среднее поле между которыми превосходит критическое

3. Вывод текущего состояния модели в файлы, если прошло достаточно модельного времени от предыдущего сохранения состояния; визуализация через графический интерфейс, если требуется.

Рассмотрим более подробно алгоритм выбора шага по времени  $\Delta t$  (п. 1д). На основе текущего значения  $\Delta t$  вычисляются приращения  $\{\Delta\psi_i\}$  всех динамических переменных  $\{\psi_i\}$ . Рассмотрим только такие переменные  $\{\tilde{\psi}_i\} \subset \{\psi_i\}$ , модуль которых уменьшается:  $\tilde{\psi}_i \cdot \Delta\tilde{\psi}_i < 0$ .

Для каждой динамической переменной из  $\{\tilde{\psi}_i\}$  вычисляется  $\tilde{\omega}_i = \Delta\tilde{\psi}_i/\tilde{\psi}_i$  — относительное изменение её модуля. Рассмотрим максимальное  $\tilde{\omega}^* = \max(\tilde{\omega}_i)$  по всем динамическим переменным из  $\{\tilde{\psi}_i\}$ . Итерация по времени с шагом  $\Delta t$  считается приемлемой, если  $\tilde{\omega}^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , где  $\omega_{\min} = 0,05$  и  $\omega_{\max} = 0,30$ .

В случае, если  $\tilde{\omega}^* > \omega_{\max}$ , итерация считается недостаточно точной, её результаты отбрасываются, шаг по времени  $\Delta t$  уменьшается на 40 %, и итерация повторяется. Если  $\tilde{\omega}^*$  по прежнему велика, процедура повторяется. В случае,  $\tilde{\omega}^* < \omega_{\min}$ , итерация считается избыточно точной. Результаты её расчёта сохраняются, однако на следующей итерации  $\Delta t$  увеличивается на 50 %.

Данному подходу можно дать следующую физическую интерпретацию. Если в качестве динамической переменной  $\tilde{\psi}_i$  выступает заряд на некоторой вершине графа  $q_i$ , то условие  $\Delta q_i/q_i < \omega_{\max}$  означает, что за шаг по времени  $\Delta t$  вершина разряжается не более, чем на  $\omega_{\max}$  от своего заряда, что означает малость  $\Delta t$  по сравнению с характерным временем  $RC$ -цепи, образуемой данной вершиной и подключёнными к ней рёбрами-сопротивлениями. В приведённых расчётах минимальный шаг по времени составлял  $10^{-12}$  с и был по крайней мере на порядок меньше минимального времени нарастания тока и тем более его затухания.

Использование такого подхода совместно с применением метода Рунге—Кутты 4-го порядка позволяет избежать как потери точности при моделировании системы, так и ускорить численные расчёты в ситуациях, когда в системе отсутствуют достаточно быстрые процессы. Значения  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  подобраны на основе тестовых запусков модели и решения тестовых задач. Главным критерием устойчивости являлось сохранение заряда системы в пределах 1 %.

Наиболее затратной с точки зрения вычислений задачей является расчёт суммарного электрического поля в каждой вершине графа, вклад в которое дают рассматриваемая и все остальные вершины графа (п. 1а). Расчёт с прямым суммированием полей по формуле (14) имеет сложность порядка  $O(M^2)$  для каждого подшага численной схемы, где  $M$  — число вершин графа. Соотношение между модельным временем  $t_{\text{mod}}$  и временем вычислений  $t_{\text{calc}}$  при постоянной скорости роста числа вершин графа имеет вид

$$t_{\text{mod}} \propto t_{\text{calc}}^{1/3}. \quad (\text{П1})$$

Для оптимизации расчётов электрического поля реализован метод восьмеричного дерева — случай  $k$ -дерева [29] для трёхмерного пространства. Данный подход позволяет произвольно регулировать соотношение между скоростью и точностью вычислений поля, а также находить вершину, ближайшую к заданной точке за время порядка  $O(\log_8 M)$  (быстрое нахождение соседних вершин необходимо для добавления рёбер между уже существующими вершинами, см. раздел 1.2). В основе алгоритма лежит идея разбиения рабочей области пространства на 8 кубов, каждый из которых, в свою очередь, также разбивается на 8 подкубов, и так далее. Для каждого куба известны центры масс и величины расположенных внутри положительного и отрицательного зарядов. Вклад в электрическое поле от достаточно удалённых зарядов можно рассчитывать приближённо, выполняя итерации не по всем зарядам, а лишь по кубам определённого размера.

Приведённый в работе расчёт выполнялся в течение трёх суток на вычислительном сервере с 32 процессорными ядрами на базе четырёх процессоров Intel Xeon E5-4620 v2 @ 2.60 ГГц. Приложение использовало 2 Гб оперативной памяти.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иудин Д. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 5. С. 418–441.
2. Marshall T. C., McCarthy M. P., Rust W. D. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, No. D4. P. 7097–7103. <https://doi.org/10.1029/95JD00020>
3. Loeb L. B. // J. Geophys. Res. 1966. V. 71, No. 20. P. 4711–4721. <https://doi.org/10.1029/JZ071i020p04711>
4. Phelps C. T. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 1974. V. 36, No. 1. P. 103–111. [https://doi.org/10.1016/0021-9169\(74\)90070-1](https://doi.org/10.1016/0021-9169(74)90070-1)
5. Griffiths R. F., Phelps C. T. // J. Geophys. Res. 1976. V. 81, No. 21. P. 3671–3676. <https://doi.org/10.1029/JC081i021p03671>
6. Petersen D., Bailey M., Beasley W. H., et al. // J. Geophys. Res. 2008. V. 113, No. D17. Art. no. D17205. <https://doi.org/10.1029/2007JD009036>

7. Иудин Д. И., Давыденко С. С., Готлиб В. М. и др. // Успехи физ. наук. 2018. Т. 188, № 8. С. 850–864. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.04.038221>
8. Iudin D. I., Rakov V. A., Syssoev A. A., Bulatov A. A. // Procs. Intern. Symp. «Thunderstorm and Elementary Particle Acceleration» (ТЕРА-2018). 17–20 September 2018. Byurakan, Armenia. P. 118–136.
9. Iudin D. I., Rakov V. A., Syssoev A. A., et al. // Climate and Atmospheric Science. 2019. V. 2, No. 1. Art. no. 46. <https://doi.org/10.1038/s41612-019-0102-8>
10. Iudin D. I., Rakov V. A., Mareev E. A., et al. // J. Geophys. Res. Atmos. 2017. V. 122, No. 12. P. 6416–6430. <https://doi.org/10.1002/2016jd026261>
11. Mansell E. R., MacGorman D. R., Ziegler C. L., Straka J. M. // J. Geophys. Res. Atmos. 2002. V. 107, No. D9. Art. no. 4075. <https://doi.org/10.1029/2000jd000244>
12. Mansell E. R., Ziegler C. L., Bruning E. C. // J. Atm. Sciences. 2010. V. 67, No. 1. P. 171–194. <https://doi.org/10.1175/2009jas2965.1>
13. Rioussset J. A., Pasko V. P., Krehbiel P. R., et al. // J. Geophys. Res. 2007. V. 112, No. D15. Art. no. D15203. <https://doi.org/10.1029/2006jd007621>
14. Wang H., Guo F., Zhao T., et al. // Atmos. Res. 2016. V. 169. P. 183–190. <https://doi.org/10.1016/j.atmosres.2015.10.011>
15. Williams E. // The Lightning Flash / ed. by V. Cooray. London : Institution of Engineering and Technology, 2014. P. 1–14. [https://doi.org/10.1049/PBPO069E\\_ch1](https://doi.org/10.1049/PBPO069E_ch1)
16. Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Искровой разряд. М. : Изд-во МФТИ, 1997. 320 с.
17. Uman M. A., Voshall R. E. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73, No. 2. P. 497–506. <https://doi.org/10.1029/JB073i002p00497>
18. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3560689>
19. Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Физика молнии и молниезащиты. М. : Физматлит, 2001. 320 с.
20. Gallimberty I., Vacchiaga G., Bondiou-Clergerie A., et al. // C. R. Physique. 2002. V. 3, No. 3. P. 1335–1359. [https://doi.org/10.1016/S1631-0705\(02\)01414-7](https://doi.org/10.1016/S1631-0705(02)01414-7)
21. Rakov V. A., Uman M. A. Lightning: Physics and effects. New York : Cambridge University Press, 2003. 687 p.
22. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллек», 2009. 736 с.
23. Rakov V. A. // J. Geophys. Res. 1998. V. 103, No. D2. P. 1879–1887. <https://doi.org/10.1029/97jd03116>
24. Sadiku M. N. O. Elements of electromagnetics. 7th ed. Oxford : Oxford University Press, 2018. 895 p.
25. van der Velde O. A. // J. Geophys. Res. Atmos. 2013. V. 118, No. 24. P. 13504–13519. <https://doi.org/10.1002/2013jd020257>
26. Maslowski G., Rakov V. A. // J. Geophys. Res. 2006. V. 111, No. D14. Art. no. D14110. <https://doi.org/10.1029/2005jd006858>
27. Luque A., Ute E. // New J. Phys. 2014. V. 16, No. 1. Art. no. 013039. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/013039>
28. <https://github.com/DAlexis/self-organizing-transport-model>
29. Bentley J. L. // Commun. ACM. 1975. V. 18, No. 9. P. 509–517. <https://doi.org/10.1145/361002.361007>

Поступила в редакцию 18 мая 2018 г.; принята в печать 30 января 2020 г.

## SELF-ORGANIZING TRANSPORT MODEL OF A SPARK DISCHARGE IN A THUNDERSTORM CLOUD

*A. A. Bulatov, D. I. Iudin, and A. A. Sysoev*

We propose a small-scale transport model of formation of the electric-discharge tree and analyze its implementation for one characteristic case of the thundercloud conditions. The following innovative features of the model can be emphasized: no tie to the spatial grid, high spatiotemporal resolution, and allowance for the asymmetry of the development of the positive and negative streamers and the temporal evolution of the discharge-channel parameters. The criterion of the streamer-to-leader transition, which is used in this work, is formulated in terms of the channel temperature and is based on the well-known mechanism of ionization-overheating instability, which is universal for the spark discharge. Within the framework of the described approach, a heated well-conducting leader channel is formed by combining the currents of tens of thousands of streamers, each of which initially has negligible conductivity and the temperature, which does not differ from the ambient temperature. The model bi-leader tree has electrodynamic characteristics that are intermediate between those known for the laboratory long spark and the developed lightning, which is expected for an “immature” lightning leader. The morphology and electrical parameters of the calculated discharge tree of the incipient model lightning leader agree with the modern data on the lightning-discharge development.