

УДК 534.222

## РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МИКРО- И СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ЧАСТОТЫ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*В. Е. Назаров\*, С. Б. Кияшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложены реологические модели микро- и структурно-неоднородных сред, объясняющие рост их акустической нелинейности при увеличении частоты волны. Получены уравнения состояния таких сред и определены частотные зависимости параметров нелинейности для процессов генерации второй гармоники и разностной частоты для сред с квадратичной упругой нелинейностью.

### ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные акустические свойства многих твердотельных сред, в частности, поликристаллических металлов и горных пород, композитных и керамических материалов, не соответствуют «классической» 5- и 9-константной теории упругости, определяющей уравнение состояния однородных твёрдых тел [1–4]. Для микронеоднородных твёрдых тел, содержащих нелинейные вязкоупругие микродефекты (дислокации, трещины, зёрна и т. д.) [4–10], это связано со следующими причинами.

Во-первых, акустическая нелинейность микронеоднородных твёрдых тел является аномально высокой (по сравнению со слабонелинейными однородными средами). Характерно также, что нелинейность микронеоднородных сред, как правило, описывается неаналитической функцией (в частности, гистерезисной [11–13], разномодульной [14], диссипативной [7] и т. д.), в то время как нелинейность однородных сред (для продольных деформаций и волн) является квадратичной (аналитической) функцией деформации.

Во-вторых, нелинейность микронеоднородных сред обладает дисперсией, т. е. зависит от частоты, в то время как упругая нелинейность однородных твёрдых тел безынерционна и не зависит от частоты волны.

Кроме того, в широком диапазоне частот микронеоднородные среды часто обладают независящим от частоты декрементом затухания и дисперсией фазовой скорости [15, 16], тогда как для однородных сред декремент затухания пропорционален частоте, а дисперсия фазовой скорости отсутствует. В связи с этим для описания нелинейных волновых процессов в микронеоднородных средах была предложена реологическая модель микронеоднородной среды, получено её уравнение состояния [17–19], рассмотрены нелинейные (квадратичные) акустические эффекты и определены параметры нелинейности среды для таких эффектов<sup>1</sup>. Модель (см. рис. 1) состоит

\* v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

<sup>1</sup> Реологическая модель упругой среды — это её «принципиальная схема» (аналогично радиотехнике), состоящая из последовательных и параллельных соединений различных механических элементов, обладающих фундаментальными реологическими свойствами (упругостью, вязкостью, инерционностью, нелинейностью, пластичностью и т. д.). В такой схеме «мысленное» функциональное поведение реологической модели соответствует поведению рассматриваемой среды. Следует отметить, что подобный подход успешно применялся Л. А. Островским при изучении и моделировании нелинейных волн различной природы в различных средах на так называемых длинных LCR-линиях, состоящих из последовательных и параллельных соединений радиотехнических элементов: нелинейных индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений [20, 21].

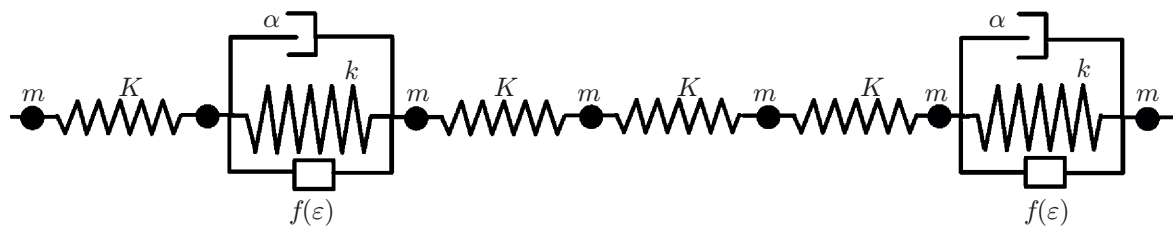


Рис. 1. Реологическая модель микронеоднородной среды, нелинейность которой уменьшается с ростом частоты:  $K$  — упругость жёсткой пружины,  $k$  — упругость мягкой пружины,  $K \gg k$ ,  $m$  — масса,  $\alpha$  — демпфер,  $f(\varepsilon)$  — нелинейный элемент [10–12]

из одномерной неоднородной цепочки последовательно соединённых точечных масс  $m$ , линейных идеально упругих пружинок (с коэффициентом упругости  $K$ ) и относительно редких нелинейных вязкоупругих элементов (с коэффициентом упругости  $k \ll K$ ). В этой модели однородные участки цепочки, состоящие из масс и жёстких упругих звеньев — пружинок, соответствуют областям бездефектного идеально упругого твёрдого тела (это модель идеального кристалла [22]), а части цепочки, состоящие из нелинейных вязкоупругих элементов, соответствуют мягким дефектам.

В работах [17–19, 23–25] было показано, что из-за релаксации нелинейных вязкоупругих дефектов эффективные параметры нелинейности таких микронеоднородных сред уменьшаются с ростом частоты волны. В этой модели учитывалось, что микронеоднородные среды содержат различные нелинейные вязкоупругие микродефекты (трещины, полости, зёрна, дислокации и т. д.), характерный размер которых мал по сравнению с длиной акустической волны [5]; при этом такие дефекты (в низкочастотном диапазоне) характеризуются большей сжимаемостью по сравнению с окружающим более жёстким материалом. Относительно высокая сжимаемость дефектов (на низких частотах) приводит к тому, что под действием напряжения упругой волны для них имеет место повышенная деформация (и, соответственно, скорость деформации), значительно превышающая деформацию (и скорость деформации) окружающего однородного твёрдого тела. В результате акустическая нелинейность, диссипация и дисперсия фазовой скорости микронеоднородных сред будут определяться в основном именно этими сильно деформируемыми дефектами. Механизм частотной зависимости (т. е. дисперсии) акустической нелинейности такой среды объясняется следующим образом. С ростом частоты акустической волны «жёсткость» нелинейных вязкоупругих дефектов увеличивается, а их деформация уменьшается; это приводит к увеличению линейного модуля упругости и коэффициента затухания, а также к уменьшению нелинейности микронеоднородной среды.

В работах [26, 27] при изучении генерации гармоник в некоторых пьезокерамических и композитных материалах было обнаружено, что с увеличением частоты продольной ультразвуковой волны (в довольно высокочастотном диапазоне от 5 до 30 МГц) имеет место заметный (в несколько раз) рост квадратичного параметра нелинейности. (Для определённости подобные материалы мы будем называть структурно-неоднородными, т. к., обладая некоторой надмолекулярной структурой, они не являются однородными, а в высокочастотном диапазоне, где длина волны сравнима с размерами их структуры, они не являются и микронеоднородными.)

Теоретическое описание генерации гармоник в этих материалах проводилось в рамках «классической» 5-константной (и 9-константной) теории упругости [1–4], в которой квадратичный (и кубичный) параметр нелинейности (для каждого материала) имеет постоянное значение. В этих работах методом возмущений были получены выражения для амплитуд второй и третьей гармоник первоначально гармонической волны. Из сравнения выражения для амплитуды второй гармоники с результатами экспериментов было обнаружено, что при увеличении частоты волны значения (постоянных в теории и не зависящих от частоты) квадратичных параметров

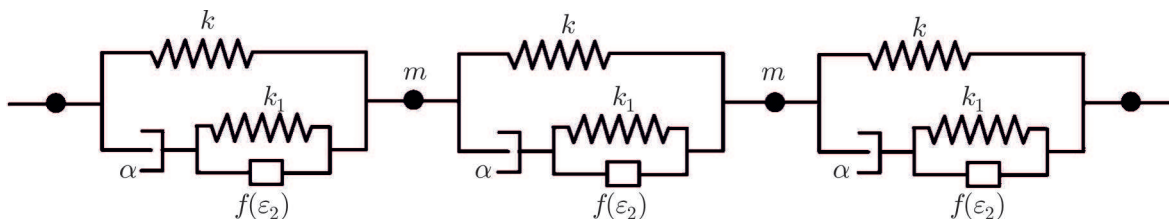


Рис. 2. Реологическая модель структурно-неоднородной среды, нелинейность которой увеличивается с ростом частоты

нелинейности этих материалов растут. Это свидетельствует о несправедливости применения 5-константной теории упругости к исследованным пьезокерамическим и композитным материалам. Таким образом, для описания нелинейных волновых процессов в средах и материалах, акустическая нелинейность которых увеличивается с ростом частоты, необходимо создание реологических моделей таких сред и получение их уравнений состояния.

В данной работе на основе модификации реологической модели микронеоднородной среды [17–19], в которой нелинейность уменьшается с ростом частоты волны, предложены реологические модели микро- и структурно-неоднородных сред, которые объясняют рост их нелинейности при увеличении частоты волны. Получены уравнения состояния таких сред и определены нелинейные параметры для эффектов генерации второй гармоники и разностной частоты для сред с упругой квадратичной нелинейностью.

### 1. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ, НЕЛИНЕЙНОСТЬ КОТОРОЙ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ С РОСТОМ ЧАСТОТЫ

Реологическая модель структурно-неоднородной среды, отвечающая росту её акустической нелинейности при увеличении частоты волны, показана на рис. 2. Модель состоит из одномерной однородной цепочки последовательно соединённых точечных масс  $m$  и нелинейных вязкоупругих звеньев. Каждое такое звено состоит из параллельного соединения линейного идеально упругого элемента — жёсткой пружины (с коэффициентом упругости  $k$ ) и последовательного соединения линейного демпфера с параллельным соединением другого идеально упругого элемента — мягкой пружины (с коэффициентами упругости  $k_1 = \zeta k \ll k, \zeta \ll 1$ ) и нелинейного элемента. Будем считать, что все звенья такой цепочки имеют одинаковую длину  $l$ , при этом их число на длине  $L$  равно  $n$  ( $l \ll L = nl \ll \Lambda, \Lambda$  — характерная длина волны). Поскольку цепочка однородная и все её звенья одинаковы, уравнение состояния одного звена будет определять уравнение состояния всей цепочки.

При частоте волны  $\omega \ll \sqrt{\zeta k/m}$  уравнения для идеально упругих пружин и нелинейных вязкоупругих элементов, согласно реологической модели среды, имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{1}$$

$$\sigma_0 = E\varepsilon, \quad \sigma_1 = \alpha \dot{\varepsilon}_1 = \zeta E [\varepsilon_2 - f(\varepsilon_2)], \tag{2}$$

где  $\sigma$  — напряжение, действующее на всё звено цепочки,  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  — напряжения, действующие на жёсткую пружину и нелинейный вязкоупругий элемент звена,  $\varepsilon$  — деформация жёсткой пружины,  $\varepsilon_1$  — деформация демпфера,  $\varepsilon_2$  — деформация мягкой пружины,  $f(\varepsilon_2)$  — нелинейная функция, описывающая деформацию нелинейного элемента,  $|f(\varepsilon_2)| \ll |\varepsilon_2|, E = kl, \alpha$  — коэффициент вязкости, точка означает производную по времени  $t$ . Заметим, что нелинейная функция  $f(\varepsilon_2)$ , введённая в уравнение (2) как малая поправка, является произвольной и может быть любой:

упругой степенной, разномодульной, гистерезисной, диссипативной и т.д. Если  $f(\varepsilon_2) = 0$ , то каждое вязкоупругое звено цепочки является моделью стандартного линейного тела [28].

Из (1) и (2) получаем уравнение для  $\varepsilon_2$ :

$$\dot{\varepsilon}_2 + \Omega[\varepsilon_2 - f(\varepsilon_2)] = \dot{\varepsilon}, \quad (3)$$

где  $\Omega = \zeta E/\alpha$  — релаксационная частота. Решая это уравнение методом последовательных приближений, т.е. полагая, что  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)} + \dots$ ,  $|\varepsilon_2^{(2)}| \ll |\varepsilon_2^{(1)}|$ , находим

$$\varepsilon_2^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 = \varepsilon(t) - \Omega \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1, \quad (4)$$

$$\varepsilon_2^{(2)}(t) = \Omega \int_{-\infty}^t f \left\{ \int_{-\infty}^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right\} \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнения (1) и (2), получаем нелинейное динамическое уравнение состояния структурно-неоднородной среды:

$$\sigma(\varepsilon) = E_1 \left( \varepsilon - \frac{\zeta \Omega}{1 + \zeta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 - \frac{\zeta}{1 + \zeta} \left\{ f \left( \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \Omega \int_{-\infty}^t f \left( \int_{-\infty}^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right\} \right), \quad (6)$$

где  $E_1 = E(1 + \zeta)$ .

Уравнение состояния (6) содержит одно линейное релаксационное и два нелинейных релаксационных слагаемых, при этом последние не независимы от линейного (как для однородной среды [4, 29]), т.к. нелинейность структурно-неоднородной среды зависит от её линейных релаксационных свойств. Линейная релаксация приводит к линейным диссипации и дисперсии акустических волн, а нелинейная релаксация — к зависимости нелинейных свойств среды от частоты первичной волны и частот вторичных волн.

Из уравнения (6) видно, что линейные диссипативные и дисперсионные свойства такой структурно-неоднородной среды определяются релаксационным интегралом  $R[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \times \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1$ , как и для однородных сред с релаксацией [4, 29, 17–19]. Из уравнения состояния (6) также следует, что если  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\Omega \rightarrow \infty$ ), то нелинейный элемент не деформируется и нелинейность структурно-неоднородной среды стремится к нулю. В низкочастотном диапазоне ( $\omega \ll \Omega$ ), когда  $|\varepsilon_1| \gg |\varepsilon_2|$ , получим  $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon + \alpha\dot{\varepsilon}$ , а в высокочастотном пределе ( $\omega \gg \Omega$ ), когда  $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_2|$ , имеем  $\sigma(\varepsilon) = E_1[\varepsilon - \zeta f(\varepsilon)/(1 + \zeta)]$ . Таким образом, с ростом частоты волны от 0 до  $\omega \gg \Omega$  модуль упругости и нелинейность среды увеличиваются от  $E$  до  $E_1 = E(1 + \zeta)$  и от 0 до  $\zeta f(\varepsilon)/(1 + \zeta)$  соответственно.

В общем случае нелинейные вязкоупругие звенья цепочки могут быть неодинаковыми, при этом уравнение состояния среды будет иметь вид

$$\sigma(\varepsilon) = E \int_0^1 \int_0^\infty \left( (1 + \zeta)\varepsilon - \zeta \Omega \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 - \zeta \left[ f \left( \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \right. \right.$$

$$- \Omega \int_{-\infty}^t f \left( \int_{-\infty}^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \Big) \nu(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega, \quad (7)$$

где  $\nu(\zeta, \Omega)$  — функция распределения нелинейных вязкоупругих звеньев по параметрам  $\zeta$  и  $\Omega$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $0 \leq \Omega < \infty$ .

## 2. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ, НЕЛИНЕЙНОСТЬ КОТОРОЙ УВЕЛИЧИВАЕТСЯ С РОСТОМ ЧАСТОТЫ

Как и для микронеоднородной среды [17–19], в которой акустическая нелинейность уменьшается с ростом частоты, рассмотренную выше модель нелинейного вязкоупругого звена для структурно-неоднородной среды можно применить и для модели микронеоднородной среды, в которой нелинейность увеличивается с ростом частоты. Модель такой среды (см. рис. 3) состоит из неоднородной цепочки последовательно соединённых точечных масс  $m$ , линейных идеально упругих жёстких пружинок и редких относительно мягких нелинейных вязкоупругих звеньев. В этой модели, также как и в работах [17–19], однородные участки цепочки, состоящие из масс и жёстких пружинок (с коэффициентами упругости  $K \gg \{k, k_1\}$ ), соответствуют областям бездефектного идеально упругого твёрдого тела, а части цепочки, состоящие из нелинейных вязкоупругих звеньев, отвечают мягким дефектам. Будем также считать, что жёсткие пружины и мягкие дефекты такой цепочки имеют одинаковую длину  $l$ , при этом число всех элементов на длине  $L \gg \Lambda$  равно  $n$  ( $L = nl \gg l$ ), а число дефектов  $n_d = \nu n$ , так что их относительная концентрация равна  $\nu = n_d/n$ . При  $\omega \ll \sqrt{k_1/m}$  уравнение состояния среды имеет вид

$$\varepsilon = (1 - \nu) \varepsilon_0 + \nu \varepsilon_d, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_0 = \sigma/E_0$  — деформация жёсткой пружины,  $E_0 = Kl$ ,  $E_0 \gg E_1$ , а деформация дефекта  $\varepsilon_d = \varepsilon_d(\sigma)$  определяется методом последовательных приближений из уравнения (6):

$$\begin{aligned} \varepsilon_d(\sigma) = & \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\zeta\Omega}{1+\zeta} \int_{-\infty}^t \frac{\sigma(t_1)}{E_1} \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 + \frac{\zeta}{1+\zeta} \left\{ f \left( \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\sigma}(t_1)}{E_1} \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \right. \\ & \left. - \Omega \int_{-\infty}^t f \left( \int_{-\infty}^{t_1} \frac{\dot{\sigma}(t_2)}{E_1} \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) = & \frac{\sigma}{E_2} + \frac{\nu\zeta\Omega}{1+\zeta} \int_{-\infty}^t \frac{\sigma(t_1)}{E_1} \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 + \frac{\nu\zeta}{1+\zeta} \left\{ f \left( \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\sigma}(t_1)}{E_1} \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \right. \\ & \left. - \Omega \int_{-\infty}^t f \left( \int_{-\infty}^{t_1} \frac{\dot{\sigma}(t_2)}{E_1} \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $1/E_2 = (1 - \nu)/E_0 + \nu/E_1$ . Уравнения (8) и (10) справедливы во всём диапазоне концентрации дефектов ( $0 < \nu < 1$ ), при  $\nu = 0$  имеем уравнение для линейной идеально упругой среды, а при  $\nu = 1$  — уравнение для рассмотренной выше нелинейной структурно-неоднородной среды.

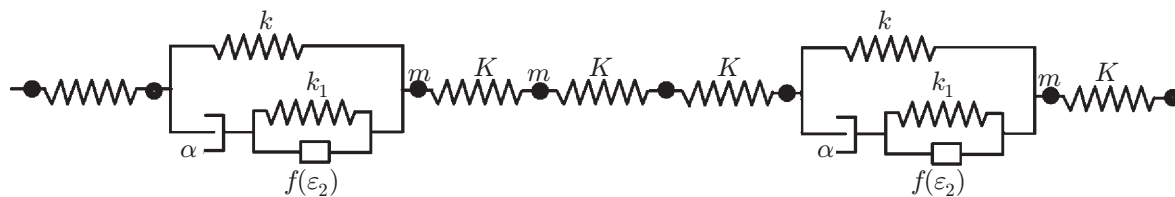


Рис. 3. Реологическая модель микронеоднородной среды, нелинейность которой увеличивается с ростом частоты

При малой концентрации дефектов ( $\nu\zeta \ll E_1/E_2$ ) уравнение (10) может быть приведено к «каноническому» виду  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ :

$$\sigma(\varepsilon) = E_2 \left( \varepsilon - \frac{\nu\zeta N\Omega}{1+\zeta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 - \frac{\nu\zeta}{1+\zeta} \left\{ f \left( N \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \Omega \int_{-\infty}^t f \left( N \int_{-\infty}^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right\} \right), \quad (11)$$

где  $N = E_2/E_1 \gg 1$ . Из уравнения (11) находим уравнение состояния для среды с дефектами, распределёнными по параметрам  $\zeta$  и  $\Omega$ :

$$\sigma(\varepsilon) = E_2 \int_0^1 \int_0^\infty \left( \varepsilon - \frac{\zeta N\Omega}{1+\zeta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 - \frac{\zeta}{1+\zeta} \left\{ f \left( N \int_{-\infty}^t \dot{\varepsilon}(t_1) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right) - \Omega \int_{-\infty}^t f \left( N \int_{-\infty}^{t_1} \dot{\varepsilon}(t_2) \exp[\Omega(t_2 - t_1)] dt_2 \right) \exp[\Omega(t_1 - t)] dt_1 \right\} \right) \nu(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega. \quad (12)$$

Из сравнения уравнений состояния (6), (11) и (7), (12) видно, что с точностью до постоянных коэффициентов эти уравнения одинаковы. Следовательно, линейные и нелинейные акустические свойства сред, описываемых этими и уравнениями, качественно совпадают. Эти уравнения, вместе с уравнением движения  $\partial^2 U / \partial t^2 = \partial \sigma(\varepsilon) / \partial x$  [1–4], где  $\rho = m/l$  — плотность,  $U$  — смещение, определяют нелинейные волновые процессы в таких средах, поэтому для выявления амплитудно-частотных зависимостей этих процессов необходимо получить решения соответствующих волновых уравнений. Однако можно поступить проще, а именно рассмотреть частотные зависимости эффективных параметров нелинейности уравнений состояния для наиболее простых нелинейных эффектов.

Далее на примере уравнения (6) мы исследуем частотные зависимости эффективных параметров нелинейности структурно-неоднородной среды с квадратичной нелинейностью ( $f(\varepsilon) = \gamma\varepsilon^2$ ) для некоторых нелинейных эффектов — генерации комбинационных частот (удвоенной и разностной).

### 3. ЧАСТОТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Подставляя в нелинейное слагаемое уравнения (6)  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , находим выражение для нелинейной поправки  $\sigma_{nl}(2\omega)$  на частоте  $2\omega$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{nl}}(2\omega) &= \frac{\zeta E_1 \gamma \varepsilon_0^2}{1 + \zeta} \frac{\omega^3 [\Omega (\Omega^2 - 5\omega^2) \sin(2\omega t) - 2\omega (2\Omega^2 - \omega^2) \cos(2\omega t)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + 4\omega^2)} = \\ &= \frac{\zeta E_1 \gamma \varepsilon_0^2}{1 + \zeta} \frac{\omega^3 \sin[2\omega t - \Psi_2(\omega)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + 4\omega^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\text{tg } \Psi_2(\omega) = [2\omega (2\Omega^2 - \omega^2)] / [\Omega (\Omega^2 - 5\omega^2)]$ .

Аналогично, подставляя в нелинейное слагаемое уравнения (6)  $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \sin(\omega_1 t) + \varepsilon_2 \sin(\omega_2 t)$ ,  $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ , находим выражение для нелинейной поправки  $\sigma_{\text{nl}}(\omega_d)$  на разностной частоте  $\omega_d = \omega_1 - \omega_2 \ll \{\omega_1, \omega_2\} \approx \omega$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{nl}}(\omega_d) &= \frac{\zeta E_1 \gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 + \zeta} \frac{\omega^2 \omega_d [\omega_d (2\Omega^2 + \omega^2) \cos(\omega_d t) - \Omega (\Omega^2 + \omega^2) \sin(\omega_d t)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + \omega_d^2)} = \\ &= - \frac{\zeta E_1 \gamma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 + \zeta} \frac{\omega^2 \omega_d [\Omega^2 (\Omega^2 + \omega^2)^2 + \omega_d^2 \omega^4]^{1/2} \sin[\omega_d t - \Psi_d(\omega)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + \omega_d^2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\text{tg } \Psi_d(\omega) = [\omega_d (2\Omega^2 - \omega^2)] / [\Omega (\Omega^2 - 5\omega^2)]$ .

Из выражений (13) и (14) следует, что параметры нелинейности  $\gamma_2(\omega)$  и  $\gamma_d(\omega)$  структурно-неоднородной среды для процессов генерации второй гармоники и разностной частоты являются зависящими от частоты и комплексными:

$$\begin{aligned} \gamma_2(\omega) &= \frac{\zeta \gamma}{1 + \zeta} \frac{\omega^3 \exp[-\gamma \Psi_2(\omega)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + 4\omega^2)^{1/2}}, \\ \gamma_d(\omega) &= \frac{\zeta \gamma}{1 + \zeta} \frac{\omega^2 \omega_d [\Omega^2 (\Omega^2 + \omega^2)^2 + \omega_d^2 \omega^4]^{1/2} \exp[-j \Psi_d(\omega)]}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + \omega_d^2)}. \end{aligned}$$

(Комплексность параметров  $\gamma_2(\omega)$  и  $\gamma_d(\omega)$  отвечает тому, что фаза нелинейно генерируемых гармоник  $\sigma_{\text{nl}}(2\omega)$  и  $\sigma_{\text{nl}}(\omega_d)$  зависит от их частот и частот первичных колебаний.)

При  $\omega \ll \Omega$  имеем

$$\gamma_2(\omega) = \frac{\zeta \gamma}{1 + \zeta} \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^3, \quad \gamma_d(\omega) = \frac{\zeta \gamma}{1 + \zeta} \frac{\omega^2 \omega_d \exp[-j \Psi_d(\omega)]}{\Omega^3},$$

а при  $\omega \gg \Omega$

$$\gamma_2(\omega) = \frac{\zeta \gamma \exp[-j(\pi/2)]}{2(1 + \zeta)}, \quad \gamma_d(\omega) = \frac{\zeta \gamma}{1 + \zeta} \frac{\omega_d \exp[-j \Psi_d(\omega)]}{(\Omega^2 + \omega_d^2)^{1/2}}.$$

Для описания частотных зависимостей квадратичной нелинейности среды при генерации второй гармоники и разностной частоты можно также ввести нормированные параметры нелинейности  $m_2(\omega)$  и  $m_d(\omega)$ , определяемые как отношения амплитуд  $\sigma_{\text{nl}}(2\omega)$  и  $\sigma_{\text{nl}}(\omega_d)$  к их значениям при  $\omega \gg \Omega$ :

$$m_2(\omega) = \frac{2\omega^3}{(\Omega^2 + \omega^2) (\Omega^2 + 4\omega^2)^{1/2}}, \quad m_d(\omega) = \frac{\omega^2}{(\Omega^2 + \omega^2)^2} \left[ \frac{\Omega^2 (\Omega^2 + \omega^2)^2 + \omega_d \omega^4}{\Omega^2 + \omega_d^2} \right]^{1/2}.$$

При  $\omega \ll \Omega$  имеем  $m_2(\omega) = 2(\omega/\Omega)^3$ ,  $m_d(\omega) = (\omega/\Omega)^2$ , а при  $\omega \gg \Omega$  —  $m_2(\omega) = 1$ ,  $m_d(\omega) = 1$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе модификации реологической модели микронеоднородной среды [17–19], нелинейность которой уменьшается с ростом частоты акустической волны, предложены реологические модели микро- и структурно-неоднородных сред, которые объясняют рост их нелинейности при увеличении частоты волны [26, 27]. Получены уравнения состояния таких сред и определены нелинейные параметры для эффектов генерации второй гармоники и разностной частоты для сред с упругой квадратичной нелинейностью. Частотная зависимость нелинейности таких сред обусловлена проявлением линейного релаксационного отклика нелинейных вязкоупругих звеньев (или дефектов) на частоте исходного воздействия и их релаксацией на нелинейно генерируемых гармониках. Несмотря на то, что частотные зависимости параметров нелинейности проанализированы для наиболее простых эффектов в средах с упругой квадратичной нелинейностью, развитый подход применим и для рассмотрения более сложных эффектов в средах с другими видами нелинейности — кубичной, разномодульной, гистерезисной, диссипативной и т. д. В силу отмеченных особенностей таких сред характер протекающих в них нелинейных волновых процессов будет существенно отличаться от аналогичных процессов в однородных средах, что можно использовать при их акустической диагностике. Следует, однако, иметь в виду, что из-за сложной структуры реальных сред их реологические модели и уравнения состояния могут быть более сложными (чем рассмотренные) и, в частности, представлять собой суперпозицию моделей и уравнений состояния однородных, микро- и структурно-неоднородных сред. В дальнейшем нами будут рассмотрены волновые процессы в таких средах.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПФ РАН по теме 0030–2019–0009 и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20–02–00215А).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М. : Наука, 1966. 520 с.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А. // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, № 4. С. 549–586. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0102.197012b.0549>
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М. : Наука, 1965. 204 с.
4. Naugol'nykh K. A., Ostrovsky L. A. Nonlinear wave processes in acoustics. Cambridge : Cambridge University Press, 1998. 298 p.
5. Исакович М. А. Общая акустика. М. : Наука, 1973. 496 с.
6. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1988. V. 50, No. 1. P. 65–73. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(88\)90094-5](https://doi.org/10.1016/0031-9201(88)90094-5)
7. Nazarov V., Radostin A. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. Chichester : John Wiley & Sons, 2015. 251 p.
8. Островский Л. А. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 5. С. 908–913.
9. Островский Л. А. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 3. С. 490–494.
10. Ostrovsky L. A., Johnson P. A. // La Rivista del Nuovo Cimento. 2001. V. 24, Ser. 4, No. 7. P. 1–46.
11. Назаров В. Е., Островский Л. А., Соустова И. А., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 3. С. 491–499.
12. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405–415.



13. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 4. С. 529–534.
14. Назаров В. Е., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 1. С. 106–110.
15. Lattice Dynamics // Physical Acoustics. V. 3. Part B. Principles and Methods / ed. by W. P. Mason. New York : Academic Press, 1965. 356 p.
16. Коган С. Я. // Физика Земли. 1966. № 11. С. 3–28.
17. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acoust. Lett. 1999. V. 22, No. 12. P. 236–241.
18. Зайцев В. Ю., Назаров В. Е., Беляева И. Ю. // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 2. С. 220–226. <https://doi.org/10.1134/1.1355802>
19. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acta Acust. united Ac. 2002. V. 88, No. 1. P. 40–49.
20. Островский Л. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 5–6. С. 661–690.
21. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М. : Физматлит, 2003. 400 с.
22. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. М. : Физматлит, 2002. 784 с.
23. Назаров В. Е., Радостин А. В. // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 2. С. 280–285. <https://doi.org/10.1134/1.1884498>
24. Nazarov V. E. // Wave Motion. 2014. V. 51, No. 1. P. 10–22. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.04.006>
25. Назаров В. Е., Кияшко С. Б., Радостин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 3. С. 275–285.
26. Na J. K., Breazeale M. A. // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. P. 3 213–3 221. <https://doi.org/10.1121/1.409985>
27. Elmore P. A., Breazeale M. A. // Ultrasonics. 2004. V. 41. P. 709–718. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2003.11.001>
28. Девис Р. М. Волны напряжений в твёрдых телах. М. : Изд-во иностранной литературы, 1961. 103 с.
29. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М. : Наука, 1975. 288 с.

Поступила в редакцию 7 февраля 2019 г.; принята в печать 31 января 2020 г.

**THE RHEOLOGICAL MODELS AND THE EQUATIONS OF STATE  
OF THE MICRO- AND STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MEDIA  
WITH THE FREQUENCY-DEPENDENT NONLINEARITY**

*V. E. Nazarov and S. B. Kiyashko*

We propose rheological models of micro- and structurally-inhomogeneous media, which explain an increase in their acoustic nonlinearity with increasing wave frequency. The equations of state for such media are obtained and the frequency dependences of the nonlinearity parameters for the processes of generation of the second harmonic and the difference frequency for the media with the quadrature elastic nonlinearity are determined.