

УДК 534.222

## САМОПОДОБНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ СО СТЕПЕННОЙ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*А. В. Радостин*<sup>1,2\*</sup>, *А. А. Куржин*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной физики РАН;

<sup>2</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,  
г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты исследований распространения продольных акустических волн в средах со степенной гистерезисной нелинейностью. Получены точные аналитические решения для самоподобных периодических волн, распространяющихся в таких средах без изменения формы. Исследованы спектральные характеристики этих волн.

### ВВЕДЕНИЕ

В данном специальном выпуске журнала, посвящённом юбилею выдающегося физика Льва Ароновича Островского, считаем необходимым упомянуть все области науки, в которых он ярко выразил свой невероятный талант. Одной из таких областей является акустика микронеоднородных (или, как это принято в англоязычной литературе, мезоскопических) сред. Предпосылки к появлению этого направления в акустике и первоначальные результаты вошли в монографию Л. А. Островского, написанную вместе с К. А. Наугольных [1], и впоследствии ставшую классической для физиков-последователей, а также в широко известную обзорную работу Льва Ароновича, опубликованную совместно с ведущим учёным из Лос-Аламосской национальной лаборатории П. Джонсоном [2].

Особое место в этом разделе современной акустики занимает исследование сред с гистерезисной нелинейностью, применение которых для описания необычных для классической нелинейной акустики эффектов в резонаторах из меди было осуществлено при участии Л. А. Островского [3, 4]. В дальнейшем Лев Аронович принимал участие не только в теоретических исследованиях волновых процессов в таких средах [5, 6], но и в дискуссиях, посвящённых более общим теоретическим вопросам, касающимся учёта встречного взаимодействия волн [7] и моделированию эффекта «медленной динамики», также присущего средам такого рода [8].

Главной особенностью гистерезисных уравнений в перечисленных работах является квадратичная зависимость между напряжением и деформацией на каждом участке гистерезисной петли. Такие уравнения описывают следующие нелинейные эффекты: линейные зависимости сдвига резонансной частоты и коэффициента нелинейного затухания от амплитуды волны в резонансе, а также одинаковую квадратичную зависимость амплитуд высших гармоник от амплитуды волны в рамках первого приближения теории возмущений в случае граничного условия в виде синусоидальной волны [2–5]. В «чисто» нелинейном случае (без учёта диссипации и дисперсии) решение таких задач не представляет сложностей и подробно описано в работах [9–11]. В частности, для моделей типа «неупругого гистерезиса» [5, 9, 11], состоящего из двух ветвей, получено, что любое начальное возмущение на расстоянии порядка характерной длины нелинейного взаимодействия принимает треугольную форму без образования разрыва в профиле волны в отличие от случая квадратичной нелинейности, однако возникает скачок производной в окрестности

\* radostin@ipfran.ru

максимума и минимума волны. Очевидно, что спектральные составляющие такой волны имеют зависимость, обратно пропорциональную второй степени номера гармоники. Как показано в работе [12], введение линейной диссипации устраняет разрыв производной и сглаживает профиль волны, при этом амплитуды высших гармоник экспоненциально уменьшаются с ростом номера гармоники.

Между тем существует обширный набор данных, согласно которому в металлах, горных породах и различных искусственных материалах наблюдаются эффекты, для объяснения которых необходимо привлекать модели, отличные от квадратичных. На рис. 1 изображена диаграмма значений степеней гистерезисной нелинейности по 82 опубликованным экспериментальным свидетельствам [13–22]. Заметим, что по сравнению с аналогичной диаграммой, приведённой в работе [23], эта дополнена ещё 20 значениями. Хорошо видно, что квадратичная нелинейность использовалась для описания нелинейных эффектов в 39 случаях. Также в 14 случаях наблюдаемые эффекты описывались в рамках кубической модели. Стоит отметить и несколько случаев нелинейности с показателем степени меньше 2, наблюдавшихся в образцах из стальных кабелей [14], частично водонасыщенного мела [15], известняка [17] и цементного камня [22].

В данной работе, являющейся продолжением исследований, начатых в статьях [23, 24], рассматриваются точные решения уравнений, описывающих распространение акустических волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени в рамках модели Давиденкова [25]. Актуальность этой задачи обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, имеется заметное число экспериментальных данных, подтверждающих, что степень гистерезисной нелинейности может отличаться от доминирующей в многочисленных работах квадратичной [9–11, 20]. Во-вторых, анализ спектральных составляющих сейсмоакустических сигналов при сильных землетрясениях показывает, что промежуточные асимптотики амплитудного спектра имеют степенные зависимости от частоты с показателем степени  $-(1,40 \div 1,15)$  [26, 27], отличным от  $-2$ , что характерно для сред с квадратичными нелинейностями, как классических, так и гистерезисных. Подробнее исследованы среды с кубической гистерезисной нелинейностью: показано, что для первоначально синусоидальной волны происходит генерация волн на нечётных гармониках, как и в случае квадратичной гистерезисной нелинейности, но в отличие от последней амплитуды высших гармоник пропорциональны 3-й степени амплитуды волны накачки. С ростом расстояния волна приобретает самоподобный вид, описываемый аналитическим решением. Также показано, что самоподобные решения могут быть получены и для произвольных значений степени гистерезисной нелинейности, включая дробные.

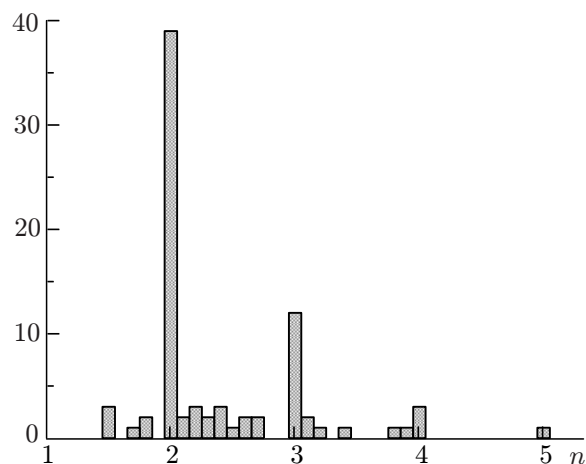


Рис. 1. Диаграмма значений степеней гистерезисной нелинейности для различных материалов из литературных источников [4, 13–22]. По вертикальной оси отложено число экспериментальных свидетельств

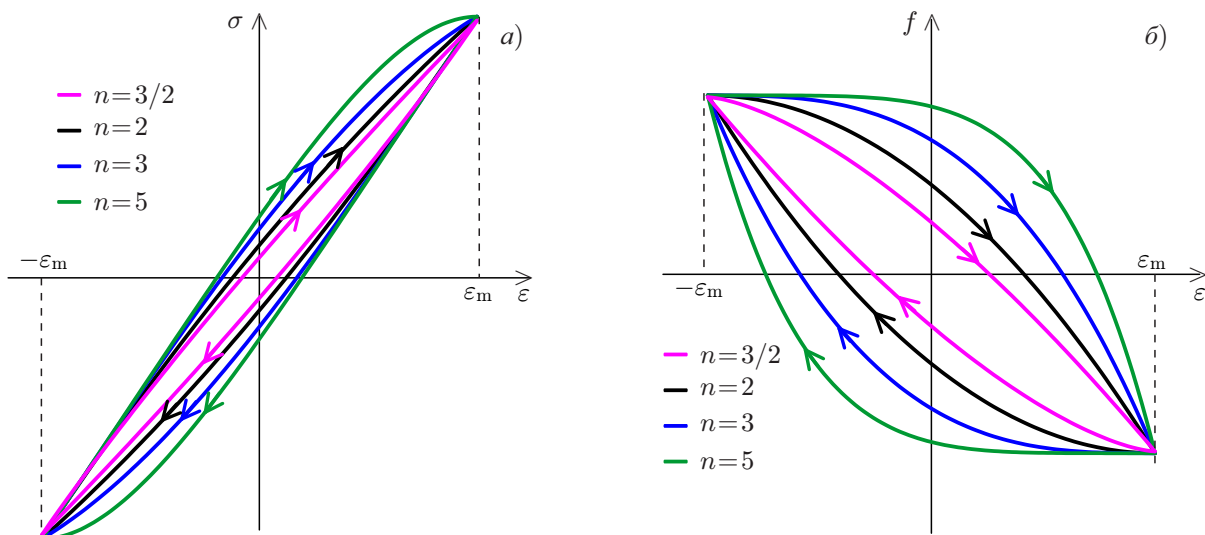


Рис. 2. Уравнение состояния  $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon})$  (а) и его гистерезисная часть (б)

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение состояния нелинейной среды для продольных напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\epsilon$  (без учёта линейной диссипации) можно представить в виде

$$\sigma(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon}) = E[\epsilon - f(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon})], \tag{1}$$

где  $E$  — модуль упругости,  $f(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon})$  — гистерезисная функция,  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации,  $|\partial f / \partial \epsilon| \ll 1$ . Одной из наиболее часто используемых моделей для описания эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения, которые проявляются в виде одинаковых степенных зависимостей сдвига частоты и нелинейного затухания, является модель, предложенная Н. Давиденковым в 1938 году [16, 25]. В этой модели само внутреннее трение связывалось с микропластической деформацией материала (под микропластической деформацией понимаются такая пластическая (необратимая) деформация, которая имеет место при малом уровне напряжения, существенно меньшем макроскопического предела текучести материала). В случае периодического деформирования материала гистерезисная функция имеет следующий вид:

$$f(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon}) = \frac{\beta}{n} \begin{cases} (\epsilon_m + \epsilon)^n - 2^{n-1} \epsilon_m^n, & \dot{\epsilon} > 0; \\ -(\epsilon_m - \epsilon)^n + 2^{n-1} \epsilon_m^n, & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где  $\epsilon_m$  — амплитуда деформации,  $\beta$  — параметр гистерезисной нелинейности ( $\beta > 0$ ),  $|\beta \epsilon_m^{n-1}| \ll \ll 1$ ,  $n > 1$ . Такой гистерезис имеет две ветви, определяемые знаком скорости деформации  $\dot{\epsilon}$  ( $\dot{\epsilon} > 0$  и  $\dot{\epsilon} < 0$ ). Изображающая точка на диаграмме  $\sigma = \sigma(\epsilon, \text{sgn } \dot{\epsilon})$  движется по часовой стрелке, переход с одной ветви на другую происходит при  $\epsilon = \pm \epsilon_m$  (см. рис .2).

Гистерезисные уравнения состояния (1) и (2), совместно с уравнением движения  $\rho_0 \partial^2 U / \partial t^2 = = \partial \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) / \partial x$  (где  $U$  — смещение,  $\rho_0$  — плотность среды), позволяют исследовать нелинейные волновые процессы в средах с несовершенной упругостью. Подставляя (1) и (2) в уравнение движения и переходя к переменным  $\tau = t - x/C$  ( $t$  — время),  $x' = x$ , получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси  $x$  [1]:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C} \frac{\partial f(\epsilon, \dot{\epsilon})}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = -\frac{1}{2C} \frac{\partial f(\epsilon, \dot{\epsilon})}{\partial \tau}, \tag{3}$$

где  $C = (E/\rho_0)^{1/2}$ . При решении уравнения (3) мы будем пользоваться методом сращивания (или «сшивания») простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса; такой метод был предложен в статье [28] и затем развит в работах [5, 9].

Для уравнения состояния (1) уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = -\frac{\beta}{2C} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \begin{cases} (\epsilon_m + \epsilon)^{n-1}, & \dot{\epsilon} > 0; \\ (\epsilon_m - \epsilon)^{n-1}, & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases}$$

Для удобства дальнейшего анализа приведём последнее уравнение к безразмерному виду

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \begin{cases} (\epsilon_m + \epsilon)^{n-1} - \epsilon_m^{n-1}, & \dot{\epsilon} > 0; \\ (\epsilon_m - \epsilon)^{n-1} \epsilon_m^{n-1}, & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

где  $z = \beta x \epsilon_0^{n-1} / (CT)$ ,  $\epsilon(z, \theta) = \epsilon(z, \theta) / \epsilon_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_m(z) / \epsilon_0$ ,  $\epsilon_m(0) = 1$ ,  $\theta = \tau/T - \int_0^z \epsilon_m^{n-1}(z') dz'$ ,  $T$  — полупериод.

Его решение для граничного условия  $\epsilon(0, \theta) = \sin \theta$  может быть записано в неявном виде:

$$\theta = \begin{cases} \int_0^z [\epsilon_m(z') + \epsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' - \arcsin \epsilon(z, \theta), & \dot{\epsilon} > 0; \\ \int_0^z [\epsilon_m(z') - \epsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' + \pi - \arcsin \epsilon(z, \theta), & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зависимость амплитуды от расстояния находится из решения уравнения для «сшивки» в точке минимума или максимума, например для первого максимума ( $\theta[\epsilon_m(z), \dot{\epsilon} > 0] = \theta[\epsilon_m(z), \dot{\epsilon} < 0] = \theta_m$ ):

$$\int_0^z [\epsilon_m(z') + \epsilon(z)]^{n-1} dz' - \int_0^z [\epsilon_m(z') - \epsilon(z)]^{n-1} dz' = \arccos \epsilon_m(z). \quad (6)$$

Подстановка решения этого уравнения в (5) даёт выражение для профиля волны.

## 2. КУБИЧНЫЙ ГИСТЕРЕЗИС

Случай квадратичного гистерезиса ( $n = 2$ ) был подробно рассмотрен В. Гусевым в работе [9], поэтому сразу перейдём к кубическому гистерезису ( $n = 3$ ), когда уравнение (4) может быть записано в следующем компактном виде:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -2\epsilon \epsilon_m \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right| - \epsilon^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}.$$

Тогда решение (6) имеет вид

$$z = \frac{\sqrt{1 - \epsilon_m^2}}{4\epsilon_m} + \frac{\arccos \epsilon_m}{4\epsilon_m^2}, \quad (7)$$

что в результате даёт неявное выражение для профиля волны:

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \arccos(\epsilon_m) + \epsilon^2 z + \arcsin \epsilon, & \dot{\epsilon} > 0; \\ \pi - \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \arccos(\epsilon_m) + \epsilon^2 z - \arcsin \epsilon, & \dot{\epsilon} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

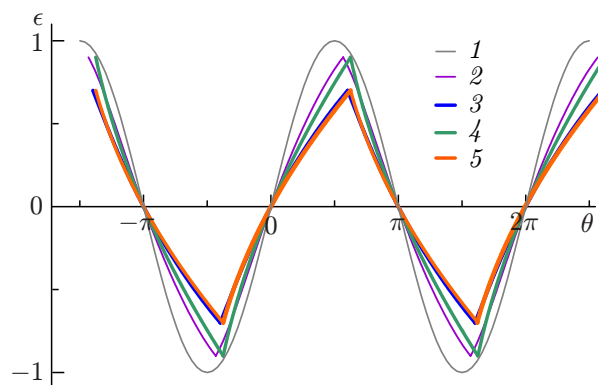


Рис. 3. Профили волн для среды с кубическим гистерезисом для синусоидального начального условия (кривые 1, 2 и 3) при  $z = 0; 0,26$  и  $0,66$  соответственно и самоподобные решения для амплитуды  $\epsilon_m = 0,9$  (4) и  $0,7$  (5)

ми вычислениями при решении интегрального уравнения (6) и имеет сомнительную практическую ценность.

Фаза первого максимума в этом случае определяется следующим образом:

$$\theta_m = \pi/2 + \epsilon_m^2 z. \tag{9}$$

На рис. 3 представлены профили волн (кривые 1, 2 и 3), описываемых решением (7)–(9) для значений  $z = 0$  ( $\epsilon_m = 1$ ),  $z = 0,26$  ( $\epsilon_m = 0,9$ ) и  $z = 0,66$  ( $\epsilon_m = 0,7$ ) соответственно. Как видно из этого рисунка, при  $z > 0$  волна приобретает пилообразный профиль, отличающийся от случая классической кубической среды меньшим значением крутизны. В то же время антисимметрия полупериодов в обеих средах аналогична [29].

Получение точных аналитических решений для синусоидальных начальных условий в случае других значений степени  $n$  связано с громоздкими вычислениями при решении интегрального уравнения (6) и имеет сомнительную практическую ценность.

### 3. САМОПОДОВНЫЕ РЕШЕНИЯ

В работе [9] также установлено, что в квадратичной гистерезисной среде реализуется самоподобное решение. Легко показать, что точные решения уравнения (4) для произвольных значений степени  $n$  могут быть получены с помощью метода разделения переменных. Тогда, если искать решение в виде  $\epsilon(z, \theta) = \epsilon_m(z)\nu(\theta)$ , получаем следующие выражения для зависимости амплитуды от расстояния:

$$z = \frac{n-1}{k} \left( \frac{1}{\epsilon_m^{n-1}} \right), \quad \epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[n-1]{1 + kz/(n-1)}}, \tag{10}$$

и простое дифференциальное уравнение для временной части

$$k d\theta = \frac{(1 + \nu)^{n-1} - 1}{\nu} d\nu. \tag{11}$$

В случае целочисленных значений  $n$  решение уравнения (11) могут быть записаны в виде суммы:

$$\theta = \begin{cases} k \sum_{j=1}^{n-1} \binom{j}{n-1} \frac{\nu^j}{j}, & d\nu/d\theta \geq 0; \\ \pi - k \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{j}{n-1} \frac{\nu^j}{j}, & d\nu/d\theta < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$k = \frac{\pi}{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 + (-1)^{j+1}}{j} \binom{j}{n-1}},$$

$\binom{j}{n-1}$  — биномиальный коэффициент. В этом случае  $\theta_m = \pi - k \sum_{j=1}^{n-1} 1/j$ .

Для  $n = 3$  получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \begin{cases} 2\nu + \nu^2/2, & d\nu/d\theta \geq 0; \\ 4 - 2\nu + \nu^2/2, & d\nu/d\theta < 0, \end{cases} \quad \epsilon_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi z/8}}, \quad \theta_m = \frac{5\pi}{8}.$$

Профили волн, соответствующие этим выражениям, представлены на рис. 3 для значений амплитуды  $\epsilon_m = 0,9$  (линия 4) и  $0,7$  (5). Хорошо видно, что при  $\epsilon_m = 0,7$ , т.е. на расстоянии, составляющем  $0,66$  характерной длины нелинейного взаимодействия, самоподобное решение практически близко к точному.

Аналогичным образом можно получить решение и для дробных значений  $n$ , например для  $n = 3/2$ :

$$\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1)} \begin{cases} 2(\sqrt{\nu + 1} - 1) + 2\ln[2/(\sqrt{\nu + 1} + 1)], & d\nu/d\theta \geq 0; \\ 2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1) - 2(1 - \sqrt{1 - \nu}) + 2\ln[2/(\sqrt{1 - \nu} + 1)], & d\nu/d\theta < 0, \end{cases}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{\{1 + \pi z/[2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1)]\}^2}, \quad \theta_m = \frac{\pi\{\sqrt{2} - 1 + \ln[2/(\sqrt{2} + 1)]\}}{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)}. \quad (13)$$

Для  $n = 5/2$  получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{\pi}{\frac{5\sqrt{2}}{3} - \ln(\sqrt{2} + 1)} \begin{cases} \frac{(1 + \nu)^{3/2} - 1}{3} + (\sqrt{\nu + 1} - 1) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\nu + 1} + 1}\right), & \frac{d\nu}{d\theta} \geq 0; \\ \frac{5\sqrt{2}}{3} - \ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{(1 - \nu)^{3/2} - 1}{3} + \\ + (\sqrt{1 - \nu} - 1) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{1 - \nu} + 1}\right), & \frac{d\nu}{d\theta} < 0, \end{cases}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{\{1 + 3\pi z/[10\sqrt{2}/3 - 2\ln(\sqrt{2} + 1)]\}^{2/3}}. \quad (14)$$

Таким образом, автомодельные решения позволяют раскрыть внутреннюю структуру волн при дробной нелинейности подробнее, чем в случае использования метода возмущений.

На рис. 4 представлены профили самоподобных волн для трёх значений степени гистерезисной нелинейности:  $3/2$ ;  $2$  и  $3$ . Как видно из рисунка, для степеней, отличных от  $2$ , профили волн представляют собой чередование выпуклых и вогнутых участков. На рис. 5 показаны профили самоподобных волн для степеней  $5$ ;  $10$  и  $100$ . Хорошо видно, что рост нелинейности приводит к увеличению крутизны профиля в окрестности максимумов и минимумов, что соответствует уменьшению коэффициента  $k$  в решении для временной части, и волна приобретает форму трапециевидной пилы, аналогичной известному решению уравнения с классической кубической нелинейностью [30]. Значения коэффициента  $k$  для различных степеней гистерезисной нелинейности представлены в табл. 1.

Для поиска количественных отличий найдём спектральные разложения решений (12)–(14). В отличие от классических квадратичной и кубической сред, для которых известны спектральные разложения в области до образования разрыва [1, 31], в гистерезисных средах подобных разложений получить не удаётся; тем не менее аналитические выражения для самоподобных волн немного упрощают эту задачу. Использование выражений (12)–(14) позволяет компактно представить в виде интегралов выражения для косинусной ( $a_m$ ) и синусной ( $b_m$ ) компонент ряда Фурье, которые могут быть легко найдены численно:

$$\begin{cases} a_m \\ b_m \end{cases} = \frac{1}{\pi(2m + 1)} \int_{-1}^1 \begin{cases} -\sin[(2m + 1)\theta(\nu, d\nu/d\theta > 0)] + \sin[(2m + 1)\theta(\nu, d\nu/d\theta < 0)] \\ \cos[(2m + 1)\theta(\nu, d\nu/d\theta > 0)] - \cos[(2m + 1)\theta(\nu, d\nu/d\theta < 0)] \end{cases} d\nu.$$

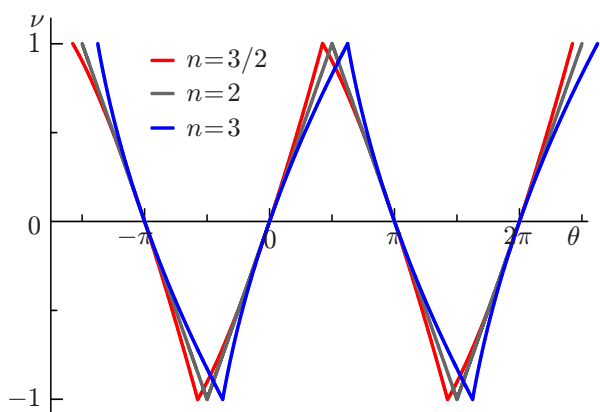


Рис. 4. Профили самоподобных волн для сред с показателями степени  $n = 3/2; 2$  и  $3$

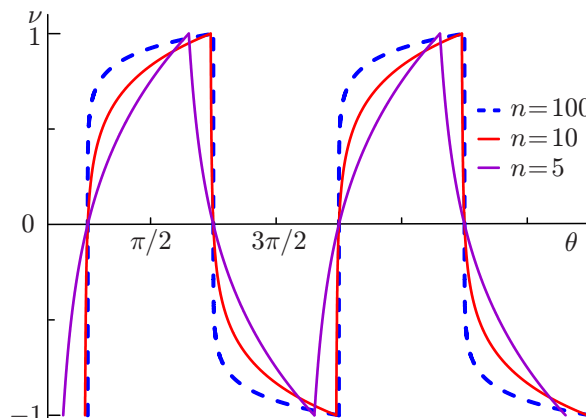


Рис. 5. Профили самоподобных волн для сред с показателями степени  $5; 10$  и  $100$

Таблица 1. Параметры решений для различных степеней гистерезисной нелинейности

$n$	3/2	2	5/2	3	4	5	7	10	100
$k$	$\pi/1,07$	$\pi/2$	$\pi/2,95$	$\pi/4$	$3\pi/20$	$3\pi/32$	$\pi/27,7$	$\pi/134,9$	$2,4 \cdot 10^{-28}$
$p$	2,04	2,00	1,95	1,88	1,74	1,60	1,37	1,18	1,01

Как видно из этого выражения, спектр содержит в себе компоненты только на нечётных гармониках. Расчёт коэффициентов ряда Фурье самоподобных волн позволяет определить асимптоты спада амплитудного спектра для первых пяти гармоник с целью оценки степени гистерезисной нелинейности, с использованием которой проводится интерпретация спектров сейсмических волн. В работах [26, 27] было продемонстрировано, что амплитудный спектр принятых сигналов имеет вид  $E(f) \propto f^{-p}$ , где  $p$  имеет значения в интервале от 1,2 до 1,4.

Как следует из рис. 4, 5 и табл. 1, такие значения параметра  $p$  могут достигаться при достаточно больших степенях гистерезисной нелинейности  $7 \div 10$ . Это также согласуется с результатами работы [32], в которой формы сигналов и амплитудные спектры находились численно на основе часто используемого гиперболического уравнения состояния среды, представимого в виде степенного ряда, подобно модели Давиденкова.

На рис. 6 приведены графики фазовых спектров самоподобных волн. На этом рисунке также видны различия. Таким образом, полученные результаты могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных, например по наблюдению сейсмических волн от различных источников, для уточнения параметров гистерезисных уравнений горных пород в районе наблюдения.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследованы процессы распространения и эволюции продольных акустических волн в средах, обладающих гистерезисной нелинейностью произвольной степени. Получены точные решения в виде самоподобных волн и исследованы особенности их спектрального представления. Особое внимание уделено связи степени нелинейности с асимптотическим поведением высших гармоник. Показано, что обнаруженные в работах [26, 27] асимптотики для спада амплитудных спектров сейсмических сигналов с показателем  $1,2 \div 1,4$  могут соответствовать значениям степени гистерезисной нелинейности в интервале  $7 \div 10$ . Дальнейшее увеличение этой

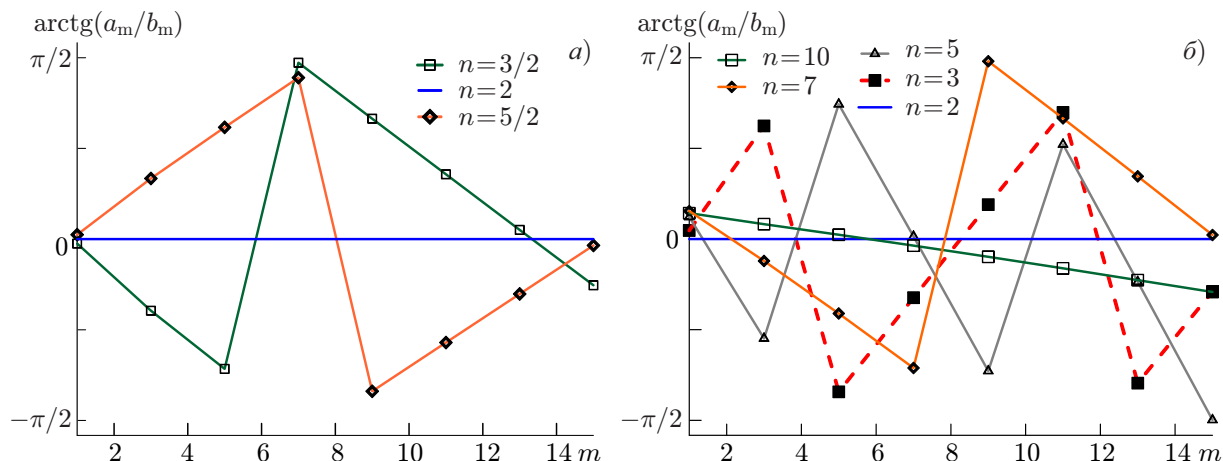


Рис. 6. Фазовый спектр самоподобных волн для различных значений показателя степени  $n$

степени приводит к уменьшению показателя асимптотической зависимости до предельного значения 1.

Полученные результаты представляют интерес для развития теории нелинейных волновых процессов в средах с неаналитической нелинейностью; они также могут быть использованы и для тестирования различных численных моделей [33–36].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований ведущих научных школ Российской Федерации НШ–2485.2020.5, а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19–05–00536 а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М. : Наука, 1990. 237 с.
2. Ostrovsky L. A., Johnson P. A. // Rivista del Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica. 2001. V. 24, No. 7. P. 1–46.
3. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A. Sutin A. M. // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1988. V. 50, No. 1. P. 65–73. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(88\)90094-5](https://doi.org/10.1016/0031-9201(88)90094-5)
4. Назаров В. Е., Островский Л. А., Соустова И. А., Сутин А. М. Аномальная акустическая нелинейность в металлах // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 3. С. 491–499.
5. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405–415.
6. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 4. С. 529–534.
7. Ostrovsky L. A. // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116, No. 6. P. 3348–3353. <https://doi.org/10.1121/1.1823332>
8. Lebedev A. V., Ostrovsky L. A. // Acoust. Phys. 2014. V. 60, No. 5. P. 555–561. <https://doi.org/10.1134/S1063771014050066>
9. Gusev V., Glorieux C., Lauriks W., Thoen J. // Phys. Lett. A. 1997. V. 232, No. 1–2. P. 77–86. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00357-5](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00357-5)
10. Gusev V., Lauriks W., Thoen J. // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103, No. 6. P. 3216–3226. <https://doi.org/10.1121/1.423037>



11. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 1. С. 31–40.
12. Radostin A., Nazarov V., Kiyashko S. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. V. 52. P. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.04.016>
13. Takahashi S. // J. Phys. Soc. Japan. 1956. V. 11, No. 12. P. 1253–1261. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.11.1253>
14. Vinogradov O., Pivovarov I. // J. Sound and Vibration. 1986. V. 111, No. 1. P. 145–152. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)81429-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)81429-8)
15. Johnson P. A., Zinszner B., Rasolofosaon P. N. // J. Geophys. Res. Solid Earth. 1996. V. 101, No. B5. P. 11553–11564. <https://doi.org/10.1029/96JB00647>
16. Лебедев А. Б. // Физика твёрдого тела. 1999. Т. 41, № 7. С. 1214–1222.
17. Назаров В. Е., Колпаков А. Б., Радостин А. В. // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 2. С. 254–263.
18. Hauptert S., Renaud G., Riviere J., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, No. 5. P. 2654–2661. <https://doi.org/10.1121/1.3641405>
19. Scalerandi M., Idjimarene S., Bentahar M., El Guerjouma R. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 22, No. 1. P. 334–347. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.09.007>
20. Guyer R. A., Johnson P. A. Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behavior of rocks, soil, concrete. Weinheim : John Wiley & Sons, 2009. 410 p.
21. Nazarov V., Radostin A. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. Chichester : John Wiley & Sons, 2015. 264 p.
22. Nazarov V., Kolpakov A., Radostin A. // J. Nondestructive Evaluation. 2019. V. 38, No. 1. Art. no. 24. <https://doi.org/10.1007/s10921-019-0560-2>
23. Radostin A. // Acta Acust. United. Ac. 2018. V. 104, No. 3. P. 410–416. <https://doi.org/10.3813/AAA.919184>
24. Radostin A., Nazarov V., Kiyashko S., Kurkin A. // Wave Motion. 2019. V. 91. Art. no. 102398. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102398>
25. Давиденков Н. Н. // Журнал техн. физики. 1938. Т. 8, № 6. С. 156–161.
26. Pavlenko O. // Bull. Seismol. Soc. Am. 2001. V. 91, No. 2. P. 381–396. <https://doi.org/10.1785/0120000047>
27. Pavlenko O. V., Irikura K. // Geophys. J. Int. 2005. V. 160, No. 2. P. 539–553. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02230.x>
28. Назаров В. Е. // Акустический журнал. 1997. Т. 43, № 2. С. 225–229.
29. Lee-Barty I. P., Crighton D. G. // Phil. Trans. Royal Soc. London A. Math. Phys. Engin. Sci. 1987. V. 323, No. 1570. P. 173–209. <https://doi.org/10.1098/rsta.1987.0081>
30. Руденко О. В., Сапожников О. А. // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 9. С. 973–989. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0174.200409c.0973>
31. Пелиновский Е. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 3. С. 373–383.
32. Mercado V., El-Sekelly W., Abdoun T., Pájaro C. // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2018. V. 115. P. 787–798. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.09.021>
33. Li Y., Matar O. B., Li B., Chen X. // Wave Motion. 2015. V. 52. P. 54–65. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.08.008>
34. Nair N. J., Shah U. // ASME 2017 Intern. Design Engineering Technical Conf. and Computers and Information in Engineering Conf. 6–9 Aug. 2017, Cleveland. Art. no. V006T10A046. <https://doi.org/10.1115/DETC2017-67892>
35. Berjamine H., Lombard B., Chiavassa G., Favrie N. // Int. J. Sol. Struct. 2018. V. 141–142. P. 35–44. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.02.009>
36. Chabot S., Glinesky N., Mercerat E. D., Bonilla Hidalgo L. F. // J. Comput. Phys. 2018. V. 355. P. 191–213. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.11.013>

Поступила в редакцию 29 ноября 2019 г.; принята в печать 31 января 2020 г.

**SELF-SIMILAR ACOUSTIC WAVES IN THE MEDIA  
WITH THE POWER-LAW HYSTERETIC NONLINEARITY**

*A. V. Radostin and A. A. Kurkin*

We present the results of the studies of propagation of longitudinal acoustic waves in the media with the power-law hysteretic nonlinearity. Accurate analytical solutions for the self-similar periodic waves propagating in such media without changing their forms are given. The spectral characteristics of these waves are studied.