

УДК 523.945-46

БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

*Н. С. Петрухин*¹, *Е. Н. Пелиновский*^{1,2,3}, *Е. Г. Диденкулова*^{1,2,3*}

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва;

² Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород;

³ Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева,
г. Нижний Новгород, Россия

Исследуются бегущие волны в сильно неоднородной замагниченной плазме. Показано, что при некоторых условиях на характеристики среды волны не отражаются от неоднородностей, хотя их амплитуда и фаза меняются в пространстве. Такие безотражательные волны находятся математически как решения волновых уравнений с постоянными коэффициентами, к которым сводятся исходные уравнения с переменными коэффициентами после определённой трансформации. Установлено существование безотражательных волн в различных плазменных конфигурациях.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в неоднородной среде энергия волн рассеивается и не может быть передана на большие расстояния. Достаточно упомянуть классические книги [1, 2], в которых детально рассмотрен процесс отражения и трансформации волн в неоднородной среде как на скачках её параметров, так и на неоднородностях специального вида. Особо выделен случай крупномасштабных (по сравнению с длиной волны) неоднородностей среды, когда отражением от них можно пренебречь. Эффективным подходом к анализу волновых процессов в такой ситуации являются асимптотические методы типа известного метода Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ) [3–5], позволяющие рассчитать амплитуду и фазу распространяющейся (бегущей) волны. Уже в цитированных выше книгах отмечалось, что асимптотические решения для волн, получаемые методом ВКБ, являются точными для специфических распределений параметров неоднородной среды и в этом случае приближение плавной неоднородности может не использоваться.

Интерес к таким специфическим условиям возник сначала в математике в качестве примера возможных трансформационных преобразований одних уравнений в частных производных в другие [6–10]. При этом было показано, что уравнения с переменными коэффициентами (а именно такие уравнения описывают волны в неоднородной среде) могут быть сведены, в частности, к уравнениям с постоянными коэффициентами. Последние по крайней мере для безграничной среды, очевидно, допускают в линейном приближении существование бегущих волн типа $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$ с дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k)$, где $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число, ω — частота волны, t — время и \mathbf{r} — радиус-вектор. При переходе к исходным переменным бегущие волны описываются более сложными выражениями и их характеристики (амплитуда и фаза) становятся переменными в пространстве. Математиков, однако, эти преобразования интересовали как возможность нахождения разнообразных аналитических решений. Для нахождения трансформационных преобразований использовались разнообразные методы, включая алгебру Ли. В общем случае получаемые решения трудно интерпретировать с точки зрения существования бегущих волн в неоднородной среде.

* eshurgalina@mail.ru

Следует сказать, что проблема существования бегущих волн, особенно в двух- и трёхмерных средах, всегда была интересна физикам и литература здесь достаточно обширна. Достаточно упомянуть доказательство существования волны Стокса на поверхности воды [11]. При этом, в сущности, не использовались трансформационные преобразования, о которых упомянуто выше. В то же время их использование позволило дать ответ на вопрос о существовании бегущих линейных волн в одномерной неоднородной среде и найти характеристики самой неоднородной среды. Разнообразные физические примеры рассмотрены для волн на поверхности мелкой воды [12, 13], длинных внутренних волн на границе раздела двух жидкостей [14, 15], акустических волн в атмосферах Земли и Солнца [16, 17], волн в солнечных магнитных трубках [18–21], упругих волн [22], волн при прохождении градиентных барьеров [23]. В случае же пространственных задач аналогичные бегущие волны получены для волноводных систем с однородным распределением поля поперёк волновода, когда, в сущности, задача сводится к одномерной [13, 20, 22, 24]. При этом было показано, что число безотражательных конфигураций волновода может быть достаточно большое, так что существование бегущих волн не является такой уж редкостью. Для нелинейных задач имеются только единичные примеры [13, 24].

В данной статье мы рассмотрим существование безотражательных магнитогидродинамических (МГД) волн в неоднородной плазме с различной размерностью. В разделе 1 обсуждаются одномерные альвеновские волны в стратифицированной плоскопараллельной атмосфере с постоянным магнитным полем. Альвеновские волны в плоском слое (двумерная задача) с неоднородным магнитным полем рассмотрены в разделе 2. И наконец, в разделе 3 анализируются альвеновские волны в осесимметричной расходящейся трубке, заполненной неоднородной плазмой (трёхмерная задача). Во всех случаях найдено пространственное распределение плотности плазмы и магнитного поля, допускающее распространение бегущих волн в плазме с сильной неоднородностью.

1. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ МГД ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Сначала рассмотрим одномерное линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2(z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Оно описывает распространение альвеновских волн в горизонтально стратифицированной атмосфере в отсутствие диссипативных эффектов [25]. Стационарное магнитное поле однородно и направлено параллельно ускорению силы тяжести. Смещение плазмы ξ в волне перпендикулярно невозмущённому полю. Функция $c(z)$ совпадает с альвеновской скоростью $V_A(z) = B/\sqrt{\mu_0 \rho(z)}$, где B — стационарное магнитное поле, $\rho(z)$ — плотность плазмы, μ_0 — магнитная проницаемость и z — вертикальная координата.

Уравнение (1) также определяет изгибные колебания корональных петель на Солнце [26, 27]. В этом случае $\xi = \eta/R$, где η — поперечное смещение и R — радиус трубки; $c(z) = B/\sqrt{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}$, ρ_i и ρ_e — плотность плазмы внутри и вне трубки соответственно. Характерные периоды наблюдаемых кинк-колебаний петель равны нескольким минутам [28]. Время свободного пробега ионов в этих образованиях — порядка нескольких секунд [29]. Таким образом, плазма в корональных петлях может считаться сильно столкновительной, поэтому для её описания можно использовать уравнения классической магнитной гидродинамики. Предполагается, что альвеновская скорость в среде много больше звуковой.

Уравнение (1) применяется также при решении других задач магнитной гидродинамики. В частности, оно используется при исследовании колебаний в ионосферном альвеновском резонаторе [30].

Уравнение (1) содержит переменный коэффициент $c(z)$, поэтому в общем случае его решение описывает трансформацию падающей волны в проходящую и отражённую от неоднородностей среды. Оно не распадается на два независимых решения, соответствующих бегущим волнам в противоположных направлениях. Существование невзаимодействующих встречных волн тривиально в случае волнового уравнения с постоянными коэффициентами, поэтому важно найти преобразования, приводящие уравнение (1) к волновому уравнению с постоянными коэффициентами. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\xi(t, z) = A(z)F[t, \tau(z)], \quad (2)$$

где $A(z)$, $\tau(z)$ и $F(t, \tau)$ — пока неизвестные функции. Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получаем уравнение типа Клейна—Гордона с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2(z) \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = c^2(z) \left(\frac{d\tau}{dz} + \frac{2}{A} \frac{dA}{dz} \frac{d\tau}{dz} \right) \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{c^2(z)}{A} \frac{d^2 A}{dz^2} F. \quad (3)$$

Уравнение (3) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью простых обыкновенных дифференциальных уравнений. Первое из них убирает переменный коэффициент в даламбериане:

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{c(z)}, \quad (4)$$

и соответствует стандартному определению времени распространения (фазы) волны. Здесь мы ограничились одним знаком в (4) для волны, распространяющейся в сторону увеличивающихся z .

Второе уравнение получим, если коэффициент при первой производной $\partial F/\partial \tau$ в уравнении (3) приравняем к нулю:

$$\frac{d^2 \tau}{dz^2} + \frac{2}{A} \frac{dA}{dz} \frac{d\tau}{dz} = 0. \quad (5)$$

С учётом соотношения (4) общее решение этого уравнения запишется в виде

$$A(z) = Qc^{1/2}(z), \quad (6)$$

где Q — произвольная постоянная. Наконец, приравнявая в уравнении (3) коэффициент при F произвольной постоянной β , получаем третье уравнение

$$\frac{c^2(z)}{A(z)} \frac{d^2 A}{dz^2} = \beta, \quad (7)$$

которое после подстановки (6) сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка для скорости распространения волн:

$$2c \frac{d^2 c}{dz^2} - \left(\frac{dc}{dz} \right)^2 = 4\beta. \quad (8)$$

При выполнении уравнений (4), (6) и (8) уравнение (3) превращается в уравнение Клейна—Гордона с постоянными коэффициентами и существование его решений в виде бегущих волн становится очевидным. Прежде чем переходить к анализу решений уравнения Клейна—Гордона,

обсудим возможные характеристики неоднородной среды, допускающие существование бегущих волн.

Сразу заметим, что уравнение (8) допускает понижение порядка с помощью замены $p = dc/dz$:

$$\frac{dp^2}{dc} - \frac{p^2}{c} = \frac{4\beta}{c}, \quad (9)$$

которое легко интегрируется:

$$\left(\frac{dc}{dz}\right)^2 = p^2 = 4(Mc - \beta), \quad (10)$$

где M — произвольная постоянная. Последнее уравнение также интегрируется, что позволяет записать общее решение уравнения (8):

$$\int \frac{dc}{\sqrt{Mc - \beta}} = \pm(z + z_0), \quad (11)$$

здесь z_0 — также произвольная постоянная, определяющая начало координат на оси распространения.

Обсудим характер распределения скорости распространения волны, обеспечивающий безотражательное распространение МГД волн в сильно неоднородной плазме. Возможны два случая.

1) $M \neq 0$. Тогда из уравнения (11) получается параболическая зависимость

$$c(z) = M(z + z_0)^2 + \frac{\beta}{M}. \quad (12)$$

В зависимости от знака M скорость распространения может увеличиваться или уменьшаться с расстоянием. Естественно, что мы должны наложить условие $c > 0$, так что физически разумный профиль скорости распространения будет ограничен или неограничен в пространстве.

2) $M = 0$. В этом случае при $\beta < 0$ уравнение (11) приводит к линейному профилю скорости распространения

$$c(z) = \pm 2\sqrt{|\beta|}(z + z_0). \quad (13)$$

Функции (12) и (13) позволяют с помощью формулы (4) представить переменную $\tau(z)$ в явном виде. Итак, в случаях, когда скорость распространения волны описывается линейной (13) или квадратичной (12) зависимостями, уравнение (3) представляет собой известное уравнение Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + \beta F. \quad (14)$$

При $\beta = 0$ уравнение (14) сводится к волновому уравнению, имеющему решение Даламбера в виде волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$F(t, \tau) = f(\tau - t) + \varphi(\tau + t), \quad (15)$$

где f и φ — произвольные функции, определяемые из начальных и граничных условий. В исходных переменных эти неотражающиеся волны описываются формулой

$$\xi(t, z) = \sqrt{M}(z + z_0) \left\{ f\left(\tau_0 - \frac{1}{M(z + z_0)} - t\right) + \varphi\left[\tau_0 - \frac{1}{M(z + z_0)} + t\right] \right\}, \quad (16)$$

где τ_0 — постоянная. Из решения (16) видно, что каждая бегущая волна имеет переменную амплитуду и фазу, но её временная форма в каждой точке пространства остаётся неизменной.

Если же $\beta \neq 0$, то элементарным решением уравнения (14), а следовательно, и уравнения (1), является монохроматическая волна

$$\xi(t, z) = A_0 \sqrt{c(z)} \exp[i(\omega t - k\tau)] + \text{c.c.}, \quad \omega^2 = k^2 - \beta, \quad (17)$$

где A_0 — амплитуда волны в какой-то точке, k — волновое число и ω — частота волны. В этом случае возникает дисперсия, связанная с геометрией неоднородной среды, и волновой пакет будет меняться по мере распространения. Однако отражения от неоднородности плазмы не происходит, если параметры среды меняются определённым образом.

2. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ АЛЬВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ СЛОЕ С НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Выше мы анализировали бегущие одномерные МГД волны. Здесь мы рассмотрим волны в плоском слое с неоднородным магнитным полем. Будем считать, что в равновесном состоянии невозмущённое магнитное поле изменяется только вдоль координат x и z (в прямоугольной системе координат), а скорость течения v и возмущения b магнитного поля направлены вдоль координаты y . В этом случае линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики имеют вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}\nabla)b, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = (\mathbf{B}\nabla)v. \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ — невозмущённое магнитное поле и $\rho(x, z)$ — плотность плазмы, которая далее определяется из решения, соответствующего безотражательному распространению волн.

В качестве криволинейных ортогональных координат выберем магнитный потенциал ϕ и магнитную потоковую функцию ψ . В результате имеем следующие связи:

$$\frac{B_x}{B_0} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{B_z}{B_0} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (19)$$

Здесь B_0 — постоянная с размерностью магнитного поля. С помощью (19) систему (18) можно свести к одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right), \quad (20)$$

при этом коэффициенты этого уравнения зависят от магнитного потока ψ . Эта ситуация представляется уникальной, когда, несмотря на двумерность исходной задачи, волновое уравнение является одномерным, что обусловлено спецификой движения плазмы в магнитном поле.

Дальнейшие шаги получения безотражательных волн аналогичны изложенным в разделе 1. Представляем решение уравнения (20) в виде

$$v(t, \phi, \psi) = A(\phi, \psi) F[t, h(\phi, \psi)] \quad (21)$$

и после подстановки в (20) приходим к уравнению Клейна—Гордона с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - V_A^2 \left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial \phi} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \frac{V_A^2}{A} \left[\left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial \phi} \frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{AB^2}{B_0^2} \frac{\partial h}{\partial \phi} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{V_A^2}{A} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial h}{\partial \phi} \right) F. \quad (22)$$

Левую часть этого уравнения (даламбериан) приводим к стандартному виду с постоянной скоростью V_0 :

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = \frac{V_0}{V_A} \frac{B_0}{B}, \quad (23)$$

так что отсюда можно определить зависимость $h(\phi, \psi)$. Затем приравняем к нулю слагаемое с $\partial F/\partial h$ в (22):

$$\left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial \phi} \frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{AB^2}{B_0^2} \frac{\partial h}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (24)$$

которое после подстановки (23) и с использованием выражения для альвеновской скорости

$$V_A(x, z) = \frac{B(x, z)}{\sqrt{\mu_0 \rho(x, z)}} \quad (25)$$

легко интегрируется:

$$A \propto \rho^{-1/4}, \quad (26)$$

при этом магнитное поле в (26) не входит.

Наконец, приравнявая последний член в (22) к постоянной, не зависящей явным образом от h (или от магнитного потенциала), но, вообще говоря, зависящей от функции магнитного потока:

$$\sigma = \frac{V_A^2}{A} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial A}{\partial \phi} \right), \quad (27)$$

приходим к уравнению Клейна—Гордона с постоянными (по магнитному потенциалу) коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \sigma F. \quad (28)$$

Отсюда следует существование бегущих безотражательных альвеновских волн с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = V_0^2 k^2 - \sigma. \quad (29)$$

Уравнение (27) определяет связь между магнитным полем и плотностью плазмы в случае безотражательного распространения волн. В случае $\sigma = 0$ (когда уравнение Клейна—Гордона совпадает с волновым уравнением) из (27) вытекает простое соотношение

$$\rho(\psi, \phi) = \frac{\rho_0(\psi)}{\left[1 + a(\psi) \int_0^\phi (B_0/B)^2 d\phi \right]^4}, \quad (30)$$

где $\rho_0(\psi)$ и $a(\psi)$ — произвольные функции.

В качестве примера определим магнитный потенциал ϕ и магнитную потоковую функцию ψ в слое как

$$\psi = H \exp(-z/H) \sin(x/H), \quad \phi = -H \exp(-z/H) \cos(x/H), \quad (31)$$

где H — постоянная величина с размерностью длины и $|x/H| < \pi/2$. Используя условия (19), находим явные выражения для магнитного поля:

$$B_x = B_0 \exp(-z/H) \sin(x/H), \quad B_z = B_0 \exp(-z/H) \cos(x/H). \quad (32)$$

Подставляя (32) в (30) и задавая $a(\psi) = \psi$ и $\rho_0(\psi) = \rho_0 = \text{const}$, получаем «безотражательный» профиль плотности плазмы и амплитуду бегущей волны:

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{(1 + \pi/2 - |x/H|)^4}, \quad A(x) = A_0(1 + \pi/2 - |x/H|). \tag{33}$$

Итак, мы показали, что в плоском слое с плотностью плазмы, зависящей только от поперечной координаты, и магнитным полем, изменяющимся как вдоль слоя, так и поперёк него, может распространяться бегущая вдоль слоя волна, причём её амплитуда переменна только в поперечном направлении и пропорциональна плотности плазмы в степени $-1/4$.

3. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ АЛЬВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ (ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

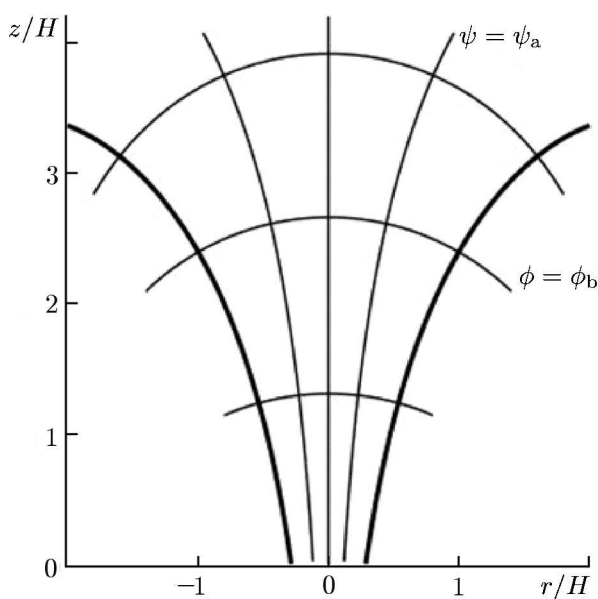


Рис. 1. Ортогональные криволинейные координаты (36)

Для простоты мы будем рассматривать трубку небольшого радиуса, когда все функции Бесселя в (35) остаются положительными. В этом случае удобно ввести ортогональные криволинейные координаты, «привязанные» к магнитному полю (см. рис. 1):

$$\phi = -H \exp(-z/H) J_0(r/H), \quad \psi = r \exp(-z/H) J_1(r/H), \tag{36}$$

так что скалярное произведение, входящее в (34), упрощается:

$$(\mathbf{B}\nabla) = \frac{B^2(z)}{B_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{37}$$

и в результате волновое уравнение (34) становится снова одномерным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho r^2} \frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r^2 \frac{B^2}{B_0^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right), \tag{38}$$

Другой интересный случай безотражательного распространения МГД волн возможен в осесимметричной расходящейся трубке, заполненной неоднородной плазмой. Волны в такой трубке описываются волновым уравнением [21]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho r^2} (\mathbf{B}\nabla) (r^2 \mathbf{B}\nabla) u, \tag{34}$$

где $u = v/r$ — завихренность скорости течения и используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) . Магнитное поле и плотность плазмы зависят от r и z . В частности, будем предполагать, что магнитное поле в пространстве изменяется как

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \exp(-z/H) J_0(r/H), \\ B_r &= B_0 \exp(-z/H) J_1(r/H), \end{aligned} \tag{35}$$

куда входят функции Бесселя 0-го и 1-го порядков и две постоянные, имеющие ясный физический смысл.

хотя в него входят коэффициенты, зависящие от обеих координат (z, r) или (ϕ, ψ) . Из (36) видно, что аналитически мы не можем выразить r через (ϕ, ψ) , однако можно сделать обратное преобразование

$$\phi = -H \frac{\psi}{r} \frac{J_0(r/H)}{J_1(r/H)} \quad (39)$$

и в (38) перейти от переменной ϕ к радиусу r :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{B_0^2 \psi^2}{\mu_0 \rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (40)$$

В этом уравнении плотность плазмы остаётся функцией ψ и r , и она подлежит определению в случае безотражательного распространения альвеновской волны.

Для этого ищем решение уравнения (40) в виде

$$u(r, \psi, t) = A(r, \psi) F[\tau(r, \psi), t]. \quad (41)$$

В результате волновое уравнение (41) преобразуется в уравнение Клейна—Гордона с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{B_0^2 \psi^2}{\mu_0 \rho r^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \\ = \frac{B_0^2 \psi^2}{\mu_0 \rho r^2} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{2}{A} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{V \tau}{V r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{B_0^2 \psi^2}{A \mu_0 \rho r^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) F. \end{aligned} \quad (42)$$

Приведём (42) к уравнению с коэффициентами, не зависящими от радиуса, с помощью серии подстановок:

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = V_0(\psi) \frac{\mu_0^{1/2} \rho^{1/2} r}{B_0 \psi} \quad \text{или} \quad \tau(r, \psi) = V_0(\psi) \frac{\mu_0^{1/2}}{B_0 \psi} \int_{r_1}^r \rho^{1/2} r' dr', \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{2}{A} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{B_0^2 \psi^2}{A \mu_0 \rho r^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \sigma(\psi). \quad (45)$$

Первая подстановка (43) определяет фазу волны через пока неизвестную плотность плазмы. Второе уравнение (44) интегрируется в общем виде:

$$A(r, \psi) = \frac{C(\psi) \sqrt{B_0 \psi}}{\mu_0^{1/4} r \rho^{1/4}(r, \psi)}. \quad (46)$$

В уравнениях (43)–(46) возникли произвольные функции: $V_0(\psi) > 0$, $C(\psi) > 0$ и $\sigma(\psi)$; r_1 — радиус у основания магнитной трубки. Уравнение (45) с учётом (46) определяет пространственные распределения плотности плазмы, обеспечивающие безотражательное распространение МГД волн. Это уравнение удаётся проинтегрировать, если выразить плотность плазмы из (46) и подставить в (45), которое сведётся к равенству

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \frac{\sigma C^4}{A^3}. \quad (47)$$

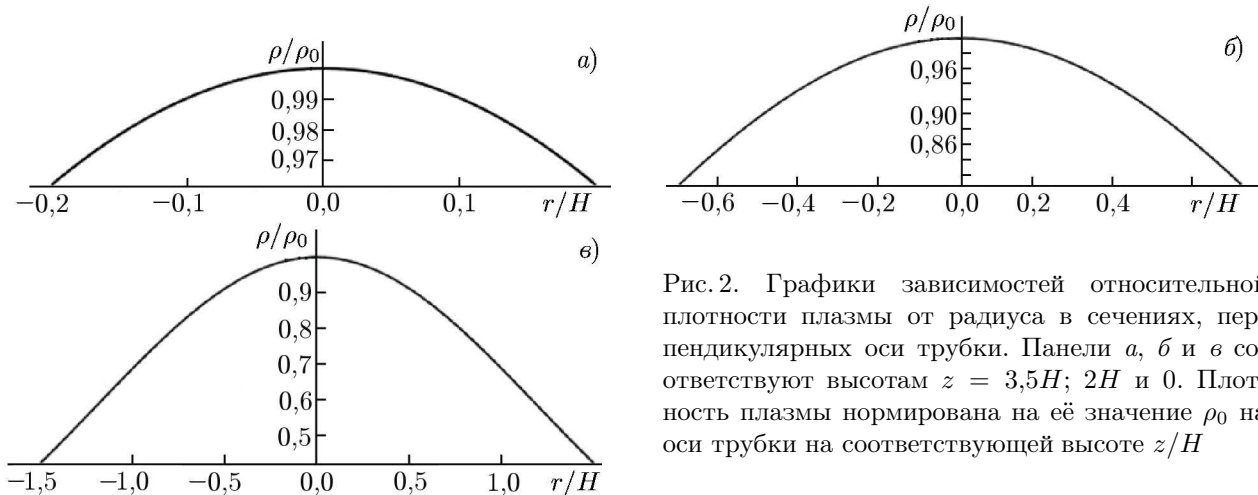


Рис. 2. Графики зависимостей относительной плотности плазмы от радиуса в сечениях, перпендикулярных оси трубки. Панели а, б и в соответствуют высотам $z = 3,5H; 2H$ и 0 . Плотность плазмы нормирована на её значение ρ_0 на оси трубки на соответствующей высоте z/H

После умножения обеих частей уравнения (47) на $\partial A/\partial r$, его можно один раз проинтегрировать:

$$r^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 = C_2 - \frac{\sigma C^4}{A^2}, \tag{48}$$

где возникает ещё одна постоянная C_2 , которая может быть функцией только ψ . Уравнение (48) является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. В результате оно определяет функцию $A(\psi, r)$, после подстановки которой в (46) находим искомые распределения плотности плазмы. Эти распределения зависят от нескольких постоянных (функций), так что обеспечивают достаточно широкий набор безотражательных распределений в плазме.

Рассмотрим здесь только один пример бездисперсионных безотражательных волн, когда $\sigma = 0$. Тогда из (48) и (46) получаем распределения амплитуды волны и плотности плазмы:

$$A(z, r) = \sqrt{C_2(\psi)} \ln[r/r_0(\psi)], \quad \rho(z, r) = \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\psi^2 C^4(\psi)}{C_2^2(\psi) r^4 \ln^4[r/r_0(\psi)]},$$

$$\psi = r \exp(-z/H) J_1(r/H), \tag{49}$$

зависящие от двух произвольных функций. Будем считать произвольные функции C и C_2 постоянными, а функцию $r_0(\psi) = \sqrt{H\psi}$. Последнее необходимо, чтобы избежать расхождений при $r \rightarrow 0$. В результате плотность плазмы и амплитуду безотражательной волны можно представить в виде

$$\rho(z, r) = 4\rho_0 \ln^4(2) H^2 \frac{\exp(-2z/H) J_1^2(r/H)}{f^2 \left\{ \frac{z}{H} + \ln \left[\frac{r}{H J_1(r/H)} \right] \right\}^4}, \tag{50}$$

$$A(z, r) = A_0 \exp[z/(2H)] \left\{ \frac{z}{H} + \ln \left[\frac{r}{H J_1(r/H)} \right] \right\} \sqrt{\frac{H J_1(r/H)}{r}}. \tag{51}$$

где ρ_0 — плотность плазмы в центре трубки у её основания ($z = 0, r = 0$). На рис. 2 представлено поперечное распределение плазмы на различных расстояниях от основания трубки. С высотой изменения плотности в поперечном сечении происходят быстрее.

На рис. 3 представлены графики распределения логарифма плотности плазмы, нормированной на её значение у основания трубки, вдоль силовых линий магнитного поля. Уравнение силовой линии, проходящей через точку с координатами $r = r_0, z = 0$, имеет вид

$$r J_1(r/H) \exp(-z/H) = r_0 J_1(r_0/H). \tag{52}$$

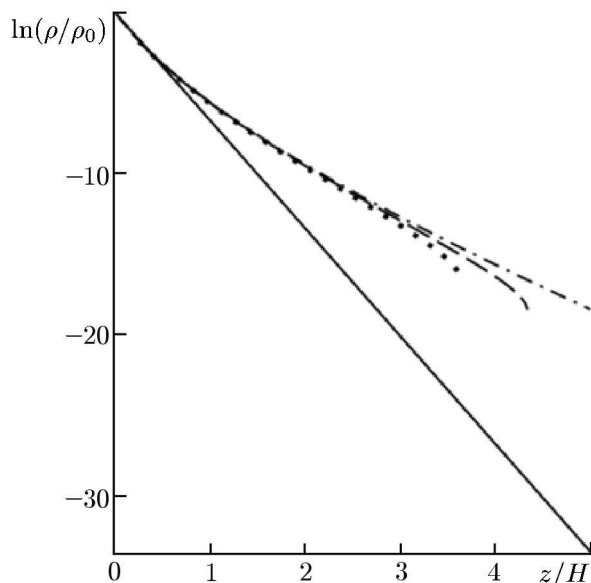


Рис. 3. Изменение логарифма плотности безотражательной плазмы с высотой вдоль магнитных силовых линий (52). Штрихпунктирная линия соответствует значению $r_0 = 0,01H$; штриховая линия $r_0 = 0,175H$ и пунктирная линия $r_0 = 0,25H$. Сплошная линия отвечает функции (53), определяющей изменение логарифма плотности в изотермической атмосфере с эквивалентной высотой $H/6,7$

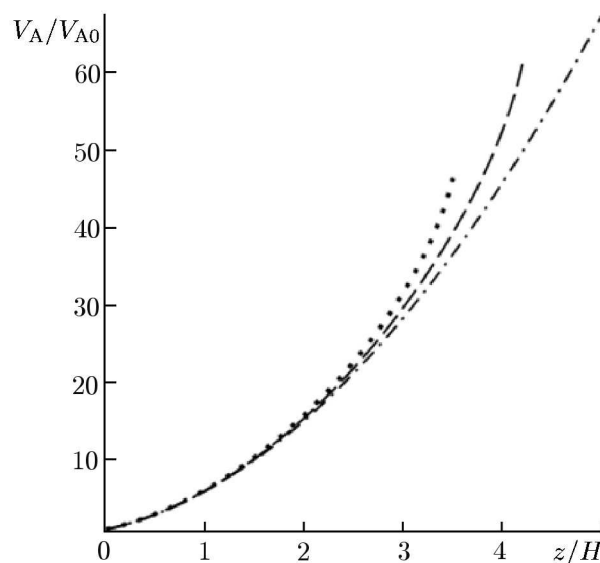


Рис. 4. Графики зависимостей альвеновской скорости $V_A(r_0/H, z/H)/V_A(r_0/H, 0)$ вдоль магнитной силовой линии, проходящей через точку $(r_0, 0)$. Штрихпунктирная линия соответствует значению $r_0 = 0,01H$; штриховая линия $r_0 = 0,175H$ и пунктирная линия $r_0 = 0,25H$

Для сравнения на рисунке представлен график, соответствующий распределению логарифма плотности

$$\rho_{\text{atm}}(z) = \rho_0 \exp(-6,7z/H), \quad (53)$$

известной для изотермической атмосферы с эффективной высотой $H/6,7$ [13], где H — эквивалентная высота изменения магнитного поля.

Рисунок 4 показывает зависимость альвеновской скорости, делённой на её значение V_{A0} у нижнего основания магнитной трубки, от координаты z/H вдоль магнитных силовых линий (52), проходящих через точки $(r_0/H, z/H)$, где r_0/H принимает значения 0,010; 0,175 и 0,250.

Рассмотренный выше пример описывает безотражательное распространение альвеновских волн в сильно неоднородной плазменной трубке.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье анализируется распространение линейных МГД волн в сильно неоднородной плазме для условий, когда можно пренебречь их внутренним отражением от неоднородности. Последовательно рассмотрены одно-, двух- и трёхмерные конфигурации плотности плазмы и магнитного поля, допускающие безотражательное распространение МГД волн. Исходные уравнения сводятся к одномерному волновому уравнению, которое и позволило исследовать безотражательные волны. Несмотря на одномерность волнового уравнения, конфигурации неоднородной плазмы не являются одномерными и соответствуют реалистическим условиям, наблюдающимся в солнечной плазме.

Авторы посвящают статью 85-летию своего коллеги и учителя Льва Ароновича Островского, работы которого в теории распространения волн в неоднородных средах общеизвестны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-02-00111), а также Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание по теме 0035-2019-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М. : Наука, 1967. 683 с.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М. : Наука, 1973. 341 с.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М. : Наука, 1972. 465 с.
4. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М. : Наука, 1977. 384 с.
5. Ostrovsky L. Asymptotic Perturbation Theory of Waves. London : Imperial College Press, 2015. 227 p.
6. Bluman G. // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43, No. 6. P. 1259–1273. <https://doi.org/10.1137/0143084>
7. Bluman G., Kumei S. // J. Math. Phys. 1987. V. 28, No. 2. P. 307–318. <https://doi.org/10.1063/1.527659>
8. Varley E., Seymour B. // Stud. Appl. Math. 1988. V. 78, No. 3. P. 183–225. <https://doi.org/10.1002/sapm1988783183>
9. Ибрагимов Н. Х., Руденко О. В. // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 4. С. 481–495. <https://doi.org/10.1134/1.1776218>
10. Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E. // Wave Motion. 2010. V. 47, No. 8. P. 496–507. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2010.03.001>
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, 1973. 416 с.
12. Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T. // J. Geophys. Res. Oceans. 2009. V. 114. Art. no. C07006. <https://doi.org/10.1029/2008JC005027>
13. Pelinovsky E., Didenkulova I., Shurgalina E., Aseeva N. // J. Phys. A. 2017. V. 50. Art. no. 505501. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa923e>
14. Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н. // Океанология. 2011. Т. 51, № 4. С. 621–626. <https://doi.org/10.1134/S0001437011040163>
15. Pelinovsky E., Talipova T., Didenkulova I., Didenkulova (Shurgalina) E. // Stud. Appl. Math. 2019. V. 142, No. 4. P. 513–527. <https://doi.org/10.1111/sapm.12235>
16. Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Бацына Е. К. // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 10. С. 625–628. <https://doi.org/10.1134/S0021364011100110>
17. Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Бацына Е. К. // Письма в Астроном. журн. 2012. Т. 38, № 6. С. 439–445. <https://doi.org/10.1134/S1063773712050064>
18. Ruderman M. S., Pelinovsky E., Petrukhin N. S., Talipova T. // Solar Phys. 2013. V. 286. P. 417–426. <https://doi.org/10.1007/s11207-013-0263-2>
19. Petrukhin N. S., Ruderman M. S., Pelinovsky E. // Solar Phys. 2015. V. 290, No. 5. P. 1323–1335. <https://doi.org/10.1007/s11207-015-0682-3>
20. Ruderman M. S., Petrukhin N. S. // Astron. Astrophys. 2017. V. 600. Art. no. A122. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629892>
21. Petrukhin N. S., Ruderman M. S., Shurgalina E. G. // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2018. V. 474, No. 2. P. 2289–2301. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2914>

22. Vavva M. G., Protopappas V. C., Gergidis L. N., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 125, No. 5. P. 3414–3427. <https://doi.org/10.1121/1.3110203>
23. Шварцбург А.Б., Ерохин Н.С. // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181, № 6. С. 627–646. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201106c.0627>
24. Didenkulova I., Pelinovsky E. // Phys. Lett. A. 2009. V. 373, No. 42. P. 3883–3887. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.08.051>
25. Ferraro C. A., Plumton C. // Astrophys. J. 1958. V. 127. P. 459–476. <https://doi.org/10.1086/146474>
26. Думова М., Рудерман М.С. // Solar Phys. 2005. V. 229. P. 79–94. <https://doi.org/10.1007/s11207-005-5002-x>
27. Ruderman M. S., Verth G., Erdélyi R. // Astrophys. J. 2008. V. 686, No. 1. P. 694–700. <https://doi.org/10.1086/591444>
28. Aschvanden M. Physics of the Solar Corona. Berlin : Springer, 2005. 923 p.
29. Holweg J. V. // J. Geophys. Res. 1985. V. 90, No. A8. P. 7620–7622. <https://doi.org/10.1029/JA090iA08p07620>
30. Trakhtengertz V. Yu., Feldstein A. Ya. // Planet. Space Sci. 1984. V. 32, No. 2. P. 127–134. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(84\)90147-8](https://doi.org/10.1016/0032-0633(84)90147-8)
31. Госсард Э.Э., Хуг У.Х. Волны в атмосфере. М. : Мир, 1975. 532 с.

Поступила в редакцию 29 ноября 2019 г.; принята в печать 31 января 2020 г.

NON-REFLECTIVE MAGNETOHYDRODYNAMIC WAVES IN AN INHOMOGENEOUS PLASMA

N. S. Petrukhin, E. N. Pelinovsky, and E. G. Didenkulova

The existence of traveling waves in a strongly inhomogeneous magnetized plasma is studied. It is shown that under certain conditions for characteristics of the medium, the waves do not reflect from inhomogeneities, although their amplitude and phase vary in space. Such reflectionless waves are found mathematically as solutions of wave equations with constant coefficients, to which the original equations with variable coefficients are reduced after a certain transformation. The existence of reflectionless waves in various plasma configurations is established.