УДК 532.592.2

ОБРАЗОВАНИЕ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ ИЗ НАЧАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ ОСТРОВСКОГО

Р. Г. Гримшоу[1,2], *Ю. А. Степанянц*[2,3] *

[1] Лондонский университетский колледж, г. Лондон, Великобритания
[2] Университет Южного Квинсленда, г. Тувумба, Австралия
[3] Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрено образование стационарных волновых пакетов — солитонов огибающей, возникающих в процессе эволюции из импульсных начальных возмущений в рамках уравнения Островского. Уравнение Островского, выведенное в 1978 году, описывает слабонелинейные волны в океане при учёте эффектов вращения Земли. Впоследствии оказалось, что данное уравнение достаточно универсально, и в настоящее время оно широко используется для описания волн различной природы. Известно, что при отрицательной мелкомасштабной дисперсии, чаше всего встречающейся в различных средах, данное уравнение не имеет решений в виде стационарных уединённых волн. В частности, эволюция солитонов Кортевега–де Вриза приводит к возникновению солитонов огибающей, которые при малых амплитудах могут быть описаны в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Однако вывод соответствующего НУШ до сих пор не был проведён достаточно убедительно, что приводило к некоторым противоречиям с численными расчётами. Здесь мы анализируем данную проблему и предлагаем свой подход к выводу НУШ и построению солитонов огибающей.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Островского, выведенное в 1978 году [1] для описания слабонелинейных поверхностных и внутренних волн в океане, находящихся под влиянием вращения Земли, в настоящее время признано универсальным и широко используется для описания волн различной природы (см., например, обзоры [2–4]). Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = \gamma u, \tag{1}$$

где c, α, β, γ — постоянные коэффициенты, которые зависят от конкретной физической задачи. В частности, c — скорость длинных линейных волн, когда не учитываются дисперсионные и нелинейные эффекты, α — нелинейный коэффициент, β и γ — коэффициенты мелкомасштабной и крупномасштабной дисперсии соответственно. В случае поверхностных и внутренних волн во вращающейся жидкости β — коэффициент дисперсии Буссинеска, а γ — коэффициент дисперсии Кориолиса. Терминология, относящаяся к дисперсии, будет понятной, если рассмотреть дисперсионное соотношение, показанное на рис. 1. Для волн с бесконечно малой амплитудой нелинейный член может быть опущен, а дисперсионное соотношение для волны синусоидальной формы $\propto \exp[i(kx - \omega t)]$ имеет вид

$$\omega = ck - \beta k^3 + \gamma/k. \tag{2}$$

Как видно из рис. 1, дисперсия отсутствует при $\beta = \gamma = 0$ (штриховая линия на рис. 1). Уравнение Островского применимо только в пределах диапазона длин волн, в котором дисперсионные

* Yury.Stepanyants@usq.edu.au

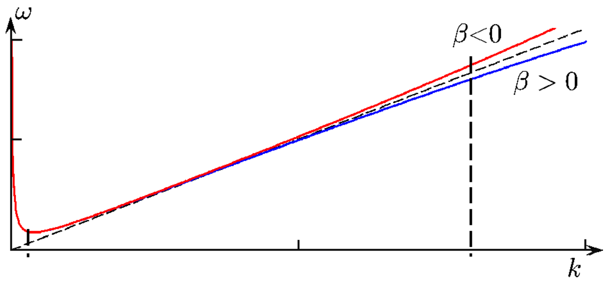

Рис. 1. Качественный вид дисперсионного соотношения для уравнения Островского (1). Наклонная штриховая линия соответствует случаю без дисперсии, $\omega \sim k$; вертикальные штриховые линии ограничивают интервал волновых чисел, в котором справедливо уравнение Островского

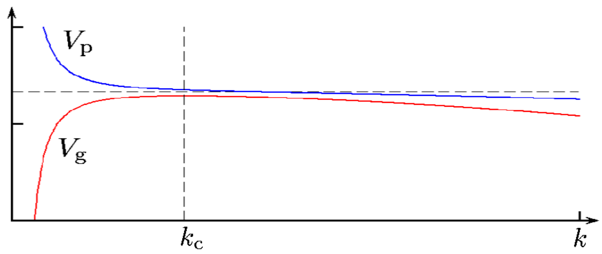

Рис. 2. Качественный вид фазовых и групповых скоростей для линейных волн в уравнении Островского (1). Групповая скорость имеет максимум при $k = k_{\rm c}$. Штриховая горизонтальная линия соответствует скорости длинных линейных волн в отсутствие вращения жидкости

эффекты малы, т. е. $|\beta| \ll 1$ и $|\gamma| \ll 1$. Здесь мы рассмотрим случай нормальной дисперсии, когда оба эти коэффициента положительные. На рис. 2 представлены фазовая $V_{\rm p}$ и групповая $V_{\rm g}$ скорости при $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, где

$$V_{\rm p} = c - \beta k^2 + \gamma/k^2, \qquad V_{\rm g} = c - 3\beta k^2 - \gamma/k^2. \tag{3}$$

Групповая скорость имеет максимум при $k = k_{\rm c} \equiv \sqrt[4]{\gamma/(3\beta)}$, где её значение составляет $V_{\rm g}(k_{\rm c}) = c - 2\sqrt{3\beta\gamma}$.

Уравнение Островского с $\beta\gamma > 0$ не имеет локализованных стационарных решений [5, 6]. Однако в отсутствие крупномасштабной дисперсии ($\gamma = 0$) уравнение (1) сводится к классическому уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ), которое имеет решение в виде уединённой волны (солитона),

$$u = A\,\mathrm{sch}^2\,\frac{x - Vt}{\Delta}, \tag{4}$$

где скорость уединённой волны V и её полуширина Δ связаны с её амплитудой A: $V = c + \alpha A/3$ и $\Delta = \sqrt{12\beta/(\alpha A)}$.

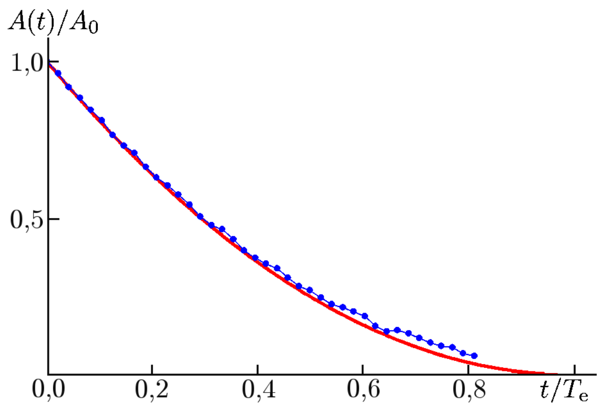

Рис. 3. Затухание со временем амплитуды солитона КдВ за счёт излучения, вызванного крупномасштабной дисперсией. Сплошная линия соответствует теоретическому расчёту (5), точки — численным данным

Под влиянием относительно небольшой крупномасштабной дисперсии ($\gamma \ll 1$) солитон (4) постепенно затухает из-за излучения длинных волн. Такое адиабатическое затухание было изучено в статьях [2, 7]. Из-за этого излучательного затухания амплитуда солитона уменьшается и формально обращается в ноль за конечное время $T_{\rm e}$:

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{t}{T_{\rm e}}\right)^2, \qquad T_{\rm e} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\alpha A_0}{12\beta}}, \tag{5}$$

где A_0 — начальная амплитуда солитона. Во время затухания форма солитона сохраняется, а другие параметры, $V(t)$ и $\Delta(t)$, плавно изменяются. Характер затухания (5) хорошо согласуется с прямыми численными расчётами в рамках уравнения Островского (1) (см. рис. 3 и работы [7, 8]). На рис. 4 показана начальная стадия затухания солитона и следующей за ним излучённой длинной волны [7].

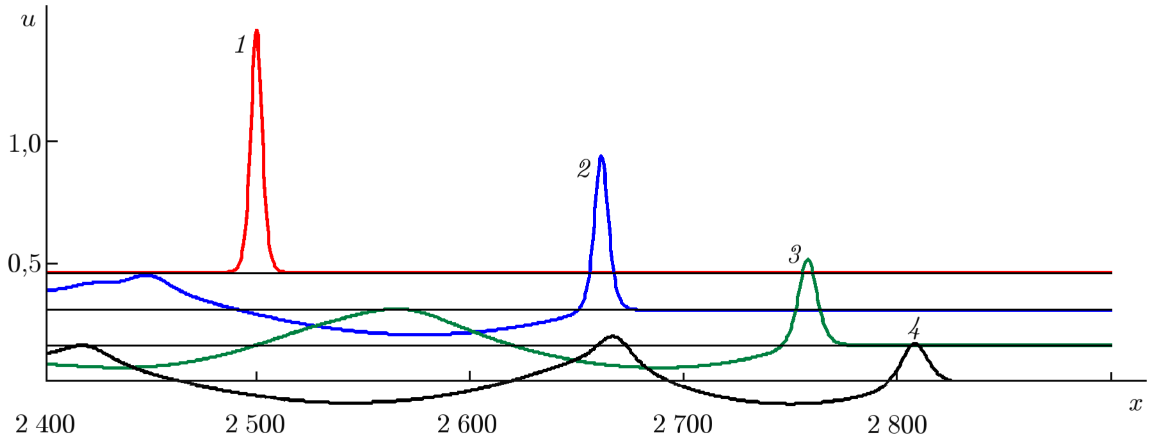

Рис. 4. Начальная стадия затухания солитона за счёт излучения, вызванного крупномасштабной дисперсией. Кривая *1* соответствует начальным условиям, остальные кривые — форме солитона в последующие моменты времени

После того, как исходный солитон затухнет, от него остаётся квазилинейный волновой цуг, который после длительной эволюции превращается в компактный волновой пакет, напоминающий солитон огибающей нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [7, 9–11]; это можно видеть, например, из рис. 5 в работе [9]. Подобные явления, связанные с возникновением волнового пакета в ходе длительной эволюции исходного солитона КдВ, наблюдались в несколько разных моделях океанских внутренних волн, например в модели Мияты—Чоя—Камассы с учётом вращения Земли [12] и модели Гарднера [13]. Лабораторный эксперимент, проведённый в большом вращающемся бассейне [14], продемонстрировал хорошее согласие между теоретическими и экспериментальными результатами.

Тем не менее, теоретическое описание возникающего волнового пакета остаётся неясным, а полученные к настоящему времени результаты находятся в некотором противоречии с численным моделированием. В частности, в статье [9] предполагалось, что волновой пакет появляется с волновым числом несущей $k = k_\mathrm{c}$, что соответствует максимуму групповой скорости (см. рис. 2). Затем было построено обобщённое НУШ третьего порядка и найдено точное решение в виде солитона огибающей. Это обобщённое НУШ третьего порядка для возмущения с волновым числом несущей, близким к k_c, имеет вид

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+V_\mathrm{g}\,\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)+p\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}-iq\frac{\partial^3 A}{\partial \xi^3}+\mu_0\,|A|^2A+i\left(\mu_1|A|^2\frac{\partial A}{\partial \xi}+\mu_2A^2\frac{\partial A^*}{\partial \xi}\right)=0. \qquad (6)$$

Здесь звёздочкой обозначено комплексное сопряжение, коэффициенты дисперсии равны

$$p=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\equiv\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{g}}{\mathrm{d}k}=-3\beta k+\frac{\gamma}{k^3}\,,\qquad q=\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{d}^3\omega}{\mathrm{d}k^3}\equiv\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{d}^2V_\mathrm{g}}{\mathrm{d}k^2}=-\beta-\frac{\gamma}{k^4}\,, \qquad (7)$$

а нелинейные коэффициенты определяются формулами

$$\mu_0=-\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2k^3}{\gamma+4\beta k^4}\,,\qquad \mu_1=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2k^2\left(5\gamma+4\beta k^4\right)}{(\gamma+4\beta k^4)^2}\,,\qquad \mu_2=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2k^2}{\gamma+4\beta k^4}\,. \qquad (8)$$

В предельном случае, когда $k = k_\mathrm{c}$, уравнение (6) упрощается и его коэффициенты принимают вид

$$p=0,\qquad q=-4\beta,\qquad \mu_0=-\frac{2}{7}\,\frac{\alpha^2}{\sqrt{3\beta\gamma}}\,\sqrt[4]{\frac{\gamma}{3\beta}}\,,\qquad \mu_1=\frac{38}{49}\,\frac{\alpha^2}{\sqrt{3\beta\gamma}}\,,\qquad \mu_2=\frac{2}{7}\,\frac{\alpha^2}{\sqrt{3\beta\gamma}}\,. \qquad (9)$$

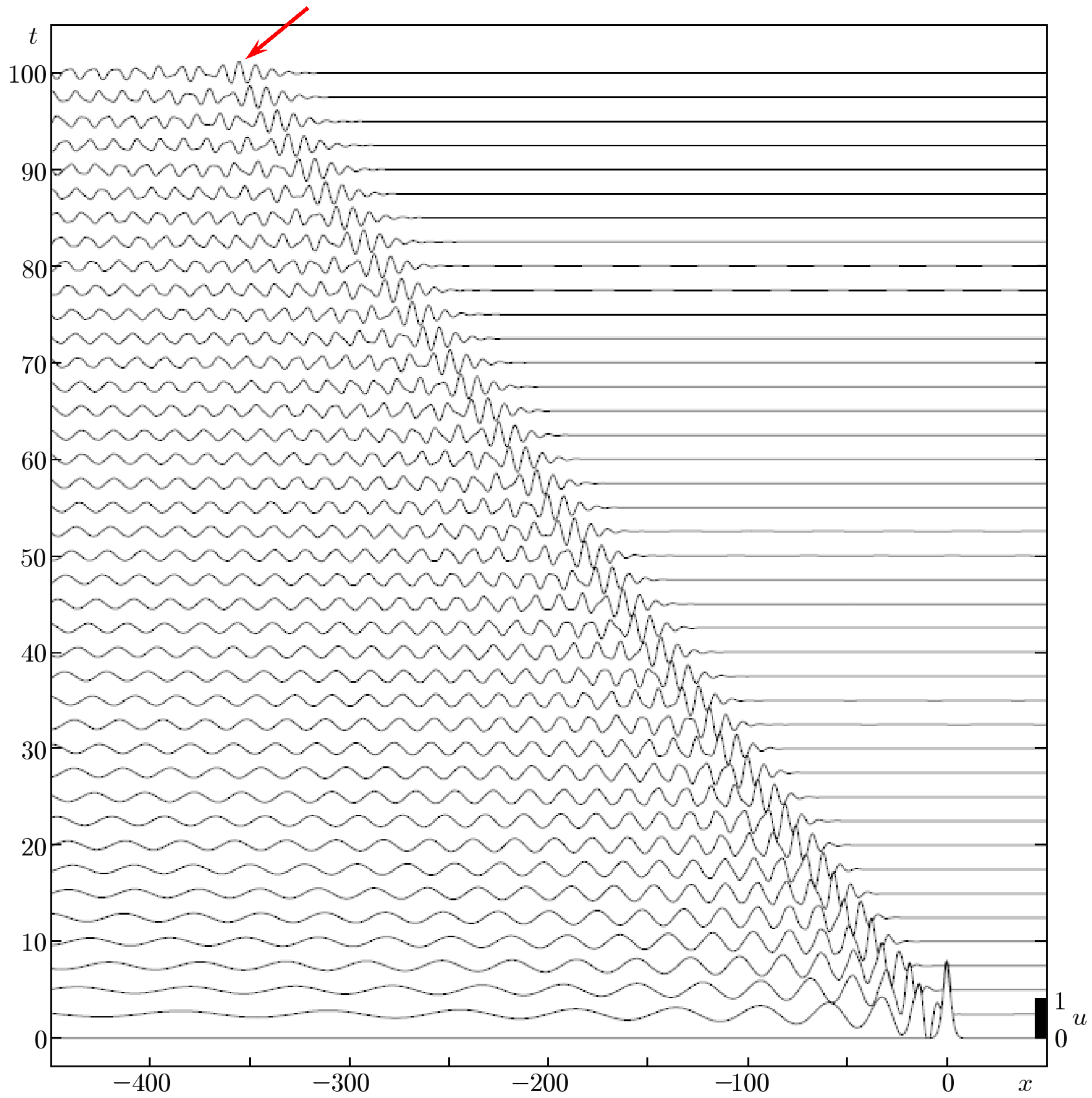

Рис. 5. Возникновение солитона огибающей из исходного солитона КдВ после длительной эволюции в рамках уравнения Островского (1). Стрелка вверху показывает солитон огибающей. Сплошная вертикальная черта в правом нижнем углу показывает единичный масштаб для начальной амплитуды солитона

Если волновое число несущей не очень близко к k_{c}, то членами более высокого порядка q, μ_1 и μ_2 можно пренебречь, а уравнение (6) привести к обычному НУШ:

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+V_{\mathrm{g}}\,\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)+p(k)\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}+\mu_0(k)\,|A|^2 A=0. \tag{10}$$

Решение обобщённого НУШ третьего порядка (6) для солитона огибающей было найдено в работе [9]:

$$A=A_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sch}\left(\frac{\xi-Vt}{\Delta}\right)\exp\left\{i\left[(k+\kappa)\,\xi-(\omega+\sigma)\,t\right]\right\}. \tag{11}$$

Здесь полуширина импульса огибающей Δ, скорость V, калибровка волнового числа κ (gauge) и подстройка частоты σ (chirp) определяются только амплитудой солитона A_{e} (ниже приведены формулы из работы [9] с исправленными опечатками):

$$\Delta = \frac{1}{A_{\rm e}} \sqrt{-\frac{6q}{\mu_1+\mu_2}}, \quad \kappa = -\frac{3\mu_0 q + p\,(\mu_1+\mu_2)}{6q\mu_2},$$
$$\sigma = \frac{\mu_1+\mu_2}{6q}\, A_{\rm e}^2\,(p+3\kappa q) + \kappa\left(V_{\rm g} + p\kappa + q\kappa^2\right),$$
$$V = V_{\rm g} + \frac{\mu_1+\mu_2}{6}\, A_{\rm e}^2 + \kappa\,(2p+3\kappa q)\,. \tag{12}$$

Отметим, что это решение содержит только один свободный параметр, например амплитуду солитона $A_{\rm e}$, тогда как другие параметры могут быть определены через $A_{\rm e}$, за исключением калибровки κ, которая зависит только от коэффициентов обобщённого НУШ третьего порядка (6).

В частном случае, когда $p = 0$, т. е. при $k = k_{\rm c}$, эти выражения упрощаются и могут быть приведены к виду

$$\Delta = \frac{1}{A_{\rm e}} \sqrt{-\frac{6q}{\mu_1+\mu_2}}, \qquad \kappa = -\frac{\mu_0}{2\mu_2} \equiv k_{\rm c}/2,$$
$$\sigma = -\frac{\mu_0\,(\mu_1+\mu_2)}{4\mu_2}\, A_{\rm e}^2 - \frac{\mu_0}{2\mu_2}\left[V_{\rm g}(k_{\rm c}) + \frac{q\mu_0^2}{4\mu_2^2}\right],$$
$$V = V_{\rm g}(k_{\rm c}) + \frac{3q\mu_0^2}{4\mu_2^2} + \frac{\mu_1+\mu_2}{6}\, A_{\rm e}^2. \tag{13}$$

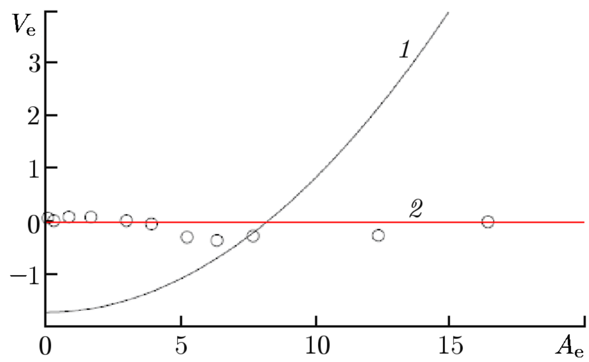

Рис. 6. Зависимость скорости солитона огибающей от его амплитуды. Кривая *1* соответствует теоретическому расчёту, светлые кружки — численным данным [9], горизонтальная линия *2* показывает нулевую скорость солитона огибающей

Это решение с $k = k_{\rm c}$ и $\kappa = k_{\rm c}/2$ использовалось в работе [9] для сравнения с данными численного моделирования. Из уравнения (13) следует, что скорость солитона квадратично зависит от амплитуды $A_{\rm e}$, как показано линией *1* на рис. 6, что противоречит полученным численным результатам, представленным светлыми кружками. В данной статье мы возвращаемся к этой проблеме и представляем иной подход к решению данного вопроса, который лучше согласуется с численными данными.

1. АВТОМОДУЛЯЦИЯ КВАЗИГАРМОНИЧНЫХ ВОЛН В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ ОСТРОВСКОГО И СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ

Начнём с интересного факта, впервые упомянутого в работе [9] (см. также [15]), что в уравнении Островского длинные квазигармонические волны с $k < k_{\rm c}$ устойчивы к автомодуляции, тогда как волны с $k > k_{\rm c}$ неустойчивы. На первый взгляд, это противоречит ожиданиям. Действительно, без крупномасштабной дисперсии, когда $\gamma = 0$ в уравнении (1), последнее сводится к классическому уравнению КдВ, для которого квазигармонические волны устойчивы к автомодуляции для всех k, а малая крупномасштабная дисперсия может потенциально воздействовать только на длинные волны, оставляя короткие волны устойчивыми к автомодуляции.

Объяснение этого очевидного парадокса двойное. Во-первых, влияние крупномасштабной дисперсии резко меняет дисперсионное соотношение при малых k (см. рис. 1); это приводит к подавлению «нулевой гармоники» и её вклада в нелинейный коэффициент μ_0. В результате этого знак данного коэффициента противоположен по отношению к случаю, когда он получается из уравнения КдВ. Во-вторых, при $k = k_{\rm c}$ из-за влияния крупномасштабной дисперсии в дисперсионном соотношении появляется критическая точка максимума групповой скорости.

В соответствии с критерием Лайтхилла [16–18], квазигармоническая волна с амплитудой A неустойчива к автомодуляции, если $p(k)\mu_0(k) > 0$. В данном случае это даёт

$$\frac{2\alpha^2\beta k^4}{\gamma + 4\beta k^4}\left(1 - \frac{k_c^4}{k^4}\right) > 0. \tag{14}$$

Это неравенство справедливо для волновых чисел $k > k_{\rm c}$. Инкремент модуляционной неустойчивости равен

$$\Gamma(k, K) = \sqrt{p(k)K^2\left[2\mu_0(k)A^2 - p(k)K^2\right]}\,, \tag{15}$$

где K — волновое число модуляции. Наиболее неустойчивая модуляция соответствует $K_{\max}^2 = \mu_0(k)A^2/p(k)$, а максимум инкремента как функция волнового числа равен

$$\Gamma_{\max}(k) = |\mu_0(k)|A^2 = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 A^2 k^3}{\gamma + 4\beta k^4}\,. \tag{16}$$

Эта функция может быть далее оптимизирована по отношению к волновому числу несущей волны k; её максимум достигается при $k = k_{\rm m} \equiv (3\gamma/4\beta)^{1/4}$, когда

$$\Gamma_{\max}(k_{\rm m}) = \frac{\alpha^2 A^2}{6\gamma}\left(\frac{3\gamma}{4\beta}\right)^{3/4}. \tag{17}$$

Отношение критических волновых чисел $k_{\rm m}/k_{\rm c} = \sqrt{3/2} \approx 1{,}22$, а относительная разность волновых чисел составляет

$$\frac{k_{\rm m} - k_{\rm c}}{k_{\rm c}} = \sqrt{3/2} - 1 \approx 0{,}22. \tag{18}$$

Поэтому наиболее быстро растущее возмущение на фоне квазилинейного волнового цуга имеет волновое число $k_{\rm m}$, тогда как при $k_{\rm c}$ инкремент равен нулю. Поскольку $k_{\rm m}$ заметно отличается от $k_{\rm c}$, соответствующий волновой цуг должен быть описан с помощью обычного НУШ, а не обобщённого НУШ третьего порядка (6) с $k = k_{\rm c}$. Этот вывод согласуется с эмпирическими наблюдениями в работах [11, 13], где авторы заметили, что у полученного солитона огибающей, возникшего в процессе длительной эволюции из солитона КдВ, волновое число сместилось вправо от $k_{\rm c}$. Решение, построенное в работе [9] для солитона огибающей (11) с $p = 0$, показывает, что истинное волновое число несущей, включая калибровку, тоже сместилось вправо, $k = k_{\rm c} + \kappa = 3k_{\rm c}/2$, поскольку в соответствии с уравнением (13) $\kappa = -\mu_0/\mu_2 = k_{\rm c}/2$.

Учитывая всё это, мы предлагаем следующий сценарий развития солитона огибающей из солитона КдВ малой амплитуды. После относительно короткой стадии полного затухания солитон КдВ в конечном счёте преобразуется в квазилинейный волновой цуг; это подтверждается результатами численного моделирования в работе [13]. Затем на эту часть спектра с волновыми числами $k > k_{\rm c}$ влияет модуляционная неустойчивость. Волновое число наиболее быстро растущей гармоники близко к $k_{\rm m}$, как показано на рис. 7 [13], и это приводит к формированию солитона огибающей, который описывается обычным НУШ (10). Спектр, показанный на рис. 7, был получен из численного решения уравнения Островского (1) с единичными коэффициентами и начальным условием в виде солитона КдВ (4) с амплитудой $A_0 = 4$. Как видно из рис. 7, при $t = 1\,000$ максимальная составляющая спектра не совсем соответствует $k_{\rm m}$, но достаточно близка к этому значению и значительно ближе к $k_{\rm m}$, чем к $k_{\rm c}$ или $3k_{\rm c}/2$, как подразумевалось в работе [9]. Небольшое расхождение с $k_{\rm m}$ могло быть связано с нелинейными эффектами более высокого порядка или взаимодействиями между гармониками. Заметим однако, что эти эффекты исключаются при выводе НУШ (10). Кроме того, волновой спектр, получаемый из начальных

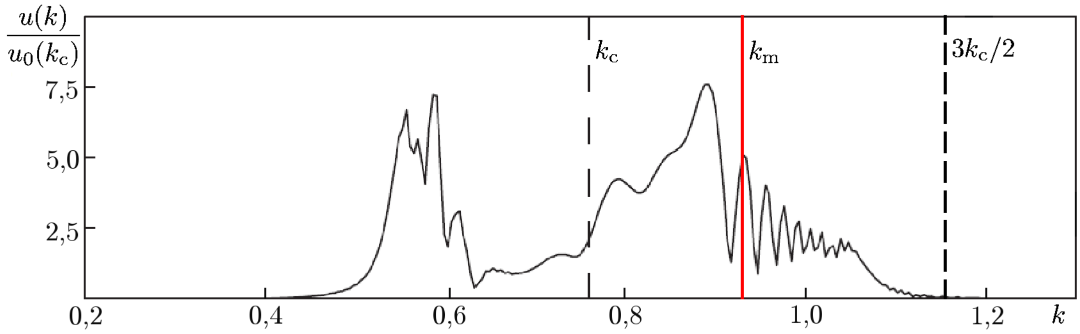

Рис. 7. Спектр волновых чисел при $t = 1\,000$, определённый из численного решения уравнения Островского (1) с начальным условием в виде солитона КдВ (4). При выбранных коэффициентах уравнения Островского волновые числа $k_c \approx 0{,}76$, $k_m \approx 0{,}93$, $3k_c/2 \approx 1{,}14$. Рисунок воспроизведён из статьи [13] с указанием положений характерных волновых чисел k_c, k_m и $3k_c/2$

импульсов с различными формами и амплитудами, мог быть достаточно сложным и случайно иметь даже нулевую амплитуду в оптимальной точке $k = k_m$. Следовательно, волновое число несущей в результирующем солитоне огибающей может не полностью совпадать с k_m, но должно быть близко к этой величине, по крайней мере для волн с малой амплитудой. В работе [13] изучена зависимость волновых чисел несущей от амплитуды исходного солитона КдВ для уравнения Островского с дополнительным кубическим нелинейным членом и найдена их зависимость от начального импульса.

Поэтому мы предполагаем, что солитон огибающей с относительно узким спектром, центр которого расположен в окрестности волнового числа k_m, должен описываться обычным НУШ, имеющим такое же солитонное решение, что и (11), но со следующими соотношениями между параметрами:

$$\Delta = \frac{1}{A_e}\sqrt{\frac{2p}{\mu_0}}, \qquad \kappa = 0, \qquad \sigma = -\frac{\mu_0 A_e^2}{2}, \qquad V = V_g. \tag{19}$$

Отметим, что всегда разумно выбирать такое волновое число несущей k, чтобы калибровка была нулевой, т. е. $\kappa = 0$, и, следовательно, $V = V_g(k)$, где $V_g(k_m) = c - 5\sqrt{\beta\gamma/24}$. Поэтому, если исключить V_g из уравнения (6) с помощью преобразования Галилея, то в подвижной системе отсчёта скорость солитона будет равна нулю в соответствии с численными расчётами, проведёнными в работе [9] (см. прямую *2* на рис. 6). Эффективный пространственный спектр Δk солитона должен быть узким, $\Delta k \ll k_m - k_c$, и полностью принадлежать области модуляционной неустойчивости.

В заключение отметим, что исходные солитоны КдВ с большими амплитудами приведут к возникновению сильно нелинейных волновых цугов, которые не могут быть описаны НУШ. Примеры таких образований показаны на рис. 8 из работы [7]. Подобные образования были также получены численно в работах [11–13, 19]. Теоретическое описание таких образований в терминах модуляционной теории Уизема было представлено в работе [19].

ВЫВОДЫ

В данной статье мы вновь рассмотрели формирование солитонов огибающей, возникающих в ходе длительной эволюции исходного солитона КдВ в рамках уравнения Островского. Было показано, что волновые цуги с малыми амплитудами могут быть описаны с помощью обычного НУШ с волновым числом несущей, близким к отвечающему максимальному инкременту модуляционной неустойчивости. Рассчитаны параметры типичного солитона огибающей. Полученные

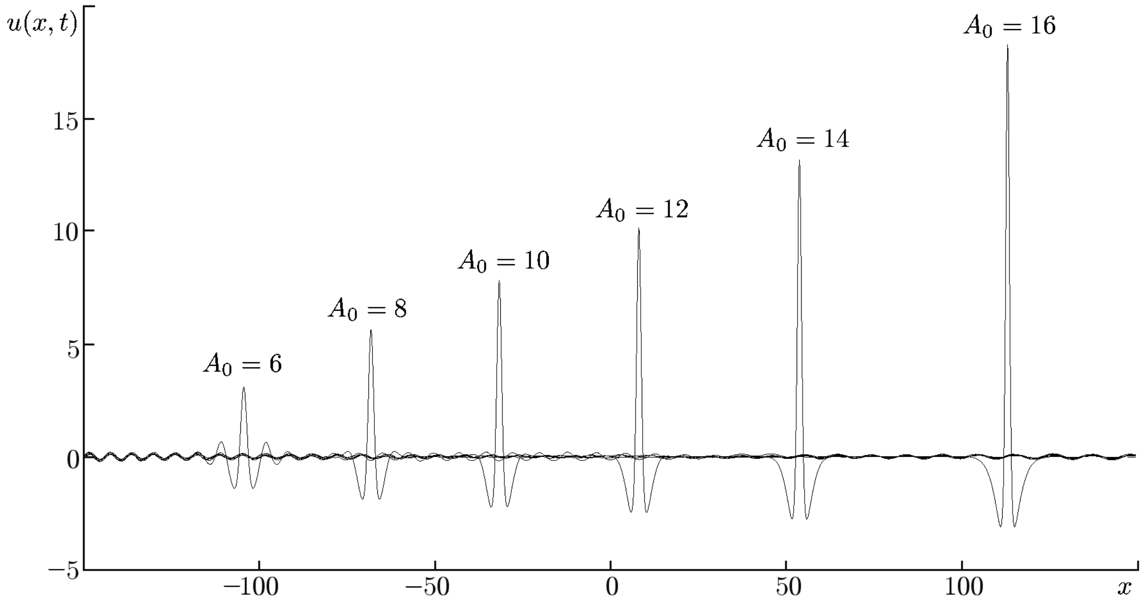

Рис. 8. Зависимость формы солитона огибающей от амплитуды A_0 исходного солитона КдВ для $t = 60$. Волнистую линию малой амплитуды при $u = 0$ можно не принимать во внимание: она появляется за счёт периодических граничных условий в численной схеме в процессе формирования солитонов из начальных возмущений

результаты могут представлять интерес для изучения волн в различных средах, когда уравнение Островского является подходящей моделью для их описания, в частности, в океане, атмосфере, в обычной и кварк-глюонной плазме и т. д.

Авторы выражают благодарность Алексею Слюняеву за полезные обсуждения.

Работа Роджера Гримшоу была поддержана стипендией Leverhulme Emeritus Fellowship EM-2019-030/9. Работа Юрия Степанянца была поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-2485.2020.5), а также грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № ФСВЕ-2020-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Островский Л. А. Океанология. 1978. Т. 18, № 2. С. 181–191.
2. Grimshaw R. H. J., Ostrovsky L. A., Shrira V. I., Stepanyants Y. A. // Surv. Geophys. 1998. V. 19, No. 4. P. 289–238. https://doi.org/10.1023/A:1006587919935
3. Ostrovsky L. A., Pelinovsky E. N., Shrira V. I., Stepanyants Y. A. // Chaos. 2015. V. 25, No. 9. Art. no. 097620. https://doi.org/10.1063/1.4927448
4. Степанянц Ю. А. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 1. С. 20–42.
5. Leonov A. I. // Ann. New York Acad. Sci. 1981. V. 373, No. 3. P. 150–159. https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1981.tb51140.x
6. Галкин В. М., Степанянц Ю. А. // ПММ. 1991. Т. 55, № 6. С. 1 051–1 055.
7. Grimshaw R., Stepanyants Y., Alias A. // Proc. Roy. Soc. A. 2016. V. 472, No. 2 185. Art. no. 20150416. https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0416

8. Obregon M., Stepanyants Y. // Math. Model. Natural Phenom. 2012. V. 7, No. 7/2. P. 113–130. https://doi.org/10.1051/mmnp/20127210
9. Grimshaw R., Helfrich K. R. // Stud. Appl. Math. 2008. V. 121, No. 1. P. 71–88. https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2008.00412.x
10. Grimshaw R., Helfrich K. R. // IMA J. Appl. Math. 2012. V. 77, No. 3. P. 326–339. https://doi.org/10.1093/imamat/hxs024
11. Whitfield A. J., Johnson E. R. // Phys. Fluids. 2014. V. 26, No. 5. Art. no 056606. https://doi.org/10.1063/1.4879075
12. Helfrich K. // Phys. Fluids. 2007. V. 19, No. 2. Art. no. 026601. https://doi.org/10.1063/1.2472509
13. Whitfield A. J., Johnson E. R. // Phys. Rev. E. 2015. V. 91, No. 5. Art. no. 051201. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.051201
14. Grimshaw R. H. J., Helfrich K. R., Johnson E. R. // Phys. Fluids. 2013. V. 25, No. 5. Art. no. 056602. https://doi.org/10.1063/1.4805092
15. Nikitenkova S. P., Singh N., Stepanyants Y. A. // Chaos. 2015. V. 25, No. 12. Art. no. 123113. https://doi.org/10.1063/1.4937362
16. Lighthill M. J. // IMA J. Appl. Math. 1965. V. 1, No. 3. P. 269–306. https://doi.org/10.1093/imamat/1.3.269
17. Lighthill J. Waves in Fluids, Cambridge (England), New York : Cambridge University Press, 1978. 504 p.
18. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М. : Физматлит, 2003. 400 с.
19. Whitfield A. J., Johnson E. R. // Proc. Roy. Soc. A. 2016. V. 473, No. 2197. Art. no. 20160709. https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0709

Поступила в редакцию 29 ноября 2019 г.; принята в печать 31 января 2020 г.

EMERGENCE OF ENVELOPE SOLITARY WAVES FROM INITIAL LOCALISED PULSES WITHIN THE OSTROVSKY EQUATION

R. H. J. Grimshaw and Yu. A. Stepanyants

We study the emergence of steady wave packets in the form of envelope solitary waves (envelope solitons) which evolve from localised pulse-type initial conditions in the long-term evolution within the framework of the Ostrovsky equation. In 1978 L. A. Ostrovsky derived an equation for the description of weakly nonlinear oceanic waves affected by the Earth' rotation; which is now widely known as the Ostrovsky equation. Subsequently it became clear that this equation is universal, and is widely used for the description of waves in various settings. It is well-known that in applications to media with a negative small-scale dispersion this equation does not possess steady solitary wave solutions. In particular, the evolution of an initial Korteweg–de Vries (KdV) soliton results in the emergence of envelope solitons which can be described by the nonlinear Schrödinger equation (NLS) when the amplitude of initial KdV soliton is sufficiently small. However, the derivation of the corresponding NLS was in contradiction with some numerical simulations. Hence here we revisit this problem and suggest a new approach to the construction of the emerging envelope solitons.