

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКОГО СВЕТОВОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С ЛОРЕНЦЕВЫМ КОНТУРОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ УСИЛЕНИЯ

*Н. С. Бухман\**

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Рассмотрена одномерная задача о распространении короткого светового импульса в среде с лоренцевым контуром спектральной линии усиления. Получены простые приближённые формулы для пространственного распределения поля в любой момент времени. Показано, что с ростом протяжённости трассы происходит не только нормализация временной зависимости поля в фиксированной точке пространства, но и нормализация пространственного распределения поля в фиксированный момент времени. Показано, что скорость перемещения пространственного максимума поля оказывается выше групповой скорости и, в отличие от групповой скорости, в любом случае не может быть меньше половины фазовой скорости света в данном веществе. Получены простые выражения для пространственного и временного инкрементов роста поля в усиливающей среде.

### ВВЕДЕНИЕ

Распространение света в средах с селективным по частоте усилением или поглощением с 1960-х годов и по настоящее время является объектом интенсивного теоретического и экспериментального изучения [1–8].

Хорошо известно [9–15], что при распространении светового импульса в сильно диспергирующей среде его групповая скорость может существенно отличаться от вакуумной скорости света как в большую (в случае аномальной дисперсии), так и в меньшую (в случае нормальной дисперсии) сторону. Оба эти эффекта (обычно именуемые «быстрый свет» и «медленный свет» соответственно [9–12]) представляют интерес для оптических систем обработки информации и потому интенсивно изучаются как теоретически, так и экспериментально.

В данной работе изучается «медленный свет», возникающий при распространении светового импульса в резонансно-усиливающей среде. В простейшей постановке (безграничная однородная среда, линейное приближение) эта задача рассмотрена в [9, 15]. Основные результаты этих работ следующие: увеличение длительности импульса и нормализация его временной зависимости с ростом протяжённости трассы всегда имеют место (это связано с сужением полосы усиления слоя среды как линейного фильтра при увеличении толщины этого слоя), скорость распространения светового импульса в среде с достаточно сильной и узкой спектральной линией усиления в принципе может быть сколь угодно мала (это связано с малостью групповой скорости в центре спектральной линии усиления). В дальнейшем полученные в работах [9, 15] результаты применялись при решении ряда близких задач [5, 6, 16, 17], в том числе и в существенно более реалистичной постановке (например, световой импульс в световодах с неоднородным по длине распределением материальных параметров [7, 18–21]).

Тем не менее, остался совершенно не изученным вопрос о временной эволюции пространственного распределения поля светового импульса. На первый взгляд кажется, что для решения этой задачи (при наличии приведённых в работах [9, 15] формул для временной зависимости сигнала в фиксированной точке пространства) достаточно просто выполнить замену переменных — в уже

---

\* nik3142@yandex.ru

имеющихся формулах с аргументом  $t$  и параметром  $z$  считать  $t$  параметром, а  $z$  — аргументом. К сожалению, этот метод с гарантией работает только для точных формул, которых в данном случае просто нет. Формулы работ [9, 15], несмотря на их асимптотическую точность при неограниченном увеличении длины трассы, при таком использовании приводят к очевидно бессмысленным результатам (вплоть до вывода о нелокализованности в пространстве локализованного во времени светового импульса). Поэтому для изучения временной эволюции пространственного распределения поля светового импульса (что и является основной целью данной работы) придется вернуться к исходным соотношениям и решать соответствующую задачу с начала. Именно это и осуществляется в данной работе.

Необходимо отметить, что решение аналогичной задачи о линейном усилении импульса не только для лоренцевского профиля спектральной линии, но и для других профилей линии усиливающей среды, в том числе с учётом диссипации (и дифракции) в фоновой среде, а также для усиления импульса в среде со слабой релаксацией поляризации активной среды обсуждались ещё в обзоре [4] (см. также цитируемую в [4] литературу).

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение сигнала  $E(z, t)$  с несущей частотой  $\omega_1$  и комплексной огибающей  $A(z, t)$  [1, 2] в однородной изотропной среде вдоль оси  $z$ . Пусть  $\omega_1$  близка к частоте одной из спектральных линий среды  $\omega_0$ , т. е. отстройка несущей частоты сигнала от центральной частоты спектральной линии  $\Omega_0 = \omega_1 - \omega_0$  мала в сравнении с несущей частотой ( $\Omega_0 \ll \omega_1$ ). Предполагая, что сигнал является узкополосным (ширина его спектра мала в сравнении с несущей частотой  $\omega_1$ , но не обязательно мала в сравнении с отстройкой  $\Omega_0$ ), имеем

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, & E_\omega(z, \omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt, \\
 E(z, t) &= A(z, t) \exp(-i\omega_1 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_1 t), & A(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_\Omega(z, \Delta\Omega) \exp(-i\Delta\Omega t) d\Delta\Omega, \\
 A_\Omega(z, \Delta\Omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\Delta\Omega t) dt, & E_\omega(z, \omega) &= A_\Omega(z, \omega - \omega_1) + A_\Omega^*[z, -(\omega + \omega_1)]; \\
 \omega &= \omega_1 + \Delta\Omega = \omega_0 + \Omega, & \Omega &= \Omega_0 + \Delta\Omega.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $E(z, t)$  и  $E_\omega(z, \omega)$  — вещественный высокочастотный сигнал и его спектр соответственно,  $A(z, t)$  и  $A_\Omega(z, \Delta\Omega)$  — низкочастотная комплексная огибающая сигнала с несущей частотой  $\omega_1$  и её спектр соответственно,  $\omega_0$  — центральная частота спектральной линии,  $\Omega_0 = \omega_1 - \omega_0$  — сдвиг несущей частоты сигнала относительно центра спектральной линии,  $\Delta\Omega$  — сдвиг частоты относительно несущей частоты,  $\Omega$  — сдвиг частоты относительно центра спектральной линии, звёздочка обозначает комплексное сопряжение.

Рассмотрим распространение света через слой вещества с толщиной  $z$  с показателем преломления  $n(\omega) = n_0 + \Delta n(\omega)$  где  $n_0$  — фоновое (нерезонансное) вещественное значение показателя преломления среды <sup>1</sup>, слабо зависящее от частоты света вблизи  $\omega_0$ , а  $\Delta n(\omega)$  — малая комплексная добавка к показателю преломления среды, обусловленная спектральной линией усиления

<sup>1</sup> Для лазера на YAG, например,  $n_0 = 1,82$ .

с центральной частотой  $\omega_0$ . По порядку величины вблизи спектральной линии с коэффициентом усиления  $\alpha_0$  в середине  $|\Delta n|/n_0 \approx \alpha_0 \lambda \ll 1$ , т. е. даже в середине спектральной линии отклонение показателя преломления от фонового значения очень мало. Тем не менее, это отклонение очень существенно по двум причинам. Во-первых, именно мнимая часть  $\Delta n(\omega)$  обеспечивает усиление сигнала и, во-вторых, резкая зависимость  $\Delta n(\omega)$  от частоты приводит к тому, что сигнал не только усиливается, но и существенно искажается.

Пусть временная огибающая сигнала в стартовой точке  $z = 0$  определяется функцией  $A^{(0)}(t) \equiv A(0, t)$  со спектром  $A_{\Omega}^{(0)}(\Delta\Omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) \exp(i\Delta\Omega t) dt$ . Тогда в сечении  $z$  для спектра огибающей имеем

$$A_{\Omega}(z, \Delta\Omega) = A_{\Omega}^{(0)}(\Delta\Omega) \exp[ikn(\omega_1 + \Delta\Omega)z], \quad (2)$$

где  $k = \omega/c$ . Для изучения эволюции сигнала по мере его распространения в веществе удобно рассматривать слой вещества как некоторый фильтр с комплексной передаточной функцией

$$F(z, \omega) = \exp[ikn(\omega_1 + \Delta\Omega)z], \quad (3)$$

а его воздействие на сигнал — как воздействие некоторого линейного оператора, локального в частотном представлении (см. (2)) и интегрального во временном (см. ниже).

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для дальнейшего удобно представить комплексный показатель преломления среды  $n(\omega) = n_0 + \Delta n(\omega)$  в виде  $n(\omega) = n_0 + \Delta n(\omega_0 + \Omega) = n_0 - i\alpha_0 k^{-1} g(\Omega)$ . Здесь введён в рассмотрение коэффициент усиления света по амплитуде (в максимуме усиления)  $\alpha_0$  и нормированный на 1 в том же максимуме усиления комплексный форм-фактор линии  $g(\Omega)$ :

$$g(\Omega) \equiv i k \alpha_0^{-1} \Delta n(\omega_0 + \Omega). \quad (4)$$

Здесь  $\omega \equiv \omega_0 + \Omega$ , вещественная часть комплексного форм-фактора линии (4) описывает частотную зависимость коэффициента усиления  $\alpha(\Omega) \equiv \alpha_0 \operatorname{Re} [g(\Omega)]$ , а мнимая — дисперсию вещественного показателя преломления среды вблизи спектральной линии; вещественная и мнимая часть связаны соотношениями Крамерса—Кронига [1, 2, 22].

С использованием этих обозначений комплексную передаточную функцию слоя вещества (3) можно записать в виде

$$F(z, \omega) = F^{(b)}(z, \omega) F^{(r)}(\xi, \Omega), \quad (5)$$

где

$$F^{(b)}(z, \omega) \equiv \exp(i k n_0 z) \quad (6)$$

— «фоновая» передаточная функция слоя вещества (без учёта спектральной линии усиления),

$$F^{(r)}(\xi, \Omega) \equiv \exp[\xi g(\Omega)] \quad (7)$$

— дополнительная («резонансная», связанная со спектральной линией) передаточная функция слоя вещества, а  $\xi \equiv \alpha_0 z$  — его оптическая толщина.

Изменение временной огибающей сигнала  $A^{(0)}(t) \equiv A(0, t)$  при прохождении слоя вещества можно рассматривать как последовательное действие на эту функцию двух коммутирующих операторов, которые в частотном представлении имеют вид множителей  $F^{(b)}(z, \omega) \equiv \exp(i k n_0 z)$  и  $F^{(r)}(\xi, \Omega) \equiv \exp[\xi g(\Omega)]$ .

Первый из этих операторов, очевидно, является просто оператором временного сдвига на «фоновое» время задержки сигнала  $t_d = n_0 z/c$ ; его воздействие на временную огибающую сводится к замене времени  $t$  на сдвинутое время  $t_{sh} = t - t_d$  и появлению дополнительной фазы  $\exp(i\omega_1 t_d)$ :

$$F^{(b)} A^{(0)}(t) = A^{(0)}(t - t_d) \exp(i\omega_1 t_d). \quad (8)$$

Пока речь идёт об изучении временной зависимости сигнала в фиксированной точке пространства, оператор  $F^{(b)}$  можно практически не учитывать, просто используя вместо обычного времени  $t$  сдвинутое время  $t_{sh}$  (так, например, делается в работах [13–15]).

Во временном представлении действие второго оператора  $F^{(r)}$  на временную огибающую сигнала с помощью интеграла Дюамеля [23] можно записать как

$$F^{(r)} A^{(0)}(t) = \exp(i\Omega_0 t) \int_{-\infty}^t A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) \Delta(t - t_2) dt_2, \quad (9)$$

где

$$\Delta(t) \equiv [1/(2\pi)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\xi g(\Omega) - i\Omega t] d\Omega \quad (10)$$

— функция отклика оператора  $F^{(r)}$  на дельта-функцию, т. е. на сигнал нулевой продолжительности.

Интеграл (10) удаётся вычислить аналитически в случае изолированной спектральной линии усиления с лоренцевым форм-фактором коэффициента усиления  $\alpha(\omega) = \alpha_0 \text{Re}[g(\Omega)] = \alpha_0/[1 + (\Omega\tau_1)^2]$ , которому соответствует [22] комплексный форм-фактор линии  $g(\Omega) = (1 - i\Omega\tau_1)^{-1}$ , где  $\tau_1 \equiv 2/\Delta\Omega_{1/2}$  — время когерентности спектральной линии ( $\Delta\Omega_{1/2}$  — полная ширина спектральной линии на уровне 50% от максимума усиления),  $\Omega = \omega - \omega_0$  ( $\omega_0$  — центр спектральной линии). Результат имеет вид [9]

$$\Delta(t) = \tau_1^{-1} \delta(t/\tau_1) + 2\tau_1^{-1} \xi \exp(-t/\tau_1) I_1(2\sqrt{\xi t/\tau_1}) / (2\sqrt{\xi t/\tau_1}) = \Delta^{(p)}(t) + \Delta^{(a)}(t), \quad (11)$$

где  $I_1$  — модифицированная функция Бесселя [24].

В соответствии с формулой (11) функция отклика распадается на два слагаемых — обычную дельта-функцию  $\Delta^{(p)}(t)$ , соответствующую первичному сигналу, и функцию  $\Delta^{(a)}(t)$ , отвечающую дополнительному (усиленному) сигналу, образовавшемуся в результате селективного по частоте усиления среды. Поэтому и сигнал под действием оператора  $F^{(p)}$  распадается на две части — первичный сигнал, абсолютно ничем (если не учитывать оператор задержки  $F^{(b)}(z, \omega)$ , см. выше) не отличающийся от сигнала до прохождения слоя вещества, и усиленный сигнал, изучению которого в основном и посвящена данная работа:

$$F^{(r)} A^{(0)}(t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}(t) + \exp(i\Omega_0 t) \int_{-\infty}^t A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) \Delta^{(a)}(t - t_2) dt_2. \quad (12)$$

Для достаточно короткого сигнала (с длительностью  $T \ll \tau_1$ ) формулу (12) можно рассматривать как окончательную. В этом случае медленно (в сравнении с  $A^{(0)}(t_2)$ ) изменяющуюся функцию  $\Delta^{(a)}(t - t_2)$  в (12) можно вынести из-под интеграла, что даёт

$$A(z, t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}(t - t_d) \exp(i\omega_1 t_d) + \exp(i\Omega_0 t) \exp(i\omega_0 t_d) M^{(0)} \Delta^{(a)}(t - t_d), \quad (13)$$

где

$$M^{(0)} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) dt_2 \quad (14)$$

— плотность спектра исходного сигнала на центральной частоте спектральной линии  $\omega_0$ , уже рассматривавшаяся в работе [15]. Именно эта часть спектра ответственна за возникновение усиленного сигнала и вполне естественно, что величина усиленного сигнала ей прямо пропорциональна.

Для функции отклика усиленного сигнала, кроме точной формулы (11), можно пользоваться следующими аналитическими аппроксимациями.

При  $\xi t/\tau_1 \gg 1$  имеем приближение, далее именуемое «асимптотическим»:

$$\Delta^{(a)}(t) = (2\sqrt{\pi}\tau_1)^{-1} \xi^{1/4} (t/\tau_1)^{-3/4} \exp(2\sqrt{\xi t/\tau_1} - t/\tau_1). \quad (15)$$

В частности, при любом фиксированном  $z$  и  $t \rightarrow +\infty$  функция  $\Delta^{(a)}(t) \rightarrow 0$ . Это означает, что в любой конкретной точке пространства с ходом времени сигнал рано или поздно исчезает, несмотря на усиливающие свойства среды (очевидно, сигнал просто уходит из этой точки).

При  $\xi t/\tau_1 \ll 1$  имеем приближение, именуемое далее «приближением заданного поля» (уже рассматривавшееся в работе [15]):

$$\Delta^{(a)}(t) = \tau_1^{-1} \xi \exp(-t/\tau_1). \quad (16)$$

В частности, при  $t = 0$  имеем  $\Delta^{(a)}(0) = \tau_1^{-1} \xi$ , причём эта формула справедлива при любом значении параметра  $\xi$ . Это означает, что в начальный момент времени усиленный сигнал возникает скачком<sup>2</sup>, причём величина этого скачка  $M^{(0)}\tau_1^{-1}\xi$  линейно растёт с увеличением оптической толщины слоя  $\xi$ . Положив для грубых оценок  $M^{(0)} \approx A^{(0)}T$  ( $A^{(0)}$  — характерная исходная амплитуда сигнала,  $T$  — его характерная длительность), нетрудно убедиться, что в условиях применимости приближения заданного поля  $\xi \ll \tau_1/T$  усиленный сигнал мал в сравнении с первичным и представляет собой «шлейф» с характерной длительностью  $\tau_1$ , следующий за хорошо различимым первичным сигналом.

Из формулы (16) следует, что при  $\xi \ll 1$  функция отклика имеет максимальное значение в момент возникновения этого отклика  $t = 0$ . С учётом «фоновой» задержки это даёт для момента достижения полем максимального в фиксированной точке пространства  $z$  значения  $t_{\max}(z) = n_0 z/c$  и соответствует перемещению временного максимума поля в пространстве с «нерезонансной» скоростью света в данной среде  $c/n_0$ . Далее функция отклика монотонно затухает с характерным временем  $\tau_1$ , образуя своего рода «шлейф» за сигналом.

При дополнительных условиях  $\xi \gg 1$  и фиксированном значении комбинации  $(t/\tau_1 - \xi)^2/(4\xi)$  из (15) можно получить существенно более простую и наглядную «гауссову» формулу

$$\Delta^{(a)}(t) = \left(2\sqrt{\pi\xi}\tau_1\right)^{-1} \exp[\xi - (t/\tau_1 - \xi)^2/(4\xi)]. \quad (17)$$

Далее это приближение именуется «гауссовым приближением для временной зависимости усиленного сигнала». Приближённые формулы (16) и (17) ранее уже были получены для лоренцева профиля спектральной линии [15] в рамках общего рассмотрения, не ограниченного определённым профилем спектральной линии.

<sup>2</sup> Время этого скачка порядка длительности сигнала и для достаточно коротких сигналов мало в сравнении со временем когерентности спектральной линии.

Из формулы (17) следует, что при  $\xi \gg 1$  функция отклика близка к гауссовой и достигает максимума

$$\Delta_{\max}^{(a)}(z) = \left(2 \sqrt{\pi\xi} \tau_1\right)^{-1} \exp(\xi) \tag{18}$$

при  $t/\tau_1 = \xi$ , что с учётом «фоновой» задержки даёт для момента достижения полем максимального в фиксированной точке пространства  $z$  значения

$$t_{\max}(z) = (n_0/c + \alpha_0\tau_1)z. \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что это время задержки соответствует перемещению временного максимума поля в пространстве с определённым образом [1, 2] на центральной частоте спектральной линии  $\omega_0$  групповой скоростью  $(c/n_0)(1 + \alpha_0\tau_1 c/n_0)^{-1}$ . В случае, когда безразмерный параметр  $\gamma = \alpha_0\tau_1 c/n_0$  не мал в сравнении с 1,<sup>3</sup> эта скорость может быть существенно меньше нерезонансной (фазовой) скорости света в данном веществе  $c/n_0$ , а в случае  $\gamma \rightarrow \infty$  она вообще стремится к 0. В соответствии с (17) длительность «горба» с ростом оптической толщины слоя  $\xi$  увеличивается по закону  $2\sqrt{\xi}$ .

Сопоставление гауссовой аппроксимации (17), являющейся асимптотически точной при условии большой оптической толщины слоя ( $\xi \gg 1$ ) с точным результатом (11) для предельно короткого сигнала при различных оптической толщине слоя  $\xi$  приведено на рис. 1.

Следует отметить, что гауссово приближение действительно [15] является асимптотически точным в случае неограниченного возрастания оптической толщины слоя  $\xi$ , но лишь при фиксированном отклонении точки наблюдения от максимума  $((t/\tau_1 - \xi)^2/(4\xi) = \text{const})$ . Поскольку с ростом  $\xi$  происходит всё большее отставание максимума сигнала от его фронта, это означает, что ни при какой оптической толщине слоя результаты гауссовой аппроксимации не становятся точными вблизи фронта сигнала, перемещающегося со скоростью  $c/n_0$ . В этом нет ничего удивительного: именно такое поведение асимптотик типа центральной предельной теоремы теории вероятностей (следствием которой в некотором смысле и является данная аппроксимация, см. [15]) известно давно. Поэтому данное гауссово приближение для временной зависимости поля очень удобно при изучении временной зависимости сигнала в фиксированной точке пространства, но оказывается практически неприменимым при исследовании пространственного распределения поля в данный

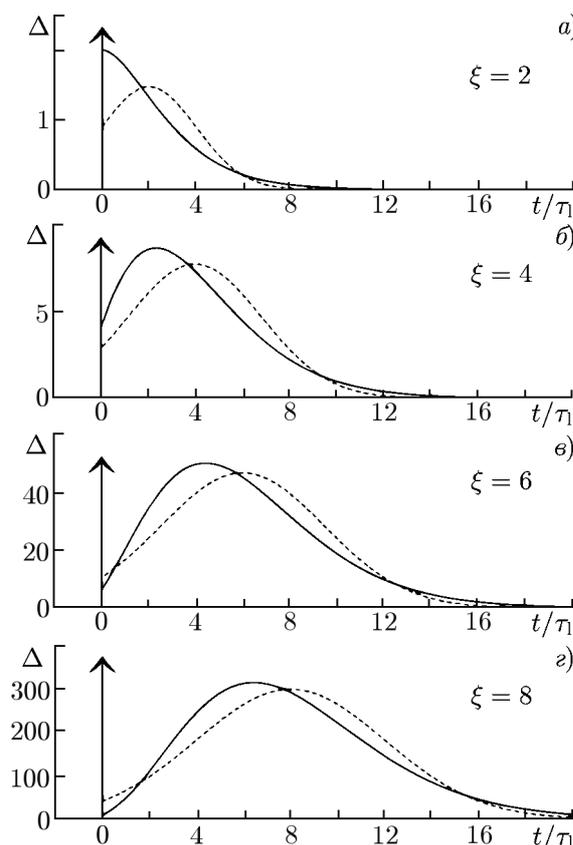


Рис. 1. Сопоставление гауссовой аппроксимации (штриховая линия) с точным результатом (сплошная линия) при оптических толщинах слоя  $\xi = 2$  (а),  $\xi = 4$  (б),  $\xi = 6$  (в) и  $\xi = 8$  (г). Стрелками обозначены дельта-функции

<sup>3</sup> Далее случай  $\gamma \gg 1$  мы будем именовать случаем сильного усиления, а случай  $\gamma \ll 1$  — случаем слабого усиления. По смыслу первый из них можно было бы называть случаем узкой спектральной линии, а второй — случаем широкой спектральной линии. Для типичных CO<sub>2</sub>-, He-Ne- и YAG-лазеров [4] параметр  $\gamma$  равен 0,88; 0,79 и 0,29 соответственно.

момент времени (см. ниже). Окончательно в гауссовом приближении для временной зависимости поля короткого ( $T \ll \tau_1$ ) сигнала в данной точке пространства имеем

$$A(z, t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}(t - t_d) \exp(i\omega_1 t_d) + \exp(i\Omega_0 t) \exp(i\omega_0 t_d) M^{(0)} \Delta_{\max}^{(a)}(z) \exp\{-[t - t_{\max}(z)]^2 / [\Delta t(z)^2]\}, \quad (20)$$

где функции  $\Delta_{\max}^{(a)}(z)$  и  $t_{\max}(z)$  определены соотношениями (18) и (19) соответственно, а характерная длительность сигнала в сечении  $z$ ,  $\Delta t(z)$ , определяется формулой

$$\Delta t(z) = 2 \sqrt{\xi}. \quad (21)$$

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СИГНАЛА

Наличие точной формулы (11) для функции отклика позволяет изучить оставленный в работе [15] без рассмотрения вопрос о пространственном распределении поля в заданный момент времени. Обычно (в прозрачной среде без поглощения) переход от временной зависимости поля в данной точке пространства к его пространственному распределению в данный момент времени тривиален и не требует дополнительного анализа. В данном случае это не так, поскольку экспоненциальное нарастание сигнала при распространении в усиливающей среде приводит к тому, что временной максимум поля в фиксированной точке пространства отнюдь не соответствует пространственному максимуму поля в фиксированный момент времени.

Для изучения пространственного распределения поля короткого сигнала приходится вернуться в точной формуле (13) к исходным переменным  $z$  и  $t$ , заменив в (17)  $t_d$  на  $n_0 z/c$  и  $\xi$  на  $\alpha_0 z$ , что даёт

$$A(z, t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}(t - n_0 z/c) \exp(i\omega_1 n_0 z/c) + \exp(i\Omega_0 t) \exp(i\omega_0 n_0 z/c) M^{(0)} \Delta^{(a)}(t - n_0 z/c). \quad (22)$$

Проанализируем полученный результат, который с точностью до фазовых множителей, не влияющих на интенсивность поля, определяется зависимостью функции  $\Delta^{(a)}(t - n_0 z/c)$  от пространственной координаты  $z$  при фиксированном значении времени  $t$ :

$$\Delta^{(a)}(t - n_0 z/c) = (2\gamma\tau_1^{-1}) (z/z_0) (t/\tau_1) \exp[-(t/\tau_1) (1 - z/z_0)] \times \\ \times I_1[2(t/\tau_1) \sqrt{\gamma(z/z_0) (1 - z/z_0)}] / [2(t/\tau_1) \sqrt{\gamma(z/z_0) (1 - z/z_0)}], \quad (23)$$

где  $\gamma = \alpha_0 \tau_1 c/n_0$ , параметр  $z_0 = ct/n_0$  имеет смысл расстояния, на которое к моменту времени  $t$  успеваает переместиться передний фронт сигнала,двигающийся с нерезонансной скоростью света  $c/n_0$ . В любой заданный момент времени  $t$  пространственная координата  $z$  изменяется от 0 (точка старта сигнала) до максимального значения  $z_0$  (фронт сигнала).

Разумеется, и приближение заданного поля (при достаточно малой оптической длине трассы  $\xi_0 = \alpha_0 z_0$  или, что то же самое, при небольшом промежутке времени между моментом старта сигнала и моментом наблюдения), и асимптотическое приближение (при большой оптической длине трассы  $\xi_0 = \alpha_0 z_0$  или, что то же самое, при достаточно большом промежутке времени между моментом старта сигнала и моментом наблюдения) по-прежнему оказываются вполне применимы (конечно, с соответствующей заменой переменных). С их использованием нетрудно показать, что на фронте ( $z_0 = ct/n_0$ ) усиленный сигнал возникает скачком, величина которого линейно

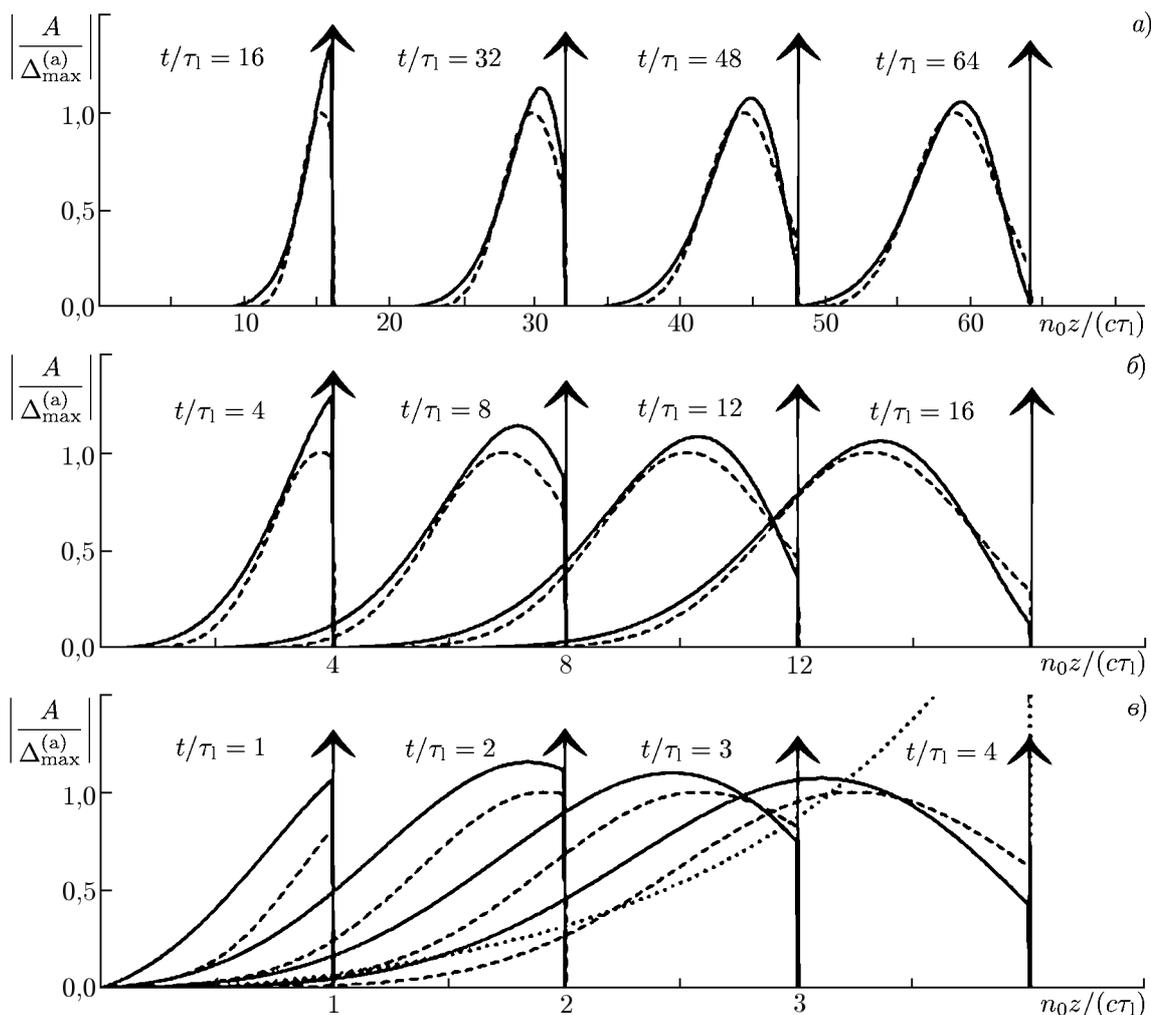


Рис. 2. Сравнение точных результатов (сплошные линии) и результатов с использованием гауссовой аппроксимации (штриховые линии) для временной эволюции пространственного распределения поля короткого сигнала при различных значениях параметра  $\gamma = 0,125$  (а, слабое усиление),  $\gamma = 0,5$  (б, промежуточное усиление) и  $\gamma = 2$  (в, сильное усиление) для разных моментов времени ( $t/\tau_1 = 16$ ; 32; 48 и 64 слева направо на панели а;  $t/\tau_1 = 4$ ; 8; 12 и 16 на панели б;  $t/\tau_1 = 1$ ; 2; 3 и 4 на панели в). Стрелками обозначены дельта-функции

возрастает с увеличением времени и пройденного расстояния и равна  $M^{(0)}\alpha_0 ct/(n_0\tau_1)$ . За фронтом усиленный сигнал непрерывно изменяется от этого значения до нуля в точке старта сигнала ( $z = 0$ ). Это изменение имеет монотонный характер при выполнении условия  $t \ll t_H$  и немонотонный характер (с прохождением максимума) при выполнении противоположного условия  $t \gg t_H$ , где  $t_H = \gamma^{-1}\tau_1(1 + \sqrt{1 + 2\gamma})$  — характерное время перехода от флагообразной к горбообразной форме пространственного распределения поля усиленного сигнала. В случае слабого усиления  $\gamma \ll 1$  это время равно  $t_H = n_0/(\alpha_0 c)$ , не зависит от ширины спектральной линии и соответствует оптической толщине слоя  $\xi_0 = 1$ . В случае сильного усиления  $\gamma \gg 1$  характерное время перехода от флагообразной к горбообразной форме гораздо больше. Оно увеличивается при уменьшении ширины спектральной линии и равно  $t_H = \sqrt{2n_0\tau_1}/(\alpha_0 c)$ . В качестве иллюстрации такого поведения сигнала можно сравнить рис. 2а и в, относящиеся к одним и тем же оптическим толщинам слоя и временам и отличающиеся только шириной спектральной линии.

При выполнении условия горбообразности усиленного сигнала  $t \gg t_d$  изменение его поля от точки фронта к точке старта имеет немонотонный характер. В этом случае с использованием асимптотического приближения (15) нетрудно получить гауссову аппроксимацию для пространственного распределения поля усиленного сигнала

$$A(z, t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}(t - t_d) \exp(i\omega_1 t_d) + \exp(i\Omega_0 t) \exp(i\omega_0 t_d) M^{(0)} \Delta_{\max}^{(a)}(t) \exp\{-[z - z_{\max}(t)]^2 / [\Delta z(t)^2]\}, \quad (24)$$

где

$$\Delta_{\max}^{(a)}(t) = \frac{\gamma^{1/2}}{(\pi t \tau_1)^{1/2}} \frac{(4\gamma + 1)^{1/4}}{(4\gamma + 1)^{1/2} - 1} \exp\{[t/(2\tau_1)][(4\gamma + 1)^{1/2} - 1]\} \quad (25)$$

— максимальное по всем точкам пространства в данный момент времени значение амплитуды поля <sup>4</sup>,

$$z_{\max}(t) = [ct/(2n_0)][1 + (4\gamma + 1)^{-1/2}] + (1/2)[1 + 2^{-1/2}(4\gamma + 1)^{-1/2}] \quad (26)$$

— координата точки пространства, в которой в данный момент времени  $t$  достигается это максимальное значение,

$$\Delta z(t) = (2c/n_0) \sqrt{t\tau_1} \gamma^{-1/4} (4 + \gamma^{-1})^{-3/4} \quad (27)$$

— полуширина пространственного распределения поля усиленного сигнала (на уровне  $\exp(-1)$  по амплитуде).

Следует подчеркнуть, что гауссово приближение для пространственного распределения поля усиленного сигнала в фиксированный момент (24) времени точно так же является асимптотически точным (при  $t_1 \rightarrow \infty$ ), как и гауссово приближение для временной зависимости поля усиленного сигнала в фиксированной точке пространства (при  $\xi = \alpha_0 z \rightarrow \infty$ ), и точно так же это обстоятельство гарантирует его высокую точность на любом фиксированном (в единицах  $\Delta z(t)$ ) расстоянии от максимума поля, но не вблизи фронта сигнала, который с ходом времени всё сильнее (в единицах  $\Delta z(t)$ ) отодвигается от этого максимума.

Тем не менее гауссово приближение для временной зависимости поля усиленного сигнала и гауссово приближение для пространственного распределения поля усиленного сигнала — это два разных приближения, не следующие друг из друга. В этом нетрудно убедиться, сравнив не совпадающие друг с другом формулы (24) и (20) и заметив, что одна из этих формул даёт гауссову функцию времени (но не координаты), а другая — гауссову функцию координаты (но не времени). Причина состоит в том, что в общем случае (при невыполнении условия  $\gamma \ll 1$ ) пространственный и временной максимумы усиленного сигнала не соответствуют друг другу и приближение, хорошо работающее вблизи пространственного максимума поля, не может быть применимо вблизи его временного максимума (см. выше) и наоборот.

В связи со сказанным выше при изучении временной эволюции поля в фиксированной точке пространства разумно пользоваться гауссовым приближением для его временной зависимости (25), а при изучении пространственного распределения поля в фиксированный момент времени — гауссовым приближением для его пространственного распределения (24).

В случае сигнала с нулевой исходной продолжительностью и единичным импульсом [25],  $A^{(0)}(t) = \tau_1^{-1} \delta(t/\tau_1)$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) dt = 1$ , общая формула (22) упрощается ( $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\Omega_0 = 0$ ,  $M^{(0)} =$

<sup>4</sup> Разумеется,  $\Delta_{\max}^{(a)}(t)$  в (25) (максимальное по всем точкам пространства значение поля в фиксированный момент времени) и  $\Delta_{\max}^{(a)}(z)$  в (18) (максимальное по всем моментам времени значение поля в фиксированной точке) не совпадают.

= 1) и в результате получим

$$A(z, t) = \{\tau_1^{-1} \delta[t/\tau_1 - n_0 z/(\tau_1 c)] + \Delta^{(a)}(t - n_0 z/c)\} \exp(i\omega_0 n_0 z/c). \quad (28)$$

На рис. 2 приведено сравнение формулы (28) с использованием точной формулы (22) и с использованием гауссовой аппроксимации для временной эволюции пространственного распределения поля (24) короткого сигнала при различных значениях параметра  $\gamma = 0,125$  (слабое усиление, рис. 2а),  $\gamma = 0,5$  (промежуточное усиление, рис. 2б) и  $\gamma = 2$  (сильное усиление, рис. 2в) для разных моментов времени. Отметим, что при выборе параметров для расчётов сделана попытка обеспечить соответствие с «временными» расчётами рис. 1 — оптическая толщина пройденного фронтом сигнала слоя вещества  $\xi_0 = \gamma t/\tau_1 = \alpha_0 z_0$  на четырёх кривых рис. 2 последовательно (слева направо) принимает значения  $\xi_0 = 2; 4; 6; 8$ . Поэтому четыре кривые на каждой из панелей рис. 2 демонстрируют пространственное распределение поля при различной оптической толщине слоя, соответствующей временной зависимости сигнала на четырёх панелях рис. 1.

Для иллюстрации разницы между двумя гауссовыми приближениями (для временной зависимости сигнала в фиксированной точке и для пространственного распределения поля в данный момент времени) на рис. 2в приведены также результаты прямой замены переменных ( $t_d$  на  $n_0 z/c$  и  $\xi$  на  $\alpha_0 z$ ) в формуле (20) (пунктирная линия). Видно, что при  $\gamma \geq 1$  гауссово приближение для временной зависимости явно неприменимо для расчёта пространственного распределения поля.

Поскольку при распространении сигнала его амплитуда быстро растёт, для изображения на одном графике пространственного распределения поля в разные моменты времени пришлось нормировать кривые на одном и том же графике по-разному. Мы приняли нормировку на теоретическое (25) значение максимума поля, т. е. максимум всех гауссовых кривых равен 1. Значения нормировочных констант получились следующие:  $\Delta_{\max}^{(a)} = 1,483; 6,329; 31,200$  и  $163,100$  слева направо на рис. 2а,  $\Delta_{\max}^{(a)} = 1,55; 4,74; 16,73$  и  $62,66$  слева направо на рис. 2б,  $\Delta_{\max}^{(a)} = 1,87; 3,61, 8,01$  и  $18,86$  слева направо на рис. 2в. Нетрудно заметить, что согласие результатов численных расчётов с гауссовой аппроксимацией для пространственного распределения поля вполне удовлетворительно (особенно при больших  $t/\tau_1$ ), что позволяет использовать эту аппроксимацию для дальнейших оценок. Также обращает на себя внимание существенно более медленный рост поля по сравнению с ожидаемым:  $\exp(2) \approx 7,4$ , и в случае роста поля по закону  $\exp(\xi)$  естественно было бы ожидать увеличения каждого очередного максимума поля примерно в 7,4 раза по сравнению с предыдущим, чего, очевидно, не наблюдается. Это замедление роста поля нарастает при увеличении параметра  $\gamma$ : если при  $\gamma = 0,125$  (рис. 2а) средний фактор роста поля между соседними моментами времени равен примерно 5, то при  $\gamma = 2$  — примерно 2.

Для анализа этой ситуации можно ввести эффективный<sup>5</sup> временной инкремент  $\beta_{\text{eff}}$  нарастания поля короткого сигнала, распространяющегося в усиливающей среде, полагая, что основным фактором в (25) является экспоненциальный, и считая, что поле нарастает в среде по закону  $\exp(\beta_{\text{eff}} t)$ . Для такого эффективного временного инкремента имеем

$$\beta_{\text{eff}} = [(4\gamma + 1)^{1/2} - 1]/(2\tau_1). \quad (29)$$

В случае слабого усиления  $\gamma \ll 1$ <sup>6</sup> имеем ожидаемое значение  $\beta_{\text{eff}} = \alpha_0 c/n_0$  [27, с. 137],

<sup>5</sup> Это эффективный инкремент, т. к. обычно под временным инкрементом понимается параметр, характеризующий временной рост поля в фиксированной точке пространства. В данном же случае нас интересует скорость нарастания поля в точке его пространственного максимума  $z_{\max}(t)$ , которая сама перемещается с ходом времени.

<sup>6</sup> Строго говоря, с учётом приведённой формулы (29) условие слабости усиления имеет вид не  $\gamma \ll 1$ , а  $\gamma \ll 1/4$ . Это уточнение не принципиально, но, тем не менее, несколько смещает представление о сильном и слабом усилении: так, например, упомянутые выше три классические лазерные системы, скорее, относятся к системам с сильным усилением, чем к системам со слабым усилением, за исключением лазера на YAG:Nd<sup>3+</sup>, который является системой с промежуточным усилением.

а в случае сильного  $\gamma \gg 1$  — существенно меньшее значение

$$\beta_{\text{eff}} = \sqrt{\alpha_0 c / (n_0 \tau_1)}. \quad (30)$$

Для упомянутых выше трёх типичных лазерных систем ( $\text{CO}_2$ , He-Ne и YAG) эффективное значение временного инкремента (29) составляет 64 %, 66 % и 81 % от ожидаемого [21, с. 137] значения  $\beta_{\text{eff}} = \alpha_0 c / n_0$  соответственно.

Отметим, что полученная формула (29) совпадает с формулой, приведённой в работе [26] для временного инкремента нарастания поля стоячей волны в среде с лоренцевым контуром спектральной линии усиления [26, формулы (12) и (18)]. Поэтому естественно предположить, что причиной такого ограничения скорости роста поля в усиливающей среде в соответствии с [26] является то обстоятельство, что достаточно быстрое увеличение амплитуды квазимонохроматической волны нарушает её монохроматичность и рост волны с временным инкрементом, превышающим ширину спектральной линии усиления, приведёт к тому, что лишь малая часть её спектра попадёт в полосу усиления и скорость её роста окажется существенно ниже «заявленной».

Интересно, что в случае сильного усиления  $\gamma \gg 1$  эффективный временной инкремент зависит от коэффициента усиления и времени когерентности спектральной линии только через комбинацию  $\alpha_0 / \tau_1$  и потому определяется непосредственно достигнутым уровнем инверсии среды [26, 28]:

$$\beta_{\text{eff max}} = \sqrt{(\omega_0 |d_0^{(e)}|^2 \Delta N) / (2\varepsilon_0 n_0 \hbar)}, \quad (31)$$

где  $d_0^{(e)}$  — матричный элемент перехода, ответственного за данную спектральную линию [28, формулы (2.2.3), (2.3.6)]<sup>7</sup>,  $\Delta N$  — достигнутый уровень инверсии,  $\hbar$  — постоянная Планка. Зависимость отдельно от ширины спектральной линии и от максимума усиления в её центре отсутствует.

Скорость пространственного перемещения максимума поля в соответствии с (26) равна

$$v_{\text{max}} = [c / (2n_0)] [1 + (4\gamma + 1)^{-1/2}]. \quad (32)$$

Эта скорость оказывается всегда выше групповой скорости  $(c/n_0)(1+\gamma)^{-1}$ . Очевидно, причина этого состоит в том, что передняя часть светового импульса проходит больший путь в усиливающей среде, чем задняя, и потому усиливается сильнее, что и приводит к перемещению пространственного максимума интенсивности поля в пределах импульса от его задней части к передней в процессе его распространения в усиливающей среде. Нетрудно заметить, что этот линейный механизм формирования повышенной скорости перемещения максимума интенсивности светового импульса напоминает описанный в работе [3] нелинейный механизм формирования сверхсветовых скоростей перемещения максимума интенсивности мощного светового импульса в среде с насыщением усиления за счёт преимущественного усиления передней части импульса в ущерб его задней части, которая распространяется в среде с пониженным уровнем инверсии и меньшим коэффициентом усиления.

Скорость пространственного перемещения максимума поля  $v_{\text{max}}$  изменяется от нерезонансной скорости света в данном веществе  $c/n_0$  в случае слабого усиления  $\gamma \ll 1$  до половины этой скорости  $c/(2n_0)$  в случае сильного усиления  $\gamma \gg 1$ , т. е. ни при каких условиях скорость не может (в отличие, например, от групповой скорости) стать сколь угодно мала.

Для упомянутых выше трёх типичных лазерных систем ( $\text{CO}_2$ , He-Ne и YAG) скорость пространственного перемещения максимума поля составляет соответственно 74 %, 75 % и 84 % от

<sup>7</sup> Формула (31), в отличие от использованной при её выводе формулы [28, формула (2.3.20)], записана не в системе СГС, а в системе СИ.

фазовой скорости (как в центре спектральной линии, так и вдали от неё <sup>8</sup>) и 138 %, 133 % и 108 % от групповой скорости (в центре спектральной линии).

Если вспомнить, что максимальное в пространстве поле усиленного сигнала не только нарастает во времени в соответствии с приведённым выше эффективным временным инкрементом, но и перемещается в пространстве, можно ввести и эффективный пространственный инкремент  $\alpha_{\text{eff}}$  нарастания поля короткого сигнала, распространяющегося в усиливающей среде. Полагая  $\exp(\beta_{\text{eff}} \Delta t) = \exp(\alpha_{\text{eff}} \Delta z_{\text{max}})$ , имеем

$$\alpha_{\text{eff}} = \beta_{\text{eff}} / v_{\text{max}} = \frac{4\alpha_0(4\gamma + 1)^{1/2}}{[(4\gamma + 1)^{1/2} + 1]^2}. \quad (33)$$

В случае слабого усиления  $\gamma \ll 1$  имеем ожидаемый результат  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_0$ , а в случае сильного усиления  $\gamma \gg 1$  — меньшее значение

$$\alpha_{\text{eff}} = 2\alpha_0\gamma^{-1/2}. \quad (34)$$

В предельном случае сильного усиления  $\gamma \gg 1$  эффективный пространственный инкремент, как и эффективный временной инкремент (см. (31)), зависит от коэффициента усиления и времени когерентности спектральной линии только через комбинацию  $\alpha_0/\tau_1$  и потому определяется лишь достигнутым уровнем инверсии среды [26, 27]:

$$\alpha_{\text{eff max}} = 2 \sqrt{\left( n_0 \omega_0 |d_0^{(e)}|^2 \Delta N \right) / (2\varepsilon_0 c^2 \hbar)}. \quad (35)$$

Для упомянутых выше трёх типичных лазерных систем ( $\text{CO}_2$ , He-Ne и YAG) эффективные значения пространственного инкремента составляют 87 %, 88 % и 96 % от ожидаемого значения  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_0$  соответственно.

Видно, что для типичных лазерных систем отличие практически проявляющихся для коротких сигналов эффективных инкрементов от истинных (для строго монохроматической волны) заметно, но при этом не слишком велико. Тем не менее, следует учитывать, что прогресс лазерной техники может привести к появлению систем с большими коэффициентами усиления или более узкими спектральными линиями, для которых соответствующее отличие может быть существенно.

#### 4. СЛУЧАЙ СИГНАЛА С КОНЕЧНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

В предыдущих разделах мы изучали случай предельно коротких исходных сигналов, длительности которых много меньше времени когерентности спектральной линии усиления. Для того, чтобы рассмотреть эволюцию сигналов с конечными продолжительностями, длительности которых в стартовой точке порядка времени когерентности спектральной линии, следует учесть, что не только в случае предельно короткого сигнала, но и в общем случае сигнал распадается на «первичный» и «усиленный» (см. (16)). При этом первичный сигнал практически ничем (кроме фазы и соответствующего времени задержки) не отличается от исходного, а усиленный, в первую очередь, контролируется спектральной плотностью исходного сигнала на центральной частоте

<sup>8</sup> Фазовая скорость определяется не дисперсией показателя преломления, а его величиной; поскольку в любом случае  $|\Delta n| \ll n_0$  (см. выше), фазовая скорость в центре спектральной линии и на её периферии практически одна и та же.

спектральной линии усиления. Следует также учесть, что для сигнала с конечной продолжительностью в любой момент времени имеет значение только текущая спектральная плотность сигнала, изменяющаяся от нуля (до появления сигнала) до стационарного значения  $M^{(0)} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t_2) \times \exp(-i\Omega_0 t_2) dt_2$  (после его окончания).

В результате мы приходим к «приближению текущей спектральной плотности сигнала», которое сводится к использованию соотношений (17) с заменой спектральной плотности сигнала и времени его появления на соответствующие текущие значения:

$$A(z, t) = A^{(p)} + A^{(a)} = A^{(0)}[t - t_0(t) - t_d] \exp(i\omega_1 t_d) + \exp\{i\Omega_0[t - t_0(t)]\} \exp(i\omega_0 t_d) M[t - t_0(t) - t_d] \Delta^{(a)}[t - t_0(t) - t_d]. \quad (36)$$

Здесь

$$M(t) \equiv \int_{-\infty}^t A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) dt_2 \quad (37)$$

— реализованная к моменту времени  $t$  плотность спектра исходного сигнала на центральной частоте спектральной линии  $\omega_0$ , ответственная за возникновение усиленного сигнала в данный момент времени,

$$t_0(t) \equiv \frac{\int_{-\infty}^t t_2 A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) dt_2}{\int_{-\infty}^t A^{(0)}(t_2) \exp(-i\Omega_0 t_2) dt_2}, \quad (38)$$

— реализованная к данному моменту времени «средняя точка» исходного сигнала на центральной частоте спектральной линии  $\omega_0$ , которую можно рассматривать как текущий момент возникновения усиленного сигнала. При  $t \rightarrow +\infty$  имеем  $M(t) \rightarrow M^{(0)}$ , а текущая средняя точка сигнала становится просто его средней точкой, которую ранее мы считали нулём, полагая, что исходный сигнал возникает в нулевой момент времени. В случае предельно короткого сигнала с длительностью  $T \ll \tau_1$ ,  $\Omega_0 T \ll 1$ , приближение (36) просто переходит в приближение (15) как в частный случай. По существу приближение (36) можно рассматривать как попытку учесть интерференцию первичного и усиленного сигнала в тех случаях, когда они заметно накладываются друг на друга, т. к. за пределами первичного сигнала (36) и (17) совпадают.

На рис. 3 и 4 приведены результаты расчётов временной зависимости поля и его пространственного распределения при различной оптической толщине слоя вещества для импульса со стартовой временной зависимостью

$$A^{(0)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \exp(-t/\tau_1), & t \geq 0. \end{cases} \quad (39)$$

Именно такая временная зависимость сигнала соответствует лоренцеву контуру линии спектра спонтанной эмиссии, который характерен для многих лазеров с однородным уширением лазерного перехода (например, для лазера на кристалле граната с неодимом (YAG: Nd<sup>3+</sup>) [27, с. 159]. Поэтому можно считать, что в данном случае мы пытаемся проследить за эволюцией пространственно-временного распределения поля «отдельного фотона»<sup>9</sup> спонтанной эмиссии в процессе его распространения в усиливающей среде.

Для сигнала (39) интегралы (37) и (38) берутся аналитически, в результате имеем

$$M(t) = \tau_1^{-1} [1 - \exp(-t/\tau_1)]; \quad (40)$$

<sup>9</sup> Не следует понимать этот «фотон» буквально. Просто зависимость (39) — это единственная зависимость, обеспечивающая лоренцев контур спектральной линии излучения оптически тонкого слоя среды.

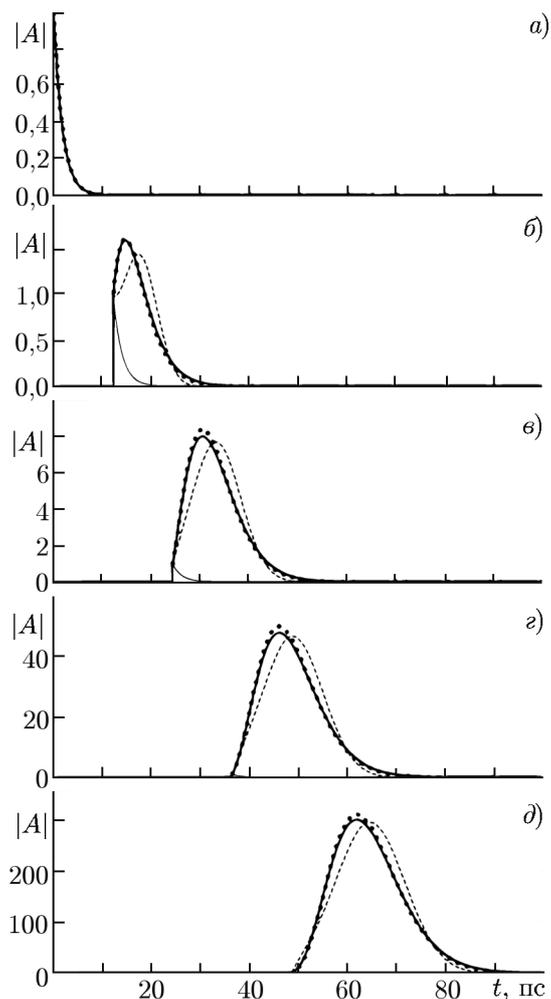


Рис. 3. Результаты расчётов временной зависимости сигнала спонтанной люминесценции при различной длине трассы  $z = 0$  (а), 2 мм (б), 4 мм (в), 6 мм (г), 8 мм (д) для лазера на иттрий-алюминиевом гранате ( $\lambda = 1,064$  мкм;  $n_0 = 1,82$ ;  $2\alpha_0 = 20$  см $^{-1}$ ,  $\Delta\nu = 1,8 \cdot 10^{11}$  Гц). Тонкими сплошными линиями показано первичное поле сигнала, толстыми сплошными линиями — результаты численных расчётов, точками — аналитические результаты в приближении текущей спектральной плотности сигнала, штриховыми линиями — аналитические результаты в гауссовом приближении для временной зависимости поля в данной точке пространства

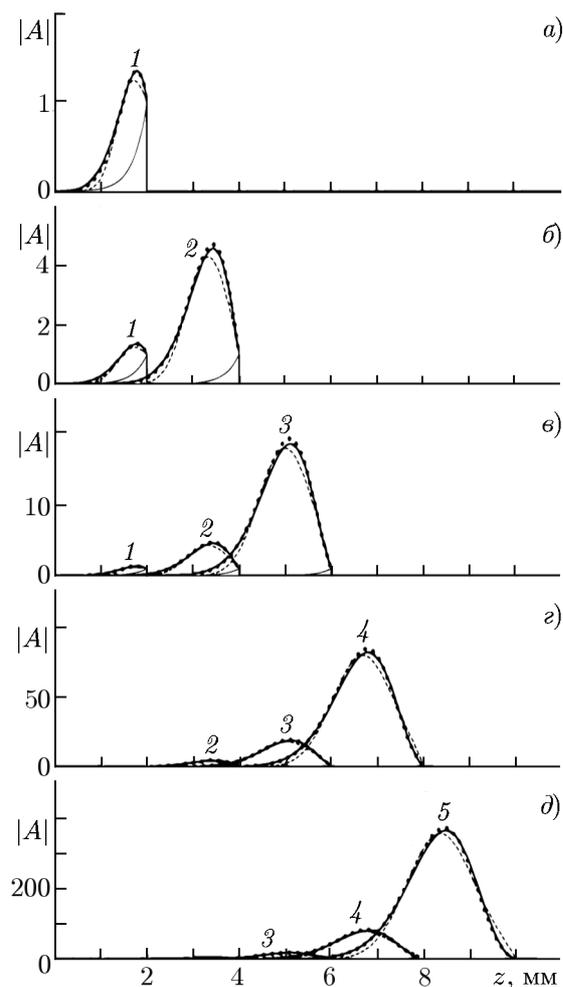


Рис. 4. Результаты расчётов эволюции пространственного распределения поля сигнала спонтанной люминесценции для лазера на иттрий-алюминиевом гранате ( $\lambda = 1,064$  мкм;  $n_0 = 1,82$ ;  $2\alpha_0 = 20$  см $^{-1}$ ;  $\Delta\nu = 1,8 \cdot 10^{11}$  Гц). Кривые 1 соответствуют пространственному распределению поля в момент времени  $t = 12,1$  пс (перемещению фронта сигнала на расстояние  $z = 2$  мм); кривые 2 —  $t = 24,3$  пс ( $z = 4$  мм); кривые 3 —  $t = 36,4$  пс ( $z = 6$  мм); кривые 4 —  $t = 48,5$  пс ( $z = 8$  мм), кривые 5 —  $t = 60,7$  пс ( $z = 10$  мм). Тонкими сплошными линиями показано первичное поле сигнала, толстыми сплошными линиями — результаты численных расчётов, точками — аналитические результаты в приближении текущей спектральной плотности сигнала, штриховыми линиями — аналитические результаты в гауссовом приближении для пространственного распределения поля в данный момент времени

$$t_0(t) = \tau_1 - t / [\exp(t/\tau_1) - 1]. \quad (41)$$

На рис. 3 и 4 показаны результаты расчётов при параметрах, близких к типичным для лазера на YAG:Nd<sup>3+</sup>: длина волны лазерного перехода  $\lambda = 1,064$  мкм, показатель преломления  $n_0 = 1,82$ , коэффициент усиления по интенсивности <sup>10</sup>  $2\alpha_0 = 20 \text{ см}^{-1}$ , ширина спектральной линии  $\Delta\nu = 1,8 \cdot 10^{11}$  Гц, что соответствует времени когерентности  $\tau_1 = 1,77 \cdot 10^{-12}$  с. Стартовая интенсивность сигнала условно принята за 1; если речь идёт об «единичном фотоне» спонтанной эмиссии, то стартовая энергия сигнала (39) равна  $E = h\nu = 1,17 \text{ эВ} = 1,88 \cdot 10^{-19}$  Дж.

На рис. 3 и 4 тонкими сплошными линиями показано первичное поле сигнала, толстыми сплошными линиями — результаты численных расчётов, точками — аналитические результаты в приближении текущей спектральной плотности сигнала ((36) с учётом (40),(41)). Штриховыми линиями на рис. 3 показаны аналитические результаты в гауссовом приближении для временной зависимости поля в данной точке пространства (формула (20) с учётом (40) и (41)), а на рис. 4 — в гауссовом приближении для пространственного распределения поля в данный момент времени <sup>11</sup> (формула (24) с учётом (40) и (41)).

На рис. 3 изображена временная зависимость поля при различной длине пройденной трассы  $z$  для  $z = 0; 2; 4; 6; 8$  мм (панели *a-d* соответственно). Оптическая толщина пройденного слоя  $\xi$  при этом равна  $0; 2; 4; 6; 8$  соответственно.

По горизонтальной оси отложено время (в отличие от рис. 1 с учётом времени запаздывания фронта сигнала, которое при  $z = 0; 2; 4; 6; 8$  мм составляет  $0; 12,1; 24,3; 36,4$  и  $48,5$  пс соответственно), по вертикальной — амплитуда сигнала (единица измерения — стартовая амплитуда сигнала в сечении  $z = 0$ ). Масштаб по вертикальной оси при переходе к каждой следующей панели увеличивается (в среднем в 5 раз).

На рис. 4 изображено пространственное распределение поля в разные моменты времени  $t = 12,1; 24,3; 36,4; 48,5$  и  $60,7$  пс (кривые 1–5 соответственно), что отвечает перемещению фронта сигнала на расстояния  $z = 2; 4; 6; 8$  и  $10$  мм и оптическим толщинам пройденного фронтом сигнала слоя  $\xi = 2; 4; 6; 8$  и  $10$  соответственно.

По горизонтальной оси отложена пространственная координата  $z$  (в отличие от рис. 2 с учётом времени запаздывания фронта сигнала), по вертикальной — амплитуда сигнала (единица измерения — стартовая амплитуда сигнала в сечении  $z = 0$ ). Масштаб по вертикальной оси при переходе к каждой следующей панели увеличивается (в среднем в 5 раз).

Видно, что результаты приближения текущей спектральной плотности сигнала практически совпадают с результатами численных расчётов, результаты гауссова приближения для временной зависимости поля в данной точке пространства и результаты гауссова приближения для пространственного распределения поля в данный момент времени могут использоваться для достаточно точных оценок временной зависимости поля и его пространственного распределения соответственно начиная с оптической толщины слоя  $\xi = 2$ . Это оправдывает применение простых гауссовых оценок для качественных характеристик сигналов с произвольной исходной временной зависимостью.

Следует отметить, что как временная, так и пространственная нормализация поля «бывших фотонов спонтанной люминесценции», после которой пространственное и временное распределение их полей совершенно не похоже на исходное лоренцево поле (39), происходит очень быстро — за время в несколько десятков пикосекунд или, что то же самое, на расстояниях в несколько

<sup>10</sup> В данной работе введены инкременты «по амплитуде»; часто используемые инкременты «по интенсивности» в два раза больше.

<sup>11</sup> Это приближение не следует путать с альтернативным по отношению к нему гауссовым приближением для временной зависимости поля в данной точке пространства.

миллиметров, когда энергия одного «бывшего фотона» оказывается порядка  $10^{-13}$  Дж и всё ещё является малой. Разумеется, при дальнейшем усилении поля уже необходимо учитывать различные нелинейные эффекты, т. е. влияние «бывших фотонов спонтанного излучения» друг на друга (в первую очередь насыщение усиления) и нерезонансные потери излучения<sup>12</sup>. Однако это обстоятельство не влияет на то, что за источники энергии конкурируют уже не лоренцевы, а гауссовы импульсы света, и потому итоговое лазерное излучение является суммой этих гауссовых импульсов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным выводом проведённого рассмотрения является следующее. При распространении короткого светового импульса в селективно усиливающей среде при достаточной протяжённости трассы<sup>13</sup> происходит нормализация (т. е. переход к гауссовой зависимости) не только временной зависимости поля импульса в фиксированной точке пространства (что отмечалось и ранее, см. [15]), но и пространственного распределения поля в фиксированный момент времени. При этом пространственная нормализация сигнала не является следствием его временной нормализации. Как длительность сигнала во времени, так и его размеры в пространстве с ростом протяжённости трассы неограниченно (пропорционально квадратному корню из длины трассы) возрастают.

При этом все параметры формирующегося в среде светового импульса (амплитуда, длительность, пространственные размеры) зависят только от свойств среды и протяжённости трассы и практически не зависят от свойств исходного сигнала (за исключением линейной зависимости амплитуды усиленного сигнала от плотности спектра исходного сигнала на центральной частоте спектральной линии). Временная зависимость сигнала в фиксированной точке пространства может быть найдена с помощью простой формулы (20), а пространственное распределение его поля в фиксированный момент времени — с помощью простой формулы (24).

Характер распространения светового импульса существенно зависит от величины параметра  $\gamma = \alpha_0 \tau_1 c / n_0$ , где  $\alpha_0$  — коэффициент усиления в центре спектральной линии,  $\tau_1$  — время когерентности линии,  $c/n_0$  — фазовая скорость света вдали от спектральной линии. В случае  $\gamma \ll 1$  скорость перемещения в пространстве временного максимума поля и скорость перемещения в пространстве пространственного максимума поля совпадают друг с другом и с фазовой скоростью света в веществе  $c/n_0$ , которая в этом случае равна групповой скорости света на центральной частоте спектральной линии. Эффективные пространственный и временной инкременты роста поля имеют ожидаемые значения  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_0$  и  $\beta_{\text{eff}} = \alpha_0 c / n_0$  соответственно.

В противоположном предельном случае  $\gamma \gg 1$  (этот случай, в сущности, и называется «медленным светом») скорость перемещения в пространстве временного максимума поля совпадает с групповой скоростью света на центральной частоте спектральной линии и вместе с ней при неограниченном росте параметра  $\gamma$  стремится к нулю, но скорость перемещения в пространстве пространственного максимума поля сохраняет конечное значение и стремится к половине фазо-

<sup>12</sup> В наших расчётах не учитываются нерезонансные (слабо зависящие от частоты) потери излучения, поэтому реально энергия «бывших фотонов спонтанного излучения», очевидно, меньше указанной. Тем не менее, эти потери никак не влияют на временные зависимости или пространственные распределения полей данных сигналов.

<sup>13</sup> При использовании приведённых выше типичных параметров характерная длина нормализации для лазера на YAG составляет около 2 мм, для лазера на CO<sub>2</sub> — 4 м, для лазера на He-Ne — 90 см. Если длина лазерного резонатора меньше длины нормализации, то нормализация сигнала происходит после нескольких отражений от зеркал резонатора, но она имеет место в любом случае. По существу, и для временной, и для пространственной нормализации сигнала вполне достаточно увеличения его интенсивности на два порядка; это условие обычно выполняется для любого успешно работающего лазера.

вой скорости света в веществе  $c/(2n_0)$ . Значения эффективных пространственного и временного инкрементов поля  $\alpha_{\text{eff}} = 2\sqrt{\alpha_0 n_0 / (c\tau_1)}$  и  $\beta_{\text{eff}} = \sqrt{\alpha_0 c / (n_0 \tau_1)}$  в этом случае существенно ниже ожидаемых значений  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_0$  и  $\beta_{\text{eff}} = \alpha_0 c / n_0$ .

Таким образом оказывается, что широко распространённый [9–12]) термин «медленный свет» не следует понимать чересчур буквально. Действительно, в случае  $\gamma \gg 1$  групповая скорость светового импульса (а следовательно, и скорость перемещения в пространстве временного максимума поля) может быть сколь угодно мала (в литературе [9] сообщается о скоростях вплоть до  $c/165$ ), но в тех же самых условиях скорость перемещения в пространстве пространственного максимума поля, как показано выше, не может быть меньше половины фазовой скорости света в данном веществе, т. е. не является малой величиной.

Автор обязан также отметить, что данная работа имеет методический характер, поскольку в ней демонстрируются естественные ограничения при использовании модели спектральной линии усиления с одиночным лоренцевым контуром, и что в аппроксимации на бесконечности полученные результаты не описывают какие-либо реально существующие эффекты, а указывают только на невозможность использования для данного случая исходной модели — одиночной лоренцевой линии (даже в линейном приближении).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М. : Наука, 1982. 620 с.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М. : Наука, 1979. 384 с.
3. Вайнштейн Л. А. // Успехи физ. наук. 1976. Т. 118, № 2. С. 339–367.  
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0118.197602h.0339>
4. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский В. В. // Успехи физ. наук. 1989. Т. 159, № 2. С. 193–260. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0159.198910a.0193>
5. MacKe B., Ségard B. // Phys. Rev. A. 2012. V. 86, No. 1. Art. no. 013837.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.013837>
6. MacKe B., Ségard B. // Phys. Rev. A. 2015. V. 91, No. 5. Art. no. 053814.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053814>
7. Золотовский И. О., Минвалиев Р. Н., Семенцов Д. И. // Успехи физ. наук. 2013. Т. 183, № 12. С. 1353–1365. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201312e.1353>
8. Малыкин Г. Б., Романец Е. А. // Оптика и спектроскопия. 2012. Т. 112, № 6. С. 993–1008.
9. MacKe B., Ségard B. // Phys. Rev. A. 2006. V. 73, No. 4. Art. no. 043802.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.043802>
10. Steinberg A. M., Chiao R. Y. // Phys. Rev. A. 1994. V. 49, No. 3. P. 2071–2075.  
<https://doi.org/10.1103/physreva.49.2071>
11. Акульшин А. М., Чиммино А., Опат Дж. И. // Квантовая электроника. 2002. Т. 32, № 7. С. 567–569.
12. Akulshin A. M., McLean R. J. // J. Opt. 2010. V. 12, No. 10. Art. no. 104001.  
<https://doi.org/10.1088/2040-8978/12/10/104001>
13. Бухман Н. С. // Квантовая электроника. 2001. Т. 31, № 9. С. 774–780.
14. Бухман Н. С. // Квантовая электроника. 2004. Т. 34, № 2. С. 120–124.
15. Бухман Н. С. // Квантовая электроника. 2004. Т. 34, № 4. С. 299–306.
16. Stenne M. D., Neifeld M. A. // Opt. Express. 2008. V. 16, No. 2. P. 651–662.  
<https://doi.org/10.1364/OE.16.000651>
17. Camacho R. M., Broadbent C. J., Ali-Khan I., Howell J. C. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98, No. 4. Art. no. 043902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.043902>

18. Liu Y., Ren L., Wang S. // *Guangxue Xuebao/Acta Optica Sinica*. 2008. V. 28, No. 11. P. 2077–2082.
19. Zhu Z., Gauthier D. J. // *Opt. Express*. 2006. V. 14, No. 16. P. 7238–7245.  
<https://doi.org/10.1364/OE.14.007238>
20. Wang S., Ren L., Liu Y., Tomita Y. // *Opt. Express*. 2008. V. 16, No. 11. P. 8067–8076.  
<https://doi.org/10.1364/OE.16.008067>
21. Ren L., Tomita Y. // *J. Opt. Soc. Amer. B: Opt. Phys.* 2008. V. 25, No. 5. P. 741–746.  
<https://doi.org/10.1364/JOSAB.25.000741>
22. Бухман Н. С., Куликова А. В. // *Радиотехника и электроника*. 2015. Т. 60, № 5. С. 535–539.  
<https://doi.org/10.7868/S0033849415030080>
23. Васильев Д. В., Витоль М. Р., Горшенков Ю. Н. и др. *Радиотехнические цепи и сигналы*. М. : Радио и связь, 1982. 528 с.
24. *Справочник по специальным функциям* / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М. : Наука, 1979. 832 с.
25. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. *Введение в теорию колебаний и волн*. М. : Наука, 1986. 432 с.
26. Бухман Н. С., Бухман С. В. // *Журн. техн. физ.* 2003. Т. 73, № 11. С. 95–101.
27. Ярив А. *Введение в оптическую электронику*. М. : Высшая школа, 1983. 398 с.
28. Клышко Д. Н. *Физические основы квантовой электроники*. М. : Наука, 1986. 296 с.

Поступила в редакцию 10 июня 2020 г.; принята в печать 26 ноября 2020 г.

## ON THE PROPAGATION OF A SHORT LIGHT PULSE IN A MEDIUM WITH A LORENTZ CONTOUR OF THE SPECTRAL GAIN LINE

*N. S. Bukhman*

We consider an one-dimensional problem of propagation of a short light pulse in a medium with the Lorentz contour of the spectral gain line. Simple approximate formulas for the spatial distribution of the field at any time are obtained. It is shown that not only normalization of the time dependence of the field at a fixed spatial point but also normalization of the spatial distribution of the field at a fixed time occur with increasing length of the path. It is also shown that the velocity of motion of the spatial maximum of the field is higher than the group velocity and, in any case, as distinct from the group velocity, cannot be smaller than a half of the phase velocity of light in this material. Simple expressions for the spatial and temporal increments of the field growth in a gain medium are obtained.