2020

DOI: 10.52452/00213462\_2020\_63\_12\_1009

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ВЕЙБЕЛЕВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

М. А. Гарасёв\*, Е. В. Деришев

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

С помощью нового подхода к численному моделированию развития вейбелевской неустойчивости в анизотропной плазме проведён детальный анализ возникающих нелинейных эффектов на разных этапах её развития. Эти эффекты наиболее важны на стадии насыщения, приводя к появлению крупномасштабных слабозатухающих магнитных полей. В то же время выяснилось, что нелинейные эффекты для вейбелевской неустойчивости всегда малы в том смысле, что нелинейное взаимодействие отдельных мод между собой не может непосредственно изменить динамику магнитного поля на стадии роста и насыщения, но оказывается принципиально важным для оценки скорости затухания поля. Возникающая вейбелевская турбулентность при этом всегда слаба, а пространственный масштаб магнитных структур всегда меньше, чем гирорадиус типичных тепловых частиц. Таким образом, движение последних определяется в основном глобальными статистическими свойствами магнитного поля, а не локальной геометрией отдельных филаментов. Полученные результаты представляют интерес для интерпретации ряда явлений в ударных волнах в неравновесной космической плазме, а также для анализа экспериментов с фемтосекундной лазерной плазмой.

#### ВВЕДЕНИЕ

Вейбелевская неустойчивость ([1], см. также современный обзор [2]) является универсальным механизмом генерации магнитных полей в плазме с анизотропным распределением частиц. Она привлекается для объяснения различных явлений, связанных с возникновением магнитного поля в космической и лазерной плазме, таких как излучение от бесстолкновительных ударных волн в источниках гамма-всплесков [3–6] и возникновение магнитных филаментов при экспериментах с лазерной абляцией плазмы [7, 8].

Какой-либо законченной аналитической теории вейбелевской неустойчивости, применимой за пределами стадии экспоненциального роста, не существует. Большинство современных исследований поздних стадий развития вейбелевской турбулентности опирается на результаты численного моделирования [9, 10], бо́льшая часть которых относится к генерации магнитного поля в сильноанизотропной плазме. Принято считать, что рост магнитного поля останавливается, когда значительная часть частиц плазмы оказывается захваченной в нём [11–13]. Предполагается также [14], что затухание магнитного поля можно описать как иерархический процесс слияния токов, сформировавшихся на стадии насыщения, что приводит к увеличению пространственного масштаба и уменьшению индукции магнитного поля при сохранении сильной нелинейности. Описанный характер роста, насыщения и затухания магнитного поля представляет собой более-менее общепринятую общую картину развития вейбелевской неустойчивости.

В данной статье при помощи численного моделирования методом частиц в ячейках анализируется нелинейная динамика вейбелевской неустойчивости на разных стадиях её развития. Она продолжает наше исследование [15], в котором было продемонстрировано, что к моменту насыщения неустойчивости нелинейные эффекты незначительны в случае большой начальной анизотропии, исчезающе малы по величине в случае маленькой начальной анизотропии и, таким образом, не являются причиной прекращения роста магнитного поля. Отметим здесь, что под

<sup>\*</sup> garasev@appl.sci-nnov.ru

словами «нелинейные эффекты» в данной статье мы подразумеваем эффекты, возникающие при взаимодействии отдельных мод магнитного поля между собой, т.е. при воздействии магнитного поля одной моды на токи, поддерживающие магнитное поле другой моды. Эффекты изменения инкрементов вейбелевских мод, возникающие из-за изменения функции распределения под влиянием статистически усреднённого сгенерированного поля, мы будем называть квазилинейными, чтобы отделить их от ранее упомянутых нелинейных.

Особенность представленной работы заключается в детальном анализе влияния нелинейных эффектов на формирование как мелкомасштабного магнитного поля, так и крупномасштабного. Для такого анализа мы применили некоторые нестандартные подходы к численному моделированию, в частности использовались специальные начальные условия, подобранные для детального исследования тонких нелинейных эффектов. Помимо численных расчётов в обычной постановке задачи, когда вейбелевская неустойчивость развивается с нулевого магнитного поля (фактически с численных шумов), мы использовали специально подобранные распределения начальных возмущений, которые позволили исследовать нелинейное четырёхволновое взаимодействие вейбелевских мод наиболее детальным образом.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 1 описана численная схема расчётов и используемые безразмерные величины. Второй раздел посвящён общему рассмотрению динамики вейбелевской неустойчивости. В разделе 3 обсуждаются результаты моделирования четырёхволнового взаимодействия вейбелевских мод. В заключении кратко представлены главные результаты исследования.

### 1. СХЕМА РАСЧЁТОВ

Численные расчёты проводились с помощью кода ЕРОСН [16]. В нём используется метод Ли для решения уравнений Максвелла [17] и метод Хигуэры—Кери для описания движения частиц [18]. Все расчёты проводились в двумерной геометрии (2D3V)<sup>1</sup> в плоскости *xy* с использованием периодических граничных условий. Область расчёта представляла собой квадрат с размером 1 200 × 1 200 ячеек. Размер каждой ячейки приблизительно соответствовал дебаевскому масштабу плазмы. Сетка такого размера позволяет достичь разрешения, необходимого для исследования обсуждаемых в данной статье явлений, при этом расчёт остаётся практически осуществимым на современном кластере. Шаг по времени связан с размером одной ячейки в соответствии с критерием Куранта—Фредерихса—Леви (за один шаг по времени максимальное допустимое смещение одной квазичастицы не должно превышать размера одной ячейки).

В начале расчёта имеем однородную электрон-позитронную плазму с бимак<br/>свелловской функцией распределения частиц по импульсам<br/>  $^2$ 

$$f_{\rm e^-,e^+}(\mathbf{p}) = \frac{N}{\sqrt{(2\pi m_{\rm e})^3 T_{\perp}^2 T_{\parallel}}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_{\rm e} T_{\parallel}} - \frac{p_y^2}{2m_{\rm e} T_{\perp}} - \frac{p_z^2}{2m_{\rm e} T_{\perp}}\right),$$

где  $N = N_{e^-} = N_{e^+}$  — концентрация электронов и позитронов,  $m_e$  — масса электрона,  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  — поперечная и продольная температуры (во всех расчётах в данной статье принимаем  $T_{\parallel} > T_{\perp}$ ,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> При этом и электромагнитные поля, и скорости частиц имеют все три компоненты, которые, однако, зависят только от двух пространственных координат.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Помимо бимаксвелловского распределения в ряде тестовых расчётов (не представленных в статье) использовались другие распределения, которые можно ожидать в космической и лазерной плазме, например функции распределения со степенны́ми хвостами или комбинация анизотропной и изотропной компонент. Качественно результаты оказываются универсальными. В то же время моделирование вейбелевской неустойчивости в плазме с бимаксвелловским распределением является наименее требовательным к вычислительным ресурсам.

 $T_{\parallel} = 100 \,\mathrm{kyB}$ ),  $p_x, p_y$  и  $p_z$  — проекции импульса **р** на оси координат x, y, z соответственно. Такая функция распределения аксиально-симметрична и вытянута вдоль оси x, так что магнитное поле, возникающее при развитии вейбелевской неустойчивости, имеет только одну компоненту, направленную вдоль оси z, т. е. перпендикулярно плоскости xy. При таком выборе рабочей плоскости расчёта вейбелевской неустойчивости подвержены как чисто поперечные моды, в которых электрическое поле одновременно перпендикулярно и волновому вектору ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ), и оси анизотропии ( $\mathbf{E} \perp x$ ), так и наклонные моды, которые в общем случае не являются ни продольными ( $\mathbf{E} \not \mid \mathbf{k}$ ), ни поперечными ( $\mathbf{E} \not \perp \mathbf{k}$ ) и у которых существует компонента волнового вектора вдоль оси анизотропии, т. е.  $k_x \neq 0$ .

Отметим, что исследование электрон-позитронной плазмы полностью аналогично исследованию электрон-ионной, в которой основная доля энергии приходится на электроны (замена  $N \rightarrow$  $\rightarrow N/2$  даёт результаты для плазмы с ионами бесконечной массы). Такая ситуация типична для лазерной плазмы. Для космической плазмы, напротив, типична ситуация, когда основная доля энергии приходится на ионы. Однако численные эксперименты с бесстолкновительными ударными волнами (см., например, [4, 19]) показали, что картина вейбелевской неустойчивости в электрон-позитронной плазме лишь незначительно отличается от случая электрон-ионной плазмы. Выбор электрон-позитронной плазмы обусловлен меньшей вычислительной сложностью задачи и обоснован вышеупомянутой схожестью проведённых другими авторами расчётов. Другой вопрос заключается в выборе конкретного вида функции распределения частиц. Помимо бимаксвелловского распределения, использованного в данной работе, в ряде исследований встречается и другая постановка задачи — развитие вейбелевской неустойчивости в двухпотоковой плазме (тепловой разброс скоростей движения частиц много меньше направленной скорости движения). В этом случае выводы могут быть другими и нелинейное взаимодействие мод может быть значительно более сильным [20]. Отметим, однако, что в реальных условиях едва ли можно ожидать формирования в плазме двухпотоковой функции распределения (за исключением установок кильватерного ускорения, где принимаются специальные меры по снижению дисперсии скоростей).

Число частиц в ячейках менялось от расчёта к расчёту, его максимальное значение достигало 12000 в каждой ячейке. Такое большое число использовалось в ряде расчётов для уменьшения влияния шумов, обусловленных численной неидеальностью плазмы, и позволило наблюдать и исследовать слабые эффекты нелинейного взаимодействия мод.

Было проведено три серии расчётов. В первой серии вейбелевская неустойчивость развивалась в системе с нулевым начальным магнитным полем, т.е. фактически с численных шумов. Во второй было использовано изначально заданное затравочное магнитное поле со спектром, близким к ожидаемому при развитии вейбелевской неустойчивости в исходно незамагниченной среде. В этом случае необходимо согласовать затравочное поле с функцией распределения, т.е. внести в последнюю пространственно неоднородные возмущения, отвечающие связанным с магнитным полем токами. Для этого мы использовали следующий метод: в момент времени  $t \approx \pi/(2\omega_{\rm p})$ после начала расчёта электрическое поле во всей области расчёта искусственно занулялось, после чего расчёт возобновлялся (здесь  $\omega_{\rm p}$  — плазменная частота). Если же расчёт проводить без согласования с затравочным магнитным полем, то в плазме возникают две компоненты электромагнитного поля: помимо вейбелевской моды появляется также и плазменная (ленгмюровская) мода. Последняя будет осциллировать и вносить дополнительные и труднофильтруемые шумы в данные, которые также влияют на динамику неустойчивости. Описанный выше метод позволяет практически полностью избавиться от плазменной моды и её влияния на точность расчётов. Наконец, в третьей серии расчётов в качестве затравочного поля задавалась сумма небольшого (2÷3) числа вейбелевских мод, что позволило детальнее исследовать четырёхволновое взаимодействие таких мод между собой.

1012

При обсуждении результатов моделирования полезно ввести следующие величины. Вопервых, параметр анизотропии функции распределения частиц:

$$A = \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - 1.$$

В расчётах, проведённых в данной работе, начальный параметр анизотропии изменялся в пределах 0,1÷100. Во-вторых, безразмерный (нормированный на плазменную частоту) инкремент:

$$\Gamma = \gamma/\omega_{\rm p},\tag{1}$$

где  $\omega_{\rm p} = \sqrt{4\pi e^2 N_{\rm e}/m_{\rm e}}$  — плазменная частота, e — элементарный заряд. В-третьих, безразмерный волновой вектор

$$\mathbf{K} = c\mathbf{k}/\omega_{\rm p} \tag{2}$$

и магнетизацию (безразмерную плотность энергии магнитного поля)

$$\epsilon_B = \frac{W_{\rm m}}{W_{\rm p}} = \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi N E_{\rm k}},\tag{3}$$

где c — скорость света в вакууме,  $W_{\rm m}$  — плотность энергии магнитного поля,  $W_{\rm p}$  — плотность кинетической энергии частиц,  $\langle B^2 \rangle$  — средний квадрат магнитного поля, а  $E_{\rm k}$  — средняя кинетическая энергия одной частицы.

Также удобно ввести спектр мощности флуктуаций магнитного поля

$$\int B^2 \mathrm{d}V = \int F(k) \,\mathrm{d}k \tag{4}$$

и безразмерное магнитное поле отдельной моды

$$b = \frac{1}{r_B k} = \frac{e\sqrt{\langle B^2 \rangle}}{\bar{p}ck} , \qquad (5)$$

где  $\bar{p} = \sqrt{2m_{\rm e} \langle W_{\rm p} \rangle / N}$  — характерный импульс частиц,  $r_B$  — характерный ларморовский радиус. Величина *b* равна углу, на который при прохождении длины 1/k поворачивается вектор скорости электрона с типичным импульсом в среднеквадратичном магнитном поле возмущений с длиной волны порядка  $2\pi/k$ . Также мы будем использовать нормированную безразмерную амплитуду спектра мощности

$$f(K) = \frac{\omega_{\rm p}^2}{8\pi \langle W_{\rm p} \rangle c^2 k} F(k).$$
(6)

Заметим, что для введённых величин выполняются следующие соотношения:

$$\epsilon_B = \int K f(K) \, \mathrm{d}K, \qquad b = \sqrt{f(K)}.$$
 (7)

# 2. СТАДИИ РАЗВИТИЯ ВЕЙБЕЛЕВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Эволюция вейбелевской неустойчивости может быть условно разделена на три стадии: линейная стадия, стадия насыщения и стадия затухания. Магнитное поле на всех трёх стадиях представляет собой набор апериодических вейбелевских мод.

На первой, линейной, стадии моды растут экспоненциально, а их волновые векторы практически перпендикулярны оси анизотропии функции распределения частиц. В наших расчётах



Рис. 1. Нормированный пространственный спектр мощности магнитного поля в момент максимальной магнетизации для двух начальных параметров анизотропии функции распределения: A = 0.2 (a) и A = 2 (b). Линии уровня соответствуют значениям 0,001; 0,01; 0,1; 0,25; 0,5; 0,75 от максимума

это направление соответствует направлению вдоль оси y, при этом  $k_y \gg k_x$ , т.е. магнитное поле образует сильно вытянутые структуры — филаменты<sup>3</sup>. Поскольку зависимость инкремента от волнового числа в малой окрестности точки максимума (обозначим соответствующий этому максимуму волновой вектор как  $\mathbf{k}_{\max}$ ) приближённо квадратичная, то спектр мощности растущих возмущений магнитного поля на линейной стадии неустойчивости в первом приближении является двухосным гауссовым. Для больши́х параметров анизотропии ( $A \gtrsim 1$ ) спектр остаётся приближённо гауссовым (за исключением высокочастотной части, появление которой обусловлено нелинейными эффектами) вплоть до достижения максимума магнетизации. При этом с ростом магнитного поля относительная ширина спектра постепенно уменьшается. Ширина спектра в момент достижения максимума зависит от начального уровня шумов: чем он меньше, тем уже спектр в момент окончания линейной стадии. В реальных условиях, когда начальная величина магнитного поля в плазме может быть на много порядков меньше, чем достижимо в численных расчётах, спектр магнитного поля на стадии насыщения может быть очень узким. Для малых параметров анизотропии максимум магнетизации достигается относительно позднее, когда спектр растущих мод становится относительно широким, из-за роста наклонных (с отличным от нуля значением  $k_x$ ) мод. Такое уширение спектра может приводить к возникновению двойного пика в спектре мощности по мере приближения к максимуму магнетизации (см. рис. 1).

Стадия роста магнитного поля сменяется стадией насыщения, на которой значение магнетизации слабо меняется вблизи максимума. Здесь нелинейные эффекты приводят к формированию высокочастотного хвоста в спектре мощности. Этот процесс начинается ещё на стадии роста с формирования дополнительных максимумов, соответствующих 3-й, 5-й и другим нечётным гармоникам мод в окрестности основного пика (образование чётных гармоник означало бы несохранение полного потока магнитного поля). К концу стадии насыщения максимум спектра

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> В трёхмерном случае волновые векторы неустойчивых мод лежат в основном в плоскости yz [21] (для функции распределения, вытянутой вдоль оси x, как в наших расчётах). При рассмотрении вейбелевской неустойчивости в двумерной геометрии встречаются два вида постановки задачи. Первый предполагает расчёт в плоскости xy, который и используется в нашей статье. Второй вид — расчёт в плоскости yz. Их основное отличие в том, что в плоскости xy могут развиваться как чисто поперечные (по отношению к оси анизотропии), так и наклонные вейбелевские моды, тогда как в плоскости yz развитие наклонных мод невозможно.

мощности смещается в сторону меньших волновых чисел и уширяется, а вторичные пики сливаются и образуют непрерывный хвост. Наше предыдущее исследование [15] показало, что этот хвост спадает в сторону больши́х волновых чисел приблизительно по экспоненциальному закону. Также нужно отметить рост крупномасштабного поля с волновыми числами  $k \ll k_{\text{max}}$ , который связан с нелинейным взаимодействием мод и который будет обсуждаться в дальнейшем.

Последняя стадия эволюции — стадия затухания, которая описывается монотонным спаданием магнетизации в практически изотропной плазме. Во время этой стадии спектр мощности магнитного поля продолжает смещаться в сторону меньших волновых векторов и постепенно изотропизуется, т. е. приближается к состоянию  $\langle k_x \rangle \approx \langle k_y \rangle$ .

## 3. ЧЕТЫРЁХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЕЙБЕЛЕВСКИХ МОД

Как уже было отмечено в предыдущем разделе, расчёты развития вейбелевской неустойчивости без начального магнитного поля (т. е. с численных шумов) не позволяют достичь достаточно узкого спектра магнитного поля, который можно было бы ожидать в действительности в конце линейной стадии для случая достаточно больши́х начальных параметров анизотропии. Широкий (в силу технических, а не физических причин) спектр делает невозможным детальное исследование процессов генерации вторичных пиков, т. к. уверенно разделить компоненты в спектре не представляется возможным. Эта проблема может быть преодолена в расчётах с изначально заданным затравочным магнитным полем, которое имеет узкий спектр. Последний можно выбрать максимально приближённым к тому, который ожидается в линейной теории вейбелевской неустойчивости.

Мы провели серию расчётов развития вейбелевской неустойчивости в анизотропной бимаксвелловской плазме с параметром анизотропии A = 2 и с затравочным магнитным полем, спектр мощности которого имел гауссову форму:

$$F(K_x, K_y) = C \exp\{-[(K_y - K_{\max})^2 + K_x^2]/(\Delta K)^2\},\$$

а относительная ширина спектра выбиралась из значений  $\Delta K/K_{\text{max}} = 1/16, 1/8, 1/4$ . В таких расчётах удаётся легко отделить друг от друга вторичные пики, связанные с четырёхволновым взаимодействием (см. рис. 2 и 3), и возможно провести фильтрацию спектра мощности, чтобы определить долю энергии, приходящуюся на каждую из компонент.

В нашем исследовании мы использовали два метода выделения наборов мод, отвечающих различным пикам в спектре мощности, которые привели к практически одинаковым результатам. Первый метод основан на приближении спектра мощности суммой нескольких гауссовых профилей, отвечающих основному и последующим пикам. При этом методом наименьших квадратов подбиралась ширина и амплитуда этих пиков. Второй метод основан на выделении в спектре мощности магнитного поля областей вблизи  $K_x = nK_{\text{max}}$  (n = 1, 3, 5, ...) с шириной, равной начальной ширине спектра. Квадраты амплитуд всех мод, попадающих в выделенные области, суммировались. Отношения плотностей энергии магнитного поля, приходящихся на основной и вторичные пики, представлены на рис. 4. Отметим, что в расчётах без затравочного поля (стартующих с шумов) такую обработку результатов провести практически невозможно.

Расчёты с затравочным магнитным полем позволили обнаружить ранее неизвестные эффекты.

Во-первых, с увеличением ширины задаваемого спектра максимальная магнетизация уменьшается (см. рис. 4). Этот эффект может приводить к недооценке максимально достижимого магнитного поля в расчётах, стартующих с шумового магнитного поля.

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев



Рис. 2. Спектр мощности магнитного поля для расчёта с  $\Delta K/K_{\rm max} = 1/8$  в момент достижения максимума магнетизации. Линии соответствуют следующим уровням:  $10^{-7}, 10^{-6}, \ldots, 10^{0}$ 



Рис. 3. Эволюция нормированного спектра мощности f(K) для расчёта с заданным начальным спектром с  $\Delta K/K_{\text{max}} = 1/8$  для разных моментов времени:  $\omega_{\text{p}}t = 4$  (красная линия), 12 (зелёная) и 24 (синяя)



Рис. 4. Зависимость энергии магнитного поля в основном пике (a) и в пиках, соответствующих третьей (6) и пятой (6) гармоникам основного пика, от начальной ширины спектра мощности магнитного поля  $\Delta K$ ;  $K_{\text{max}} = 16$ 

Во-вторых, больши́е различия наблюдаются в области мод с малыми волновыми векторами. Очевидно, что более узкому начальному спектру возмущений магнитного поля должна соответствовать меньшая плотность энергии, приходящаяся на длинноволновые гармоники (т. к. в этом случае существует меньшее число сочетаний трёх мод, сумма которых попадает в область малых волновых чисел). Такой эффект действительно наблюдается в расчётах (см. рис. 5): более быстрый рост крупномасштабного поля происходит для более широкого начального спектра мощности затравочного магнитного поля. Соответственно, в дальнейшем более узкий начальный спектр приводит к более быстрому затуханию магнитного поля. Это связано с меньшей величиной крупномасштабного поля, возникшего за счёт нелинейного взаимодействия мод.

Также мы исследовали временну́ю эволюцию спектра мощности как для мод вблизи основного пика, так и для мод вблизи вторичных пиков у волновых векторов, соответствующих  $3K_{\rm max}$  и  $5K_{\rm max}$  (см. рис. 6). Амплитуда третьей и пятой гармоник пропорциональна третьей и пятой степеням амплитуды основной гармоники соответственно. Осцилляции амплитуд вторичных пиков,

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев



Рис. 5. Рост энергии магнитного поля в низкочастотных гармониках со временем для разных начальных ширин его спектра. Отметим, что максимум магнетизации при этом соответствует одному и тому же значению времени,  $t \approx 250$ . Низкочастотными считались моды с  $K < K_{\rm max}/4$ . Начальный спектр флуктуаций имеет вид F(K) = $= C \exp \{-[(K_y - K_{\rm max})^2 + K_x^2]/(\Delta K)^2\}, K_{\rm max} =$ = 16. Красная кривая отвечает начальной ширине  $\Delta K = 4$ , зелёная —  $\Delta K = 2$ , синяя —  $\Delta K = 1$ 



Рис. 6. Эволюция энергии магнитного поля в главном пике и во вторичных пиках для расчёта с начальной шириной спектра  $\Delta K=2$ 

по-видимому, связаны с интерференцией близких мод: токи одних мод зануляют токи других. Такой эффект хорошо виден, если рассматривать динамику отдельных мод (см. далее рис. 9), когда амплитуды гармоник квазипериодически проходят через нуль. Несмотря на то, что кривые на рис. 6 получены суммированием достаточно большого числа отдельных мод, такие колебания всё равно наблюдаются и они тем более заметны, чем у́же суммируемый спектр.

Детали физического механизма нелинейности, ответственного за появление гармоник, пока остаются непонятными. По результатам численных расчётов можно узнать несколько особенностей.

1) Плотность энергии магнитного поля, приходящаяся на долю гармоник, всегда мала (не превышает 1 % от полной плотности энергии магнитного поля даже для A = 100). Энергия в третьей гармонике приблизительно равна среднему геометрическому из энергии в основном пике и пятой гармонике.

2) В случае, когда спектр вейбелевских мод достаточно широк, в результате четырёхволнового взаимодействия могут образовываться и низкочастотные моды. Скорость роста низкочастотных гармоник вблизи момента времени, соответствующего максимуму магнетизации, значительно увеличивается по сравнению с инкрементом, предсказываемым линейной теорией, причём эта скорость может даже превосходить инкремент моды с волновым вектором, соответствующим максимуму в спектре мощности.

 Скорость роста третьей гармоники приближённо равна утроенному инкременту основной моды, а скорость роста пятой — пятикратному инкременту основной моды.

Поскольку для любых начальных уровней анизотропии на вторичные (нелинейные) пики на любой из стадий развития вейбелевской неустойчивости приходится лишь малая доля энергии

магнитного поля, то вейбелевская турбулентность всегда слабая<sup>4</sup> и нелинейное взаимодействие отдельных мод не может непосредственно изменить динамику магнитного поля на стадии его роста и насыщения. Это предоставляет возможность развить квазилинейную теорию вейбелевской

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> В таком режиме пространственный масштаб магнитных филаментов меньше, чем гирорадиус типичных тепловых частиц и, таким образом, движение последних определяется в основном статистическими свойствами магнитного поля, а не локальной геометрией отдельных филаментов.



Рис. 7. Появление нелинейных гармоник в спектре мощности магнитного поля при  $\omega_{\rm p}t = 1$  (*a*), 4 (*б*), 8 (*в*) и 12 (*г*). Изначально заданы две моды с волновыми векторами  $\mathbf{K}_1 = \{0, 12\}$  и  $\mathbf{K}_2 = \{-1, 8\}$ . Начальный параметр анизотропии плазмы A = 2



Рис. 8. Эволюция некоторых отдельных мод со временем для расчёта с изначально заданными двумя модами с  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$ . Отметим возникновение длинноволновых гармоник  $-2\mathbf{K}_1 + 3\mathbf{K}_2$  и  $\mathbf{K}_1 - 2\mathbf{K}_2$  вблизи K = 0

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев



Рис. 9. Эволюция отдельных гармоник со временем для расчёта с изначально заданными тремя модами с  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  и  $\mathbf{K}_3$ . Мода с  $K_c$  изображена для контроля и лежит вне области развития вейбелевской неустойчивости или генерации нелинейных гармоник. Красным кривым для третьих гармоник соответствует  $10^{-5} \prod_{k=1}^{3} f_k$ , для пятых —  $10^{-7} \prod_{k=1}^{5} f_k$ , где произведение берётся по амплитудам исходных мод, дающих вклад в данную моду

неустойчивости, которая будет описывать все стадии её развития без привлечения существенно нелинейных эффектов. Тем не менее нелинейное взаимодействие мод важно как минимум для генерации крупномасштабных магнитных структур, которые могут существовать длительное время. Также нелинейные эффекты могут быть принципиально важными для оценки скорости затухания поля.

Для лучшего понимания процессов нелинейного взаимодействия отдельных мод мы также провели ряд расчётов с начальным магнитным полем, спектр которого представляет собой сумму всего 2 или 3 индивидуальных мод. На рис. 7 и 8 изображена эволюция спектра мощности магнитного поля с изначально заданными двумя модами и эволюция некоторых отдельных мод. Возникновение гармоник, представляющих собой все возможные суммы нечётного числа изначальных мод, хорошо заметно с течением времени, так же как и появление крупномасштабных гармоник с малыми волновыми числами.

Эволюция амплитуд и фаз отдельных мод при начально заданных трёх модах изображена на рис. 9 и 10. Заметим, что инкременты большинства мод, образованных в результате нелинейного взаимодействия (особенно представляющих собой сумму трёх исходных) хорошо описываются 3-й или 5-й степенью амплитуд продуцирующих мод, хотя в некоторые моменты времени происходят колебания. Фазы таких мод также равны сумме фаз соответствующих мод-источников, за исключением фазовых сдвигов на угол  $\pi$ . Такие сдвиги происходят каждый раз, когда амплитуда гармоники проходит через нуль. Заметим, что эволюция отдельных мод очень хорошо воспроизводится при изменении «технических» параметров расчёта, таких как шаг сетки, длина шага по времени и число частиц в ячейках. Точки фазовых сдвигов и общий вид кривых не зависят от этих параметров.

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев



Рис. 10. Эволюция фаз отдельных гармоник для расчёта с изначально заданными тремя модами с  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  и  $\mathbf{K}_3$ . Чёрной кривой изображена сумма фаз соответствующих «производящих» мод. Для удобства также приведена штриховая кривая, которая соответствует отличающейся на  $\pi$  фазе

### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью численного моделирования методом частиц в ячейках исследована роль нелинейности в эволюции вейбелевской неустойчивости в двухтемпературной плазме. Основные результаты можно кратко изложить следующим образом.

1) Безразмерные амплитуды вейбелевских мод, которые характеризуют степень нелинейности задачи, всегда малы, даже в том случае, когда начальный параметр анизотропии плазмы очень велик, т. е.  $A \gg 1$ . На протяжении стадий экспоненциального роста и насыщения магнитного поля его характерный пространственный масштаб остаётся меньше гирорадиуса частиц со средним импульсом и их движение определяется глобальными статистическими свойствами магнитного поля. Заметим, однако, что на стадии затухания поля возможна качественно иная ситуация, т. к. число захваченных частиц может увеличиваться и после достижения максимума магнетизации из-за роста магнитного поля крупномасштабных структур. Таким образом, насыщение вейбелевской неустойчивости связано с изотропизацией функции распределения, а не с развитием нелинейного взаимодействия между отдельными модами магнитного поля.

2) Относительная ширина спектра мощности магнитного поля на стадии насыщения растёт с уменьшением начального параметра анизотропии функции распределения частиц. В момент достижения максимума магнетизации при достаточно малых начальных параметрах анизотропии  $(A \leq 1)$  максимумы в спектре мощности магнитного поля приходятся на наклонные моды.

3) Нелинейное четырёхволновое взаимодействие вейбелевских мод может генерировать крупномасштабные магнитные структуры. В наших расчётах видно, что возникновение таких структур связано именно с нелинейным взаимодействием мод, а не с их экспоненциальным ростом

из-за вейбелевской неустойчивости. Такие моды, однако, будучи изначально порождёнными нелинейным взаимодействием, могут продолжать расти достаточно большое время уже в линейном режиме, т. к. они остаются неустойчивыми в условиях, когда параметр анизотропии функции распределения становится малым, а коротковолновые моды испытывают сильное затухание.

4) В расчётах с затравочным магнитным полем максимальная магнетизация (достигающаяся на стадии насыщения) уменьшается при увеличении начальной ширины спектра затравочного магнитного поля (при одинаковых параметрах анизотропии функции распределения частиц). Это может приводить к недооценке магнитных полей, достижимых в реальных условиях, когда из-за низкого уровня начальных возмущений можно ожидать образования достаточно узких спектров генерируемого магнитного поля.

5) Более быстрый рост крупномасштабных (и, соответственно, слабозатухающих) магнитных полей наблюдается для более широких спектров мощности возмущений магнитного поля. Из-за этого узкие спектры мощности приводят к более быстрому затуханию магнитного поля.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 16-12-10528).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Weibel E. S. // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2, No. 3. P. 83–84. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.2.83
- Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В., Мартьянов В. Ю., Тарасов С. В. // Успехи физ. наук. 2016. Т. 186, № 12. С. 1267–1314. https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.08.037893
- 3. Spitkovsky A. // Astrophys. J. Lett. 2008. V. 682, No. 1. P. L5–L8. https://doi.org/10.1086/590248
- 4. Chang P., Spitkovsky A., Arons J. // Astrophys. J. 2008. V. 674, No. 1. P. 378–387. https://doi.org/10.1086/524764
- Keshet U., Katz B., Spitkovsky A., Waxman E. // Astrophys. J. Lett. 2009. V. 693, No. 2. P. L127– L130. https://doi.org/10.1088/0004-637X/693/2/L127
- Medvedev M. V., Zakutnyaya O. V. // Astrophys. J. 2009. V. 696, No. 2. P. 2269–2274. https://doi.org/10.1088/0004-637X/696/2/2269
- 7. Нечаев А. А., Гарасёв М. А., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2019. Т. 62, № 12. С. 932–952.
- Fox W., Matteucci J., Moissard C., et al. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25, No. 10. Art. no. 102106. https://doi.org/10.1063/1.5050813
- Stockem A., Dieckmann M. E., Schlickeiser R. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52, No. 8. Art. no. 085009. https://doi.org/10.1088/0741-3335/52/8/085009
- 11. Achterberg A., Wiersma J. // Astron. Astrophys. 2007. V. 475, No. 1. P. 1–18. https://doi.org/10.1051/0004-6361:20065365
- 12. Borodachev L.V., Kolomiets D.O. // J. Plasma Phys. 2011. V. 77, No. 2. P. 277–287. https://doi.org/10.1017/S0022377810000188
- Medvedev M. V., Loeb A. // Astrophys. J. 1999. V. 526, No. 2. P. 697–706. https://doi.org/10.1086/308038
- 14. Gruzinov A. // Astrophys. J. Lett. 2001. V. 563, No. 1. P. L15–L18. https://doi.org/10.1086/324223
- 15. Гарасёв М. А., Деришев Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 12. С. 1039–1051.

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев

- Arber T. D., Bennett K., Brady C. S., et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57, No. 11. Art. no. 113001. https://doi.org/10.1088/0741-3335/57/11/113001
- Yee K. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. V. 14, No. 3. P. 302–307. https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693
- Higuera A.V., Cary J.R. // Phys. Plasmas. 2017. V. 24, No. 5. Art. no. 052104. https://doi.org/10.1063/1.4979989
- Sironi L., Spitkovsky A., Arons J. // Astrophys. J. 2013. V. 771, No. 1. Art. no. 54. https://doi.org/10.1088/0004-637X/771/1/54
- Naseri N., Bochkarev S. G., Ruan P., et al. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25, No. 1. Art. no. 012118. https://doi.org/10.1063/1.5008278
- 21. Вагин К. Ю., Урюпин С. А. // Физика плазмы. 2014. Т. 40, № 5. С. 468–479. https://doi.org/10.7868/S036729211404009X

Поступила в редакцию 24 ноября 2020 г.; принята в печать 11 декабря 2020 г.

## NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR EFFECTS IN THE WEIBEL INSTABILITY

### M. A. Garasev and E. V. Derishev

We analyze in detail the nonlinear effects taking place in an anisotropic plasma at different stages of the Weibel instability using a new approach to the particle-in-cell numerical simulation. Nonlinear effects are found to be most important at the saturation stage where they lead to generation of largescale, weakly decaying magnetic fields. On the other hand, it turned out that nonlinear effects at all stages of the Weibel instability are always small in the sense that nonlinear interaction between individual modes cannot directly change the dynamics of the magnetic field at the growth and saturation stage, but they are fundamentally important for estimating the rate of magnetic field decay. In other words, the resulting Weibel turbulence is always weak, and the spatial scale of the magnetic structures is always smaller than the gyroradius of typical thermal particles. Thus, the motion of particles is mostly determined by the global statistical properties of the magnetic field rather than by the local geometry of individual magnetic field filaments. The results may have application for interpreting some phenomena in a non-equilibrium plasma of space shocks, as well as in the analysis of experiments with femtosecond laser-produced plasma.