

УДК 530.182

РЕКОНСТРУКЦИЯ СИСТЕМ С ЗАДЕРЖКОЙ СО СКРЫТЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В. С. Хорев^{1,2}, И. В. Сысоев^{1,2*}, В. И. Пономаренко^{1,2}, Б. П. Безручко^{1,2}, М. Д. Прохоров¹

¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН;

² Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Предложен метод реконструкции динамических систем с запаздывающей обратной связью, имеющих несколько скрытых переменных, в том числе скрытую переменную с задержкой. Он основан на оригинальном подходе, позволяющем существенно уменьшить количество стартовых догадок для скрытой переменной с запаздыванием. Метод применён для реконструкции модельной системы уравнений Ланга—Кобаяши, описывающей динамику одномодового полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью, по периодическим и хаотическим временным рядам. Исследована зависимость качества реконструкции исследуемой системы от точности задания стартовых догадок для неизвестных параметров и скрытых переменных.

ВВЕДЕНИЕ

Задача реконструкции математической модели динамической системы по дискретным последовательностям экспериментальных данных (временным рядам) давно привлекает к себе большое внимание. Для её решения были предложены различные подходы, ориентированные на ситуации как отсутствия, так и наличия априорной информации об исследуемой системе [1–11]. Наиболее благоприятна ситуация, когда структура модельных уравнений системы заранее известна и требуется восстановить лишь неизвестные значения параметров в ней. Но даже в такой постановке задача реконструкции динамической системы является нетривиальной, если система имеет высокую размерность. Например, для систем с запаздывающей обратной связью, обладающих бесконечно большим числом степеней свободы, приходится разрабатывать специальные методы реконструкции по временным рядам [12–23]. Однако большинство этих методов ориентировано на системы с запаздыванием, динамика которых характеризуется одной переменной и описывается дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием. Задача реконструкции существенно усложняется при наличии у системы с запаздыванием нескольких динамических переменных, некоторые из которых недоступны для наблюдения, т. е. являются скрытыми (ненаблюдаемыми). Вместе с тем такая задача представляет большой практический интерес, т. к. реконструкция математической модели может выступать при этом в качестве метода косвенного измерения недоступных для наблюдения переменных.

В данной работе предлагается метод реконструкции системы с запаздыванием, у которой из трёх динамических переменных лишь одна является наблюдаемой, а две другие переменные являются скрытыми, причём одна из скрытых переменных имеет задержку. Для определённости мы рассмотрим и проиллюстрируем метод на примере системы уравнений Ланга—Кобаяши, описывающей динамику одномодового полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью [24, 25]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(t) &= F(t)\rho(t) + \eta\rho(t - \tau) \cos[\phi(t) - \phi(t - \tau)], \\ \rho(t)\dot{\phi}(t) &= \alpha F(t)\rho(t) - \eta\rho(t - \tau) \sin[\phi(t) - \phi(t - \tau)],\end{aligned}$$

* ivssci@gmail.com

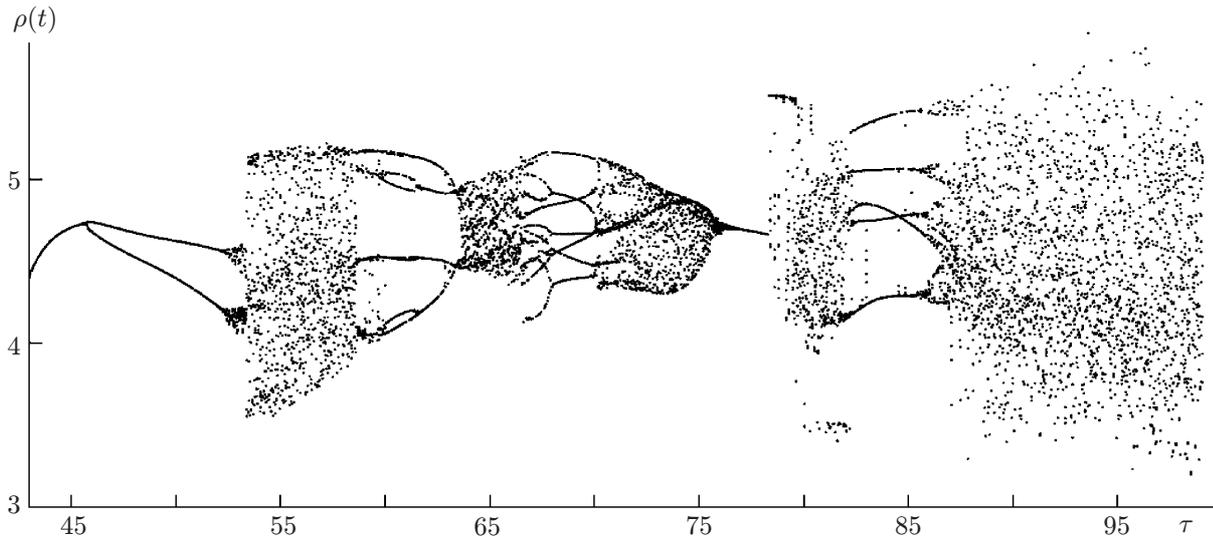


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1) в зависимости от времени запаздывания τ при $P = 14,5$, $\eta = 0,02$, $T = 1000$, $\alpha = 5$

$$T\dot{F}(t) = P - F(t) - [1 + 2F(t)]\rho^2(t), \quad (1)$$

где $\rho(t)$ и $\phi(t)$ — амплитуда и фаза комплексной амплитуды электрического поля $E(t) = \rho(t) \times \exp[i\phi(t)]$ соответственно, F — концентрация неравновесных носителей, точкой обозначено дифференцирование по времени t , измеряемому в единицах времени жизни фотона в резонаторе τ_p , $T = \tau_s/\tau_p$ — отношение времени жизни носителей τ_s ко времени жизни фотонов, P — параметр накачки (превышение порога генерации), τ — время запаздывания в цепи обратной связи, η — коэффициент обратной связи, α — фактор неизохронности. Будем считать, что для измерения доступна только переменная $\rho(t)$ системы (1), а переменные $\phi(t)$ и $F(t)$ являются скрытыми и их требуется восстановить.

1. МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ

Полупроводниковые лазеры с оптической обратной связью, описываемые уравнениями Ланга—Кобаяши (1), демонстрируют большое разнообразие колебательных режимов в зависимости от выбора управляющих параметров. На рис. 1 построена бифуркационная диаграмма системы (1) в зависимости от времени запаздывания τ при фиксированных значениях остальных параметров: $P = 14,5$, $\eta = 0,02$, $T = 1000$, $\alpha = 5$.

Приблизительно оценить величину параметра τ в системе (1) можно по положению максимума автокорреляционной функции или максимума функции взаимной информации, построенных по временному ряду колебаний интенсивности $\rho^2(t)$ лазерного излучения [26]. Для более точной оценки τ можно использовать метод, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда интенсивности излучения [25], или метод, базирующийся на поиске ближайших соседей векторов состояния такого временного ряда [27].

Поскольку параметры T и α в реальной системе фиксированы и близки для лазеров одного типа, будем считать их известными. Неизвестные управляющие параметры P и η , перестройку которых относительно легко обеспечить в реальном лазере, а также временные ряды скрытых переменных $\phi(t)$ и $F(t)$ будем восстанавливать, имея в распоряжении лишь временной ряд $\{\rho_n\}_{n=1}^N$ переменной $\rho(t)$, измеренной в дискретные моменты времени $n = t/\Delta t$, где Δt — шаг выборки точек, а N — число точек.

Предлагаемый метод реконструкции опирается на метод начального условия [28]. Идея последнего (разработанного для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) состоит в том, что начальные условия для скрытых переменных включаются в число неизвестных параметров модели. Однако если при реконструкции таких уравнений было достаточно одной стартовой догадки для каждой скрытой переменной, то при реконструкции систем с запаздыванием требуется задать $(\theta + 1)$ стартовых догадок для скрытой переменной, имеющей задержку, где $\theta = \tau/\Delta t$ — дискретное время запаздывания.

Обозначим стартовые догадки для скрытых переменных $\phi(t)$ и $F(t)$ как $\{\tilde{\phi}_n\}_{n=1}^{\theta+1}$ и $\tilde{F}_{\theta+1}$ соответственно, а стартовые догадки для параметров P и η — как \tilde{P} и $\tilde{\eta}$ соответственно. Все вместе стартовые догадки можно записать в виде вектора

$$\zeta = \left(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_\theta, \tilde{\phi}_{\theta+1}, \tilde{F}_{\theta+1}, \tilde{P}, \tilde{\eta} \right), \quad (2)$$

имеющего длину K , где K — число неизвестных параметров метода. Задав вектор (2), построим модельный временной ряд $\{\hat{\rho}_n\}_{n=\theta+2}^N$, используя в качестве начальных условий для $\rho(t)$ наблюдаемые значения $\{\rho_n\}_{n=1}^{\theta+1}$, и сравним его с наблюдаемым временным рядом $\{\rho_n\}_{n=\theta+2}^N$, рассчитав целевую функцию

$$S(\zeta) = S(\zeta_1, \dots, \zeta_K) = \sum_{n=\theta+2}^N (\rho_n - \hat{\rho}_n)^2, \quad (3)$$

где ζ_1, \dots, ζ_K — компоненты вектора (2). Целевая функция (3) характеризует суммарный квадрат отклонения модельной реализации от наблюдаемой. Минимизировав её, мы получим оценку неизвестных параметров и сможем восстановить скрытые переменные. Для минимизации функции (3) можно воспользоваться одним из классических алгоритмов [29], численно рассчитав градиент

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \zeta_K} \right) \quad (4)$$

целевой функции S и матрицу Гессе $\mathbf{H}(S)$. Для вычисления градиента методом центральной разности будем вводить малую поправку $\delta\zeta_i$ последовательно для каждой i -й компоненты ζ_i вектора ζ , где $i = 1, \dots, K$, и находить i -ю компоненту градиента (4) по следующей приближённой формуле:

$$g_i \approx \frac{S(\zeta_1, \dots, \zeta_i + \delta\zeta_i, \dots, \zeta_{\theta+K}) - S(\zeta_1, \dots, \zeta_i - \delta\zeta_i, \dots, \zeta_{\theta+K})}{2\delta\zeta_i}. \quad (5)$$

При этом для нахождения \mathbf{g} придётся $2K$ раз рассчитать модельный временной ряд $\{\hat{\rho}_n\}_{n=\theta+2}^N$. Аналогичным образом можно численно оценить каждую компоненту $h_{i,j}$ матрицы Гессе $\mathbf{H}(S)$, последовательно вводя поправки одновременно к двум компонентам (ζ_i и ζ_j) вектора ζ :

$$h_{i,j} \approx \frac{S_{i+j+} - S_{i+j-} - S_{i-j+} + S_{i-j-}}{4\delta\zeta_i\delta\zeta_j},$$

$$S_{i+j+} = S(\zeta_1, \dots, \zeta_i + \delta\zeta_i, \dots, \zeta_j + \delta\zeta_j, \dots, \zeta_K),$$

$$S_{i+j-} = S(\zeta_1, \dots, \zeta_i + \delta\zeta_i, \dots, \zeta_j - \delta\zeta_j, \dots, \zeta_K),$$

$$S_{i-j+} = S(\zeta_1, \dots, \zeta_i - \delta\zeta_i, \dots, \zeta_j + \delta\zeta_j, \dots, \zeta_K),$$

$$S_{i-j-} = S(\zeta_1, \dots, \zeta_i - \delta\zeta_i, \dots, \zeta_j - \delta\zeta_j, \dots, \zeta_K). \quad (6)$$

Для этого потребуется рассчитать модельный временной ряд ещё $4K^2$ раз. Имея градиент целевой функции и матрицу Гессе, можно вычислить вектор поправок $\Delta\zeta$ к стартовым догадкам ζ , решив систему линейных уравнений

$$\mathbf{H}(S)\Delta\zeta = -\mathbf{g}. \quad (7)$$

Затем следует скорректировать вектор стартовых догадок ζ : добавить к нему вектор поправок $\Delta\zeta$, решив систему линейных уравнений (7), и снова рассчитать целевую функцию (3). Будем повторять эту процедуру, пока изменение целевой функции на очередном шаге не станет достаточно малым:

$$|S(\zeta) - S(\zeta + \Delta\zeta)| < \varepsilon, \quad (8)$$

где параметр ε задаёт точность вычислений. Значения параметров \hat{P} и $\hat{\eta}$, соответствующие достигнутому минимуму целевой функции, а также подобранные начальные условия $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_{\theta+1}$ и $\hat{F}_{\theta+1}$ используются для расчёта временных рядов всех переменных, в том числе скрытых, путём решения уравнений (1).

Поскольку при реконструкции систем с запаздыванием при больших значениях θ требуется задать слишком много начальных значений для скрытых переменных, имеющих задержку, метод начального условия перестаёт сходиться и его требуется модифицировать. При этом в типичном случае нельзя увеличить шаг выборки путём прореживания исходного ряда в достаточной степени, т. к. для расчёта градиента и матрицы Гессе необходимо знать все значения наблюдаемой переменной на всём времени запаздывания с достаточно малым шагом, обеспечивающим устойчивость разностной схемы. Оказывается, что прореживание допустимо только для некоторых очень простых режимов и только для частных типов систем с определённым видом нелинейности, как это было сделано в [22], поэтому полагаться на него в общем случае не приходится.

Основная идея предлагаемой нами модификации состоит в том, чтобы учесть непрерывность временной реализации на этапе формирования стартовых догадок для скрытой переменной с запаздыванием и получить таким образом дополнительные условия на её значения. Вместо задания $(\theta + 1)$ стартовых догадок для переменной $\phi(t)$ зададим только $L < \theta$ стартовых догадок $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_L$ в моменты времени, равномерно выбранные на интервале $(\theta + 1)$, а недостающие $(\theta - 1 - L)$ компонент вектора (2) найдём с помощью интерполяции траектории $\phi(t)$ кубическим сплайном. Такой подход позволяет в десятки и даже в сотни раз (в зависимости от отношения θ/L) сократить число подгоняемых параметров метода и обеспечить его сходимость. Величину L можно выбрать из общих соображений. Во-первых, значения $L < 3$ непригодны для использования, т. к. по ним нельзя построить аппроксимирующий сплайн. Во-вторых, значения L много больше числа неизвестных параметров в уравнении (1) (в рассматриваемом случае их было два: P и η) тоже неэффективны, т. к. в таком случае именно ошибки в начальных условиях будут почти целиком определять область сходимости. Исходя из этих соображений в данной работе рассматривался диапазон $3 \leq L \leq 19$. При этом важно было убедиться, что имеется хотя бы по 4 узла сплайна на одном характерном временном масштабе, и учесть, что для хаотических рядов из-за чувствительности к начальным условиям требуется в целом лучшая аппроксимация и следует использовать большее L , чем для периодических рядов при том же времени запаздывания и характерном временном масштабе колебаний.

Аппроксимация начальных условий на времени запаздывания кубическим сплайном до некоторой степени сужает класс режимов, для которых может быть проведена реконструкция. В случае решений импульсного типа с быстрыми изменениями переменных при недостаточно большом L могут возникнуть проблемы восстановления параметров из-за большой погрешности.

Нахождение глобального минимума целевой функции в многомерном пространстве параметров является сложной задачей, решение которой затруднено в типичном случае наличием большого числа локальных минимумов. Успех реконструкции динамической системы во многом зависит от удачного выбора стартовых догадок. Поэтому важно приблизить последние для неизвестных параметров к истинным значениям, используя априорные знания о системе. Поскольку переменная $\phi(t)$ в (1) описывает фазу комплексной амплитуды электрического поля, для её аппроксима-

ции удобно использовать гармоническую функцию

$$\tilde{\phi}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (9)$$

где A , ω и φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза колебаний соответственно. Частоту ω следует выбрать равной характерной частоте колебаний системы (1), оценку которой можно получить по временному ряду колебаний переменной $\rho(t)$. Начальную фазу φ_0 будем выбирать в интервале от 0 до 2π с некоторым шагом, добиваясь минимизации целевой функции (3). Амплитуду A можно также выбирать в некотором интервале или взять её постоянной, например $A = 1$, что достаточно близко к характерной амплитуде колебаний переменной $\phi(t)$.

Следует отметить, что результаты реконструкции будут зависеть от длины временного ряда. Для хаотических рядов нужно, чтобы на длине ряда соблюдалось условие

$$N\Delta t \ll \ln \left[\frac{\max(\rho) - \min(\rho)}{\Delta\rho} \right] / \lambda_1, \quad (10)$$

где величина $[\max(\rho) - \min(\rho)]$ определяет размах колебаний, величина $\Delta\rho$ представляет уровень измерительного шума, λ_1 — старший ляпуновский показатель системы. На самом деле достаточно соблюдение условия (10) на большей части ряда, поскольку, если существенное разбегание траекторий из-за экспоненциального роста малой ошибки будет иметь место в конце используемого ряда, это будет некритично для сходимости. На практике выполнение условия (10) можно проверить, если использовать один из распространённых подходов к оценке старшего ляпуновского показателя по экспериментальным рядам, например метод Розенштейна [30].

Зависимость результатов реконструкции от выбора стартовых догадок $\tilde{F}_{\theta+1}$, \tilde{P} и $\tilde{\eta}$ рассмотрена в следующем разделе.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Применим предложенный метод для реконструкции системы уравнений Ланга—Кобаяши (1) при трёх различных значениях времени запаздывания: $\tau = 46$, $\tau = 50$, $\tau = 90$ (остальные параметры фиксированы: $P = 14,5$, $\eta = 0,02$, $T = 1000$, $\alpha = 5$). Из рис. 1 видно, что при выбранных значениях τ система демонстрирует периодический колебательный режим с периодом один, периодический режим с периодом два и хаотический режим соответственно. Для всех трёх переменных системы (1) мы сгенерировали временные ряды с длиной $N = 10000$ точек при шаге выборки точек $\Delta t = 0,05$ (такой шаг является близким к максимально возможному при условии сохранения устойчивости разностной схемы). При этом дискретное время запаздывания θ принимает целочисленные значения 920, 1000 и 1800 для рассматриваемых колебательных режимов.

На рис. 2 временные реализации переменных ρ , ϕ и F показаны чёрным цветом на заднем плане для случая $\tau = 46$. По периодическому временному ряду переменной ρ (см. рис. 2a) легко определить период колебаний T_{osc} . В единицах дискретного времени n этот период равен 732, что при $\Delta t = 0,05$ составляет $T_{\text{osc}} = 36,6$.

Полагая, что значения параметров T , α и τ известны (время запаздывания τ можно оценить по временному ряду переменной ρ с помощью методов [25, 27]), возьмём в качестве начальных условий для параметров P и η следующие значения: $\tilde{P} = 151$, $\tilde{\eta} = 0,0185$. Стартовые догадки $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_L$ для скрытой переменной ϕ зададим как точки функции (9), выбранные через равные промежутки времени на интервале $\theta + 1$ при $L = 9$, $A = 1$, $\omega = 2\pi/T_{\text{osc}} = 0,172$ рад и φ_0 , перебираемом в интервале от 0 до $15\pi/8$ с шагом $\pi/8$. Стартовая догадка для скрытой переменной F принимается равной $\tilde{F}_{\theta+1} = 0$. Начальные условия для переменной ρ возьмём равными наблюдаемым значениям $\{\rho_n\}_{n=1}^{\theta+1}$.

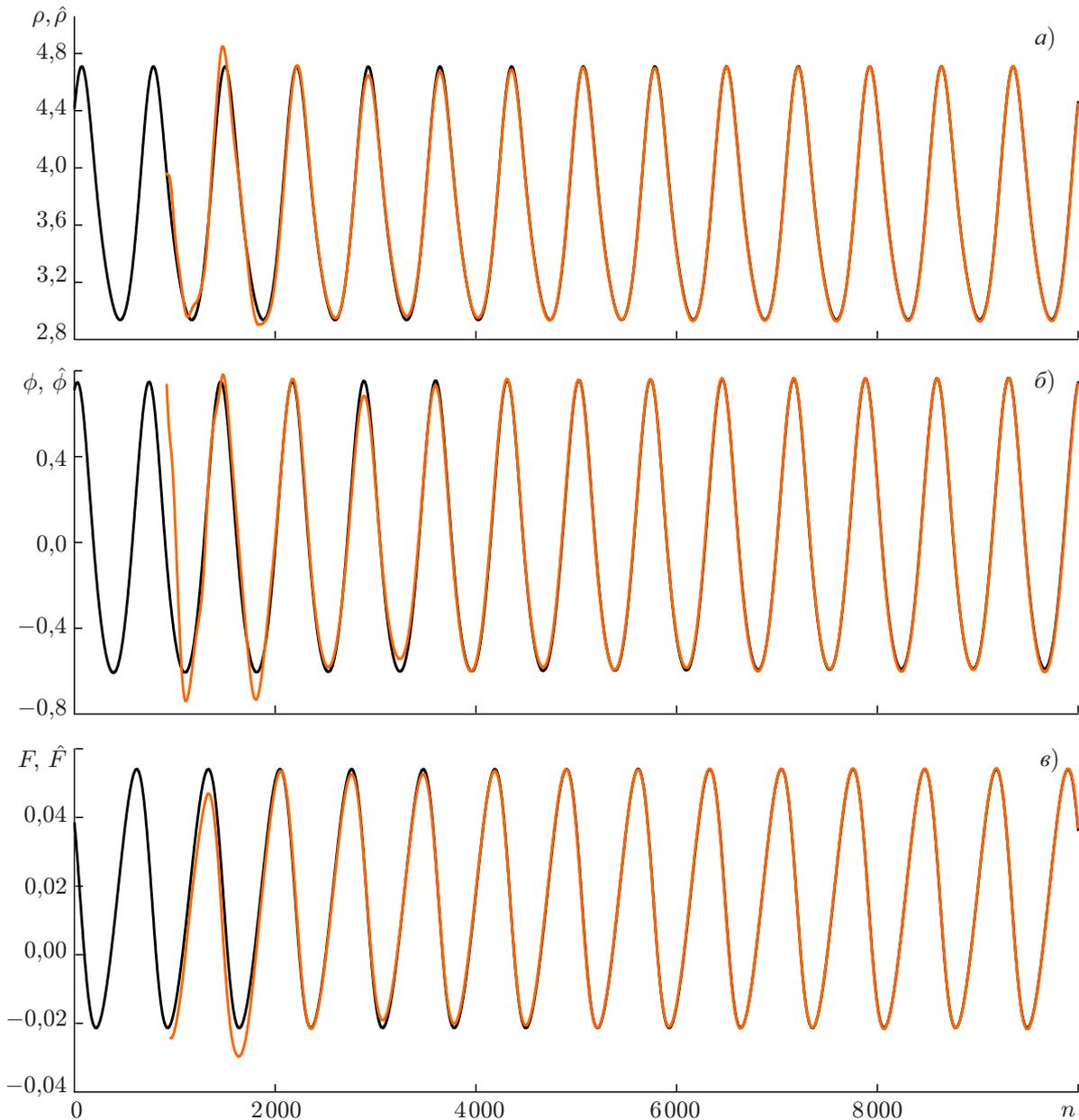


Рис. 2. Временные ряды переменных в периодическом режиме, полученные численным решением системы (1) при $\tau = 46$ (чёрный цвет) и в результате реконструкции по временному ряду (оранжевый цвет)

Минимум целевой функции (3) достигается при начальной фазе $\varphi_0 = \pi/4$ функции (9), аппроксимирующей переменную ϕ на интервале времени $n = \theta + 2$. Временные реализации восстановленных переменных $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ и \hat{F} показаны на рис. 2 серым цветом на переднем плане. Они построены, начиная с дискретного времени $n = \theta + 2$, и почти совпадают с реализациями ρ , ϕ и F , полученными численным решением системы (1). Отметим, что из временных рядов переменных ϕ и $\hat{\phi}$ на рис. 2б мы удалили линейный тренд.

Восстановленные в результате применения метода значения параметров $\hat{P} = 14,51$ и $\hat{\eta} = 0,01999$ очень близки к истинным значениям $P = 14,5$ и $\eta = 0,02$. Можно полагать, что эти результаты соответствуют глобальному минимуму целевой функции (3), хотя строго показать

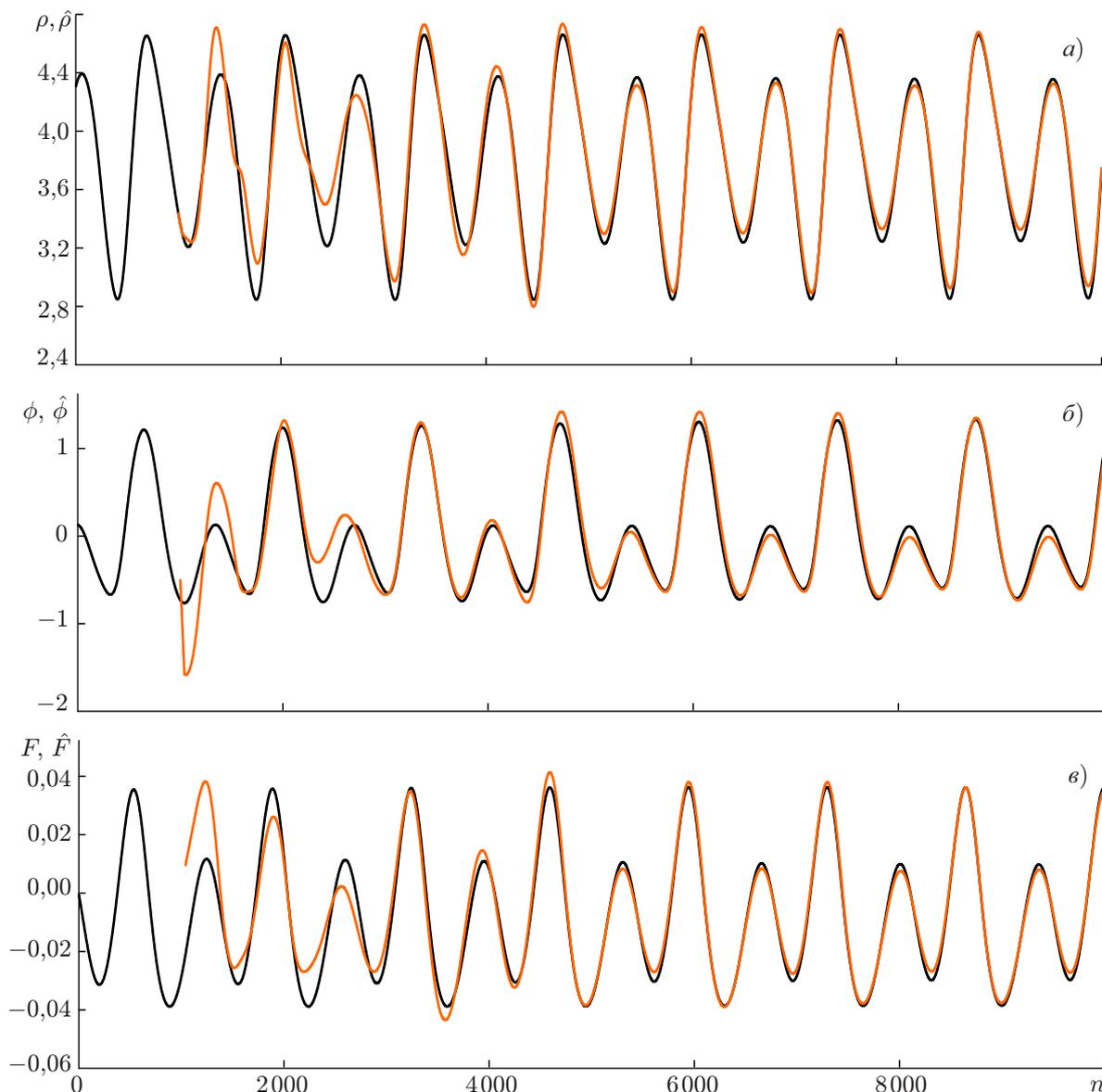


Рис. 3. Временные ряды переменных в периодическом режиме, полученные численным решением системы (1) при $\tau = 50$ (чёрный цвет) и в результате реконструкции по временному ряду (оранжевый цвет)

это нельзя в силу специфики используемого подхода. С практической точки зрения, однако, нет разницы, сойдётся алгоритм в глобальный минимум или в один из локальных, но дающий достаточно близкие (при заданной точности) значения искомым параметрам. Здесь и далее было использовано значение $L = 9$, однако реконструкция проводилась также и для других L : при $L = 7$ и $L = 13$ были получены в целом близкие результаты, при $L = 5$ и $L = 17$ методика существенно чаще достигала локальных минимумов, что может быть объяснено недостаточной точностью аппроксимации в первом случае и слишком большим числом K аргументов целевой функции во втором.

Качественно похожие результаты мы получили для случая, когда система (1) демонстрирует периодические колебания с периодом два. На рис. 3 представлены временные реализации переменных, полученные численным решением системы уравнений (1) при $\tau = 50$, и переменных,

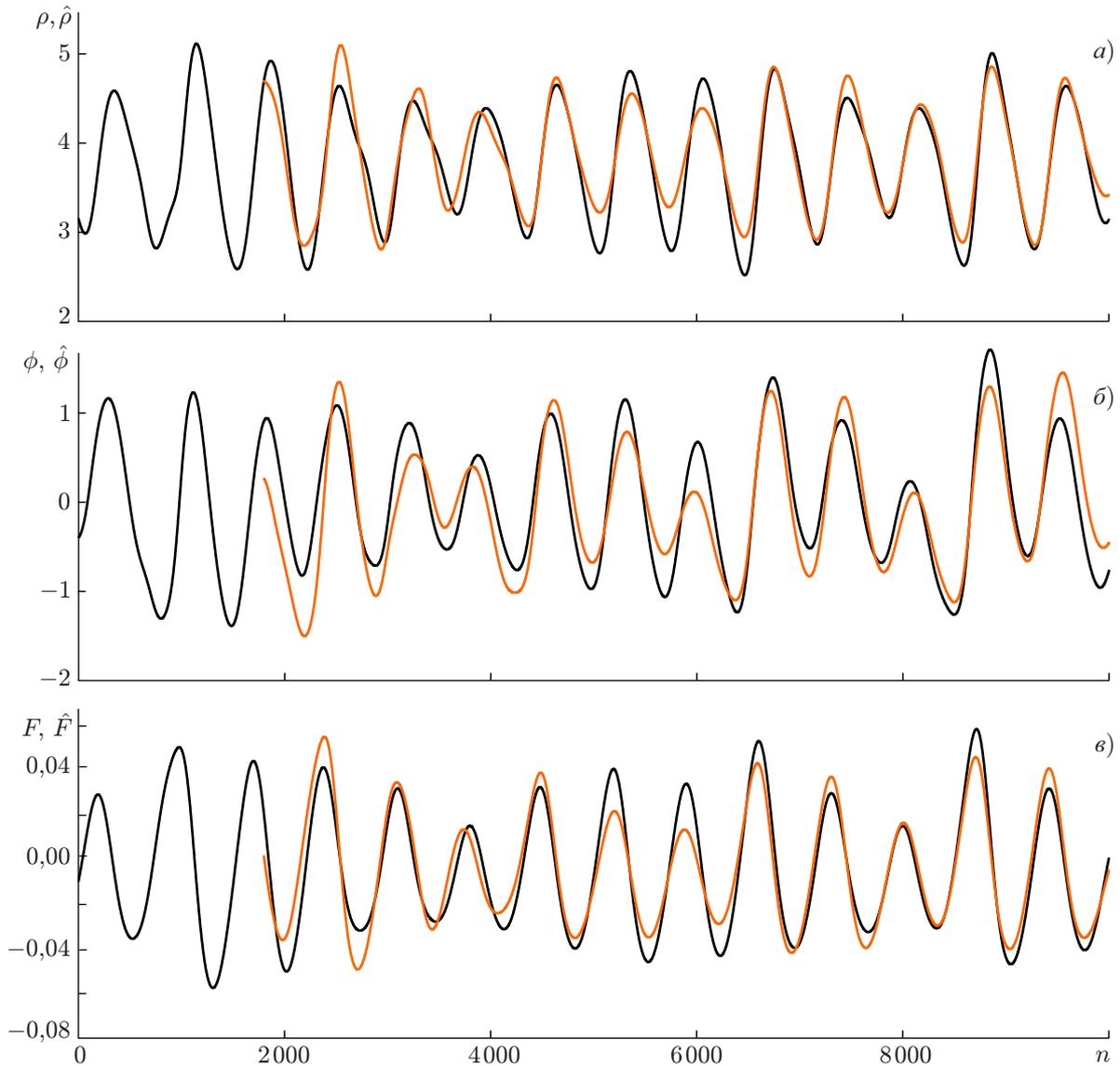


Рис. 4. Временные ряды переменных в хаотическом режиме, полученные численным решением системы (1) при $\tau = 90$ (чёрный цвет) и в результате реконструкции по временному ряду (оранжевый цвет)

восстановленных по временному ряду $\rho(t)$ при $\tilde{P} = 14,3$, $\tilde{\eta} = 0,0195$, $L = 9$, $A = 1$, $\omega = 0,199$ рад и $\varphi_0 = 3\pi/4$. Динамику скрытых переменных удаётся реконструировать достаточно точно. Восстановленные значения параметров $\hat{P} = 14,49$ и $\hat{\eta} = 0,0201$ близки к истинным значениям P и η .

Наконец, применим метод для реконструкции системы (1) по хаотическому временному ряду переменной $\rho(t)$. Для данного ряда была получена оценка $\lambda_1 \approx 7 \cdot 10^{-3}$ методом [30], удовлетворяющая условию (10) при используемой длине ряда. На рис. 4 построены временные реализации переменных, полученные численным решением системы уравнений (1) при $\tau = 90$ и переменных, восстановленных при $\tilde{P} = 14,3$, $\tilde{\eta} = 0,0190$, $L = 9$, $A = 1$, $\omega = 0,168$ рад, $\varphi_0 = 3\pi/2$. Как видно из рисунка, качество реконструкции скрытых переменных оказывается несколько хуже, чем в периодических режимах. Восстановленные значения параметров $\hat{P} = 14,48$ и $\hat{\eta} = 0,0198$ достаточно близки к истинным значениям P и η . Проведённые исследования показывают, что результат реконструкции может зависеть от величины L . Для рассмотренных колебательных

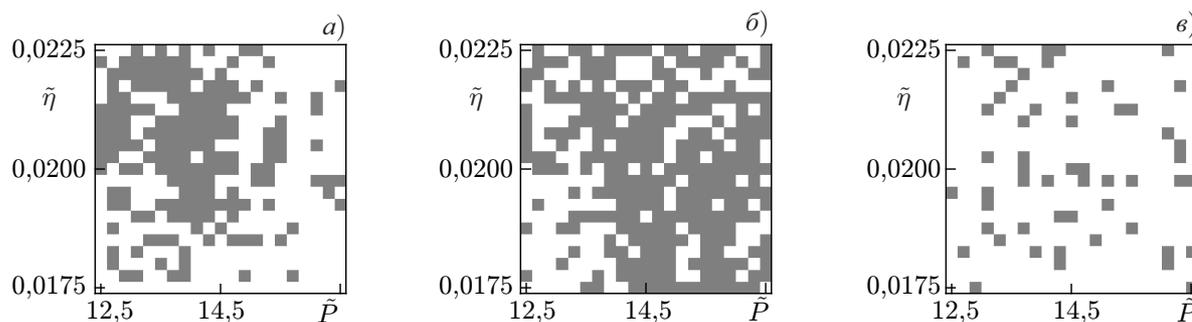


Рис. 5. Зависимость точности восстановления параметров P и η от стартовых догадок \tilde{P} и $\tilde{\eta}$ для колебательных режимов лазера при $\tau = 46$ (а), $\tau = 50$ (б) и $\tau = 90$ (в). Серым цветом показаны значения \tilde{P} и $\tilde{\eta}$, при которых ошибка восстановления P и η не превышает 5 %. Белый цвет соответствует значениям \tilde{P} и $\tilde{\eta}$, при которых ошибка реконструкции более 5 %

режимов точность восстановления параметров была выше при $L = 9$. На практике полезно варьировать L в небольших пределах, как это предложено выше. Это возможно, т. к. общий объем вычислений не является очень большим: сходимость достигается за $30 \div 50$ шагов алгоритма для простого периодического режима, $25 \div 45$ шагов для сложного периодического режима и $20 \div 35$ шагов — для хаотического. При этом более высокая скорость сходимости для более сложных режимов, по-видимому, обусловлена большей чувствительностью к начальным условиям.

Как уже было отмечено в предыдущем разделе, качество реконструкции динамической системы зависит от того, насколько удачно выбраны стартовые догадки для неизвестных параметров. Мы провели реконструкцию системы (1) при различном выборе стартовых догадок для параметров P и η , перебираемых в диапазонах $\tilde{P} \in [12,5; 16,5]$ и $\tilde{\eta} \in [0,0175; 0,0225]$ с шагом 0,2 и 0,00025 соответственно. Поскольку по временному ряду колебаний наблюдаемой переменной можно оценить тип наблюдаемого режима, а также в постановке задачи имеется дополнительная информация о структуре уравнений системы и значениях некоторых параметров, например τ , оказывается возможно сузить область стартовых догадок для параметров P и η до указанной выше. Полученные результаты представлены на рис. 5 для трёх различных колебательных режимов, наблюдаемых при $\tau = 46$, $\tau = 50$ и $\tau = 90$. Если при выбранных значениях \tilde{P} и $\tilde{\eta}$ ошибка восстановления каждого из параметров P и η не превышала 5 %, то соответствующая клетка закрашивалась серым цветом. В противном случае клетка имела белый цвет. Например, клетка в центре рисунка соответствует точному выбору стартовых догадок ($\tilde{P} = P = 14,5$ и $\tilde{\eta} = \eta = 0,02$), при котором реконструкция успешна. Такая клетка покрашена в серый цвет.

Вообще говоря, не все результаты реконструкции, соответствующие серым клеткам, одинаковы: часть из них (от 25 % до 50 % в зависимости от режима и стартовых догадок для скрытых переменных) соответствует попаданию в глобальный минимум (как результаты на рис. 2–4), а другая часть отвечает попаданию в локальные минимумы, дающие тоже приемлемые результаты. Для периодических режимов провести границу между такими ситуациями не всегда просто при небольшой длине ряда, т. к. при очень близких значениях параметров, соответствующих локальному и глобальному минимумам, временные ряды при значениях параметров из обоих минимумов очень сходны по амплитуде, частоте и форме. Для хаотического режима ошибки в значениях параметров более существенны и приводят к тому, что попадание в большинство локальных минимумов приводит к низкому качеству реконструкции. Как следствие, общее число серых клеток меньше, а доля попаданий в глобальный экстремум среди них составляет около 50 %.

Следует отметить, что результаты реконструкции в периодических режимах слабо зависят от начальных условий для переменной ϕ , поскольку, как уже было показано выше, для неё исполь-

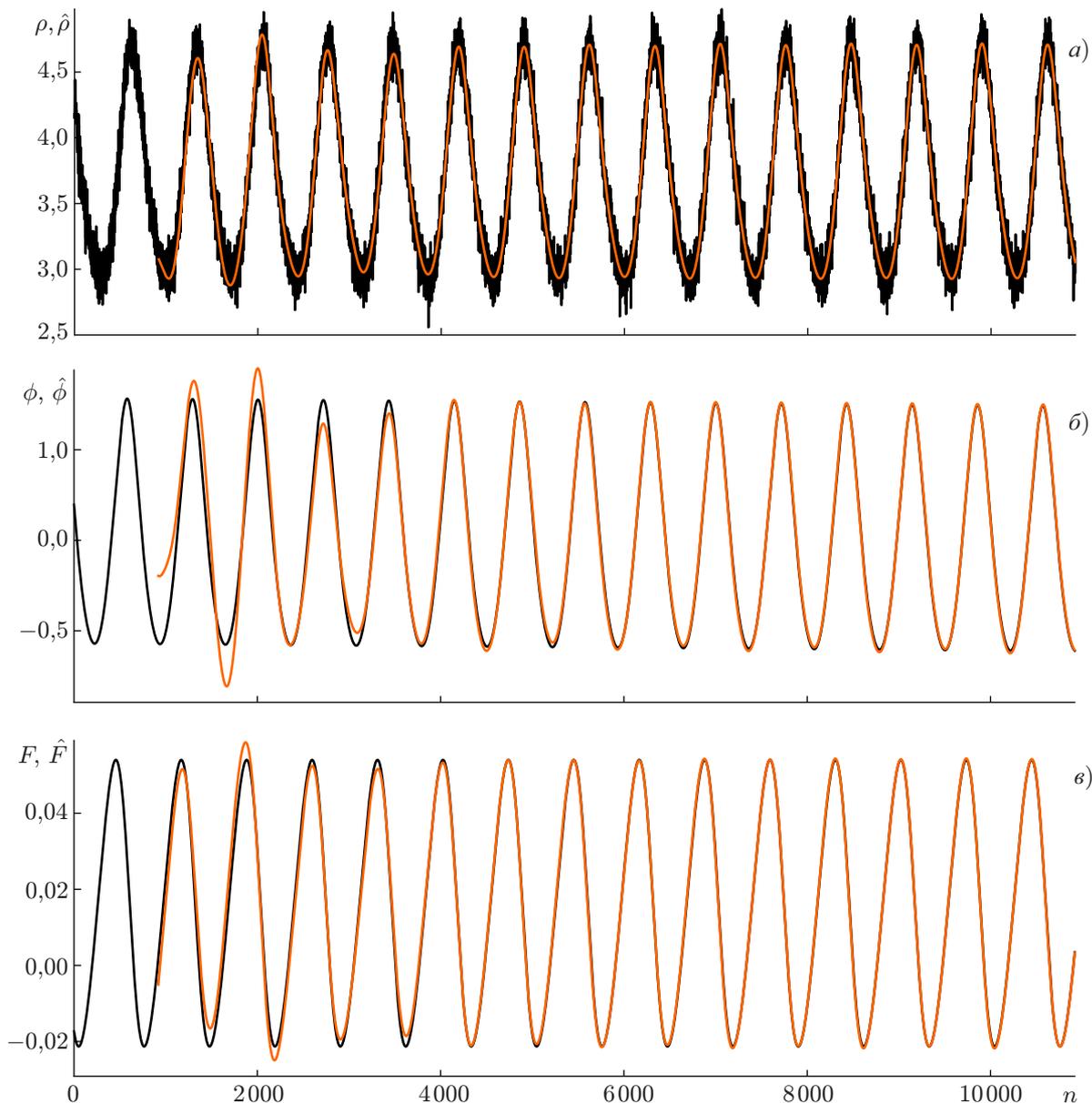


Рис. 6. Временные ряды переменных в периодическом режиме, полученные численным решением системы (1) при $\tau = 46$ (чёрный цвет) с измерительным шумом со среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\text{noise}} = 0,1$ и в результате реконструкции по временному ряду (оранжевый цвет)

зуется периодическая аппроксимация с подбором начальной фазы с довольно малым шагом, $\pi/8$. В хаотическом режиме аппроксимация работает существенно хуже, поэтому вероятность угадать хорошие стартовые догадки для скрытых переменных заметно ниже, что можно видеть и по результатам реконструкции на рис. 5. При этом в хаотическом режиме, по-видимому, имеется сильная фрагментация и сложная геометрия областей сходимости глобального и локальных минимумов, так что представленная на рис. 5в картина будет сильно меняться при других стартовых догадках для начальных условий и других начальных условиях (если использовать другую реализацию). Для переменной F стартовая догадка должна быть выбрана достаточно близко к истинному значению (с точностью $\pm 0,02$ или $\pm 0,03$). Поскольку амплитуда изменения величины F различна в разных режимах, это означает, что нужно перебирать от 3 до 8 различных

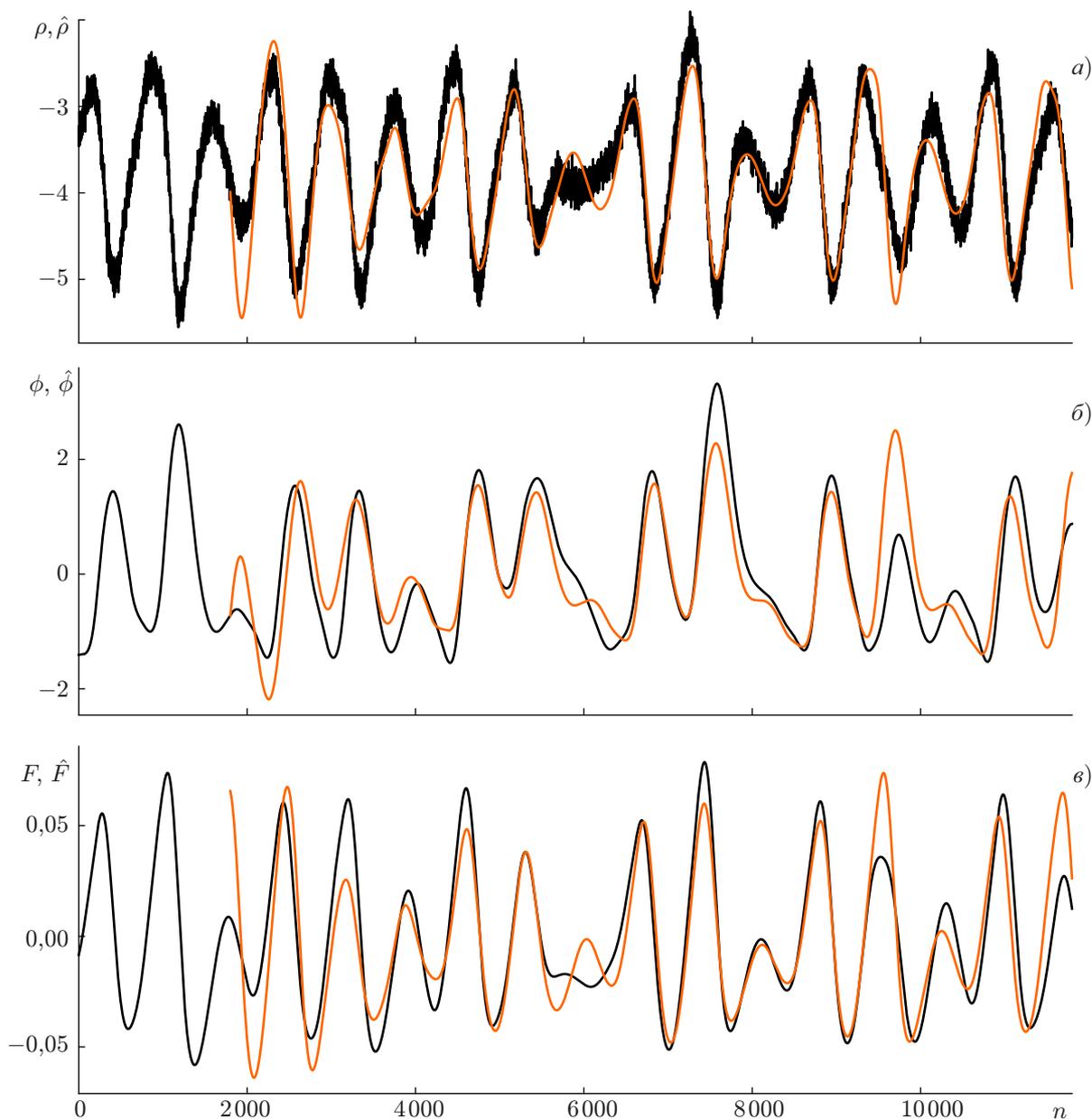


Рис. 7. Временные ряды переменных в хаотическом режиме, полученные численным решением системы (1) при $\tau = 90$ (чёрный цвет) с измерительным шумом со среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\text{noise}} = 0,1$, и в результате реконструкции по временному ряду (оранжевый цвет)

вариантов стартовых догадок для F , чтобы гарантировать успех и получить результаты, близкие к показанным на рис. 2–5.

Из рис. 5 видно, что для хаотического режима область стартовых догадок, обеспечивающая хорошее качество реконструкции, заметно меньше, чем для периодических режимов. Максимальные отклонения рассмотренных нами стартовых догадок от истинных значений параметров P и η составляют примерно $\pm 13\%$. При этом количество серых клеток равняется 39 %, 61 % и 12 % от общего количества клеток на рис. 5а, б и в соответственно.

В реальности измеренные временные ряды могут быть зашумлены. Основное преимущество предлагаемого подхода перед другими методами, например предложенными в [17, 25], состоит

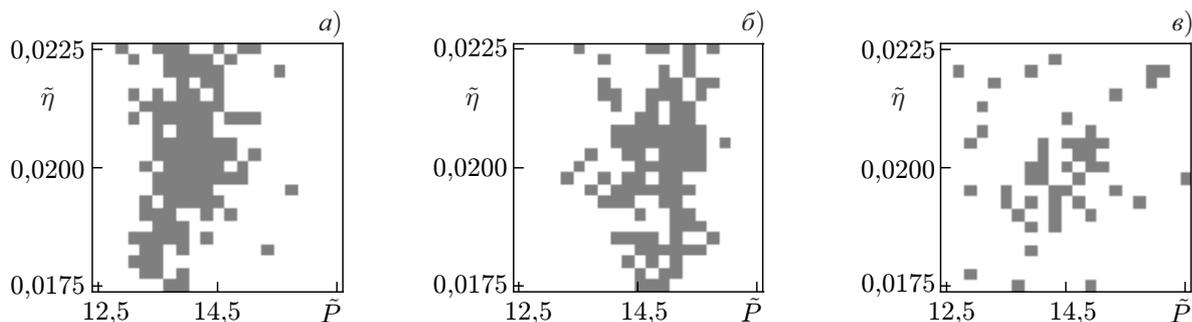


Рис. 8. Зависимость точности восстановления параметров P и η от стартовых догадок \tilde{P} и $\tilde{\eta}$ для колебательных режимов лазера при $\tau = 46$ (а), $\tau = 50$ (б) и $\tau = 90$ (в) при реконструкции по зашумлённым рядам с $\sigma_{\text{noise}} = 0,1$. Серым цветом показаны значения \tilde{P} и $\tilde{\eta}$, при которых ошибка восстановления P и η не превышает 5 %. Белый цвет соответствует значениям \tilde{P} и $\tilde{\eta}$, при которых ошибка реконструкции более 5 %

в том, что нет необходимости численно рассчитывать производные. Для проверки работоспособности подхода 16-процентный по среднеквадратичному отклонению шум был добавлен к временным рядам $\rho(t)$ во всех трёх режимах, рассмотренных выше: при $\tau = 46$, $\tau = 50$ и $\tau = 90$. На рис. 6 для периодического режима с $\tau = 46$ и на рис. 7 для хаотического режима с $\tau = 90$ приведены чёрным цветом на заднем плане временные реализации истинных переменных и оранжевым цветом на переднем плане временные реализации восстановленных переменных.

То, что метод оказался устойчив к достаточно большим измерительным шумам и его результаты качественно не отличаются от полученных в отсутствие шума, можно видеть при сопоставлении рис. 2 и 6, а также рис. 4 и 7 соответственно. Ошибки в определении параметров при наличии шума, конечно, возросли: $\hat{P} = 14,481$ и $\hat{\eta} = 0,02005$ при $\tau = 46$ и $\hat{P} = 14,446$ и $\hat{\eta} = 0,02025$ при $\tau = 90$.

Чтобы и при наличии измерительного шума оценить сходимость метода и шансы получить приемлемые результаты при различных стартовых догадках для параметров P и η , реконструкция была проведена для различных \tilde{P} и $\tilde{\eta}$, изменяющихся в тех же пределах, что и в случае без шума (см. рис. 8). При наличии шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\text{noise}} = 0,1$ (16 % от среднеквадратичного отклонения сигнала) доля «удачных» стартовых догадок, для которых итоговое отклонение по обоим параметрам оказалось не более 5 %, составило 26 % для простого периодического режима при $\tau = 46$, 23 % для периодического режима периода 2 при $\tau = 50$ и 11 % для хаотического режима при $\tau = 90$. Таким образом, для периодических режимов результаты реконструкции значительно ухудшились по сравнению со случаем отсутствия шума, а в хаотическом режиме — почти не изменились. Такое поведение, возможно, связано с эффективным использованием периодической аппроксимации для начальных условий скрытой переменной ϕ в регулярных режимах, которая стала хуже работать при наличии шума, потому что исходный ряд стал не вполне периодическим.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами разработан метод реконструкции систем с запаздывающей обратной связью при наличии скрытых переменных, основанный на методе начального условия, модифицированном для случая скрытых переменных, имеющих задержку. Вместо задания стартовых догадок для скрытой переменной с запаздыванием на всём интервале времени задержки τ мы задаём лишь небольшое число стартовых догадок на времени τ , а остальные начальные условия для скрытой пере-

менной находим с помощью интерполяции траектории кубическим сплайном. В качестве целевой функции метода использован суммарный квадрат отклонения модельной реализации от наблюдаемой. В результате минимизации целевой функции мы получаем оценку неизвестных параметров и реконструируем временные ряды скрытых переменных.

Предложенный метод применён для реконструкции модельной системы Ланга—Кобаяши, описываемой тремя дифференциальными уравнениями (два из которых имеют запаздывание), по скалярной временной реализации как хаотических, так и периодических колебаний. Исследовано качество реконструкции системы при различной точности задания стартовых догадок для неизвестных параметров и скрытых переменных. Установлено, что для хаотического режима область стартовых догадок, обеспечивающая высокое качество реконструкции, существенно меньше, чем для периодических режимов. Также показано, что предложенный подход обеспечивает широкую область сходимости и хорошее качество оценок параметров и реконструкции рядов скрытых переменных даже при наличии существенного (например, равного 16 % от среднеквадратичного отклонения сигнала) аддитивного измерительного шума.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-02-00071 (разработка метода реконструкции), и в рамках государственного задания (исследование колебательных режимов). Авторы выражают признательность Т. М. Медведевой за помощь в расчёте старшего ляпуновского показателя по временным рядам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baake E., Baake M., Bock H. G., Briggs K. M. // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 45, No. 8. P. 5 524.
2. Gouesbet G., Maquet J. // *Physica D*. 1992. V. 58, No. 14. P. 202.
3. Павлов А. Н., Янсон Н. Б., Анищенко В. С. // *Радиотехника и электроника*. 1999. Т. 44, № 9. С. 1075.
4. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
5. Bezruchko B., Smirnov D., Sysoev I. // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006. V. 29, No. 1. P. 82.
6. Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z. // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 114, No. 2. Art. no. 028701.
7. Gavrilov A., Mukhin D., Loskutov E., et al. // *Chaos*. 2016. V. 26, No. 12. Art. no. 123101.
8. Cestnik R., Rosenblum M. // *Phys. Rev. E*. 2017. V. 96, No. 1. Art. no. 012209.
9. Pikovsky A. // *Phys. Lett. A*. 2018. V. 382, No. 4. P. 147.
10. Carroll T. L. // *Chaos*. 2018. V. 28, No. 10. Art. no. 103117.
11. Mangiarotti S., Huc M. // *Chaos*. 2019. V. 29, No. 2. Art. no. 023133.
12. Büchner M. J., Popp M., Meyer Th., et al. // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54, No. 4. P. 3082.
13. Voss H., Kurths J. // *Phys. Lett. A*. 1997. V. 234, No. 5. P. 336.
14. Büchner M. J., Ciofini M., Giaquinta A., et al. // *Eur. Phys. J. D*. 2000. V. 10, No. 2. P. 165.
15. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Караваев А. С., Безручко Б. П. // *Журн. эксперим. теор. физики*. 2005. Т. 127, № 3. С. 515.
16. Yu D., Frasca M., Liu F. // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 78, No. 4. Art. no. 046209.
17. Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 78, No. 6. Art. no. 066207.
18. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I. // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 80, No. 6. Art. no. 066206.
19. Zunino L., Soriano M. C., Fischer I., et al. // *Phys. Rev. E*. 2010. V. 82, No. 4. Art. no. 046212.
20. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Khorev V. S. // *Phys. Lett. A*. 2013. V. 377, No. 43. P. 3 106.
21. Zhu S., Gan L. // *Phys. Rev. E*. 2016. V. 94, No. 5. Art. no. 052210.

22. Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 84.
23. Zhu X. H., Cheng M. F., Deng L., et al. // *Frontiers of Optoelectronics*. 2017. V. 10, No. 4. P. 378.
24. Alsing P. M., Kovanis V., Gavrielides A., Erneux T. // *Phys. Rev. A*. 1996. V. 53, No. 6. P. 4429.
25. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Корюкин И. В. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 21. С. 79.
26. Rontani D., Locquet A., Sciamanna M., et al. // *IEEE J. Quantum Electron.* 2009. V. 45, No. 7. P. 879.
27. Хорев В. С., Прохоров М. Д., Пономаренко В. И. // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 3. С. 68.
28. Bard Y. *Nonlinear parameter estimation*. New York: Academic Press, 1974. 341 p.
29. Жиглявский А. А., Жилинкас А. Г. *Методы поиска глобального экстремума*. М.: Наука, Физматлит, 1991. 248 с.
30. Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. V. 65, Nos. 1–2. P. 117.

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.; принята в печать 23 сентября 2019 г.

RECONSTRUCTION OF SYSTEMS WITH DELAYS AND HIDDEN VARIABLES

V. S. Khorev, I. V. Sysoev, V. I. Ponomarenko, B. P. Bezruchko, and M. D. Prokhorov

We propose a method of reconstruction of dynamic systems with delayed feedback, which have several hidden variables including a hidden variable with a time delay. The method is based on the original approach allowing one to significantly reduce the number of the starting guesses for a hidden variable with a delay. The method is used for reconstructing the model system of the Lang-Kobayashi equations, which describes the dynamics of a single-mode semiconductor laser with the time-delayed feedback, using periodic and chaotic time series. The dependence of the system-reconstruction quality on the accuracy of specifying the starting guesses for the unknown parameters and hidden variables is studied.