

УДК 542.34

## ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЦИФРОВОЙ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ

А. Г. Хоботов, А. И. Хилько, А. А. Тельных\*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе исследуются проблемы обработки сигналов сложной природы в условиях помех, возникающие из-за недостаточного динамического диапазона этих сигналов при их цифровом представлении. Рассматриваются информационные критерии квантования амплитуды сложных сигналов. Формулируется информационно-аналитический подход к задаче кодирования амплитуд сигналов, ориентированный на извлечение максимального количества информации при минимальном объёме получаемого кода. Приводятся конкретные результаты использования такого подхода.

### ВВЕДЕНИЕ

Известны подходы к квантованию амплитуд сигналов, при которых минимизируется ошибка восстановления сигнала из массива сигнальных отсчётов его амплитуды (т. е. минимизируются искажения проквантованного сигнала) [1]. Но в современных системах цифровой обработки сигналов существует ряд задач, не требующих точного количественного измерения характеристик исследуемых сигналов и тем более их восстановления. Существенной, однако, является регистрация характерных особенностей формы сигнала для дальнейшего анализа. При этом желательно, чтобы выходной цифровой код был «минимально избыточным» при сохранении необходимого информационного содержания. Именно этот подход и излагается в данной работе. Подобные задачи становятся особенно актуальными при проектировании систем регистрации сигналов различной природы, например видеосигналов и локационных сигналов, либо сигналов в системах медицинской диагностики. Эта задача также актуальна при разработке устройств регистрации сигналов мозга в когнитивных исследованиях для оценки информационных характеристик таких сигналов.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ «ИНФОРМАЦИЯ»

Понятие «информация» имеет большое количество толкований в различных работах в сфере общей теории информации [2]. Мы будем использовать трактовку понятия информации по Шеннону, при которой определение количественных характеристик информации основано на следующих соображениях [3, 4]. Ключевым понятием, позволяющим отличать «малоинформационные» события от событий с большим информационным содержанием, является не редкость события, а его неожиданность. Поэтому маловероятные события, в тех случаях, когда они происходят, несут больше информации, чем ожидаемые события, и информационную меру можно определить как  $H(M) = -\log[P(M)]$ , где  $P(M)$  — вероятность реализации события  $M$ . В нашем случае под событием будем понимать получение конкретного числового значения отсчёта сигнала. Неопределённость событий и, следовательно, информация, получаемая после их реализации, равна среднему значению функции  $\log[1/P(M_i)]$ . Таким образом, меру неопределённости событий можно определить как  $H(M) = -\sum_i P(M_i) \log_2[P(M_i)]$  бит (как правило, основание логарифма принимают равным 2) [3]. По аналогии с физической энтропией Гибса эта мера называется

\* telnkha@yahoo.com

информационной (шенноновской) энтропией  $H$ . Информационная энтропия  $H$  и физическая энтропия Гиббса  $S = -k_b \ln 2 [\sum_i P(M_i) \times \ln P(M_i)]$  связаны через коэффициент  $k_b \ln 2 \approx 1,32 \times 10^{-23}$  Дж/Кбит, где  $k_b$  — постоянная Больцмана [5]. Этот коэффициент иногда трактуется как минимальные (предельные) энергетические затраты на получение информации. Разность между априорной и апостериорной энтропией называется количеством информации  $I = H^{\text{apr}} - H^{\text{apost}}$ , или Шенноновской информационной мерой [2]. Это мера характеризует устранение неопределённости исследуемого процесса или состояния объекта или системы в результате наступления некоторого события, определившего состояние исследуемого объекта или значения параметров, характеризующих это состояние.

Количество информации ансамбля полностью неопределённых событий, определяемых несколькими независимыми источниками, равно суммарной энтропии этих источников, т. к. после полного определения состояния всех источников суммарная энтропия их равна 0:

$$I(M) = \left\{ - \sum_i P(M_i^{\text{apr}}) \log_2 [P(M_i^{\text{apr}})] \right\} - \left\{ - \sum_i P(M_i^{\text{apost}}) \log_2 [P(M_i^{\text{apost}})] \right\} = H(M^{\text{apr}}). \quad (1)$$

$$\parallel$$

$$0$$

Здесь  $I(M)$  трактуется как мера уменьшения неопределённости, связанной с наступлением некоторого события. Строго говоря,  $M$  в этом случае и далее не является аргументом функции, а представляет собой скорее ссылку на случайную переменную  $M$  [5].

## 2. ИНФОРМАЦИОННАЯ ЭНТРОПИЯ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ

Энтропия непрерывного распределения определяется исходя из выражения дискретных вероятностей через плотность непрерывного распределения  $f(x)$ . Определим  $P_i = f(x_i) \Delta x_i$  и, подставив правую часть в формулу для энтропии, получим  $H^c[f(x)] = -\sum_{i=1}^N [f(x_i) \Delta x_i] \{\log_2 [f(x_i) \Delta x_i]\}$ . Проведя некоторые преобразования и перейдя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , получим

$$H^c[f(x)] = - \int f(x) \log_2 f(x) dx + \left[ \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (-\log_2 \Delta x_i) \right] \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$dH \qquad \qquad \qquad \infty$$

Это означает, что энтропия непрерывного распределения бесконечно большая, что достаточно очевидно: в системе с бесконечно большим числом состояний требуется бесконечное число «битов» для их представления [5]. Величину  $dH[f(x)] = - \int f(x) \log_2 f(x) dx$  называют дифференциальной энтропией. В силу дискретности самой природы информационной энтропии ясного физического смысла данная величина не имеет, но её принято использовать для аналитических оценок,

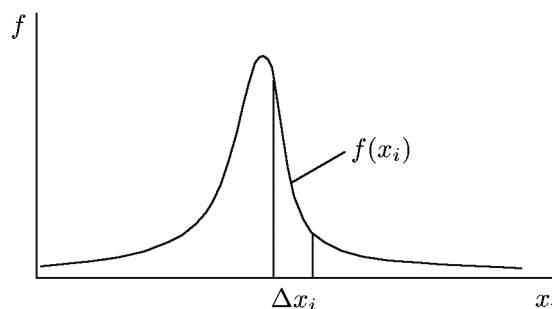


Рис. 1. Функция плотности некоторого непрерывного распределения вероятностей  $f(x)$

имея в виду, что второе слагаемое в выражении (2) не зависит от вида  $f(x)$  и равномошно для любых распределений случайной величины  $f(x)$ .

Дифференциальная энтропия обладает следующими свойствами:

- 1)  $dH[f(x) + c] = dH[f(x)]$ , где  $c$  — константа;
- 2)  $dH[af(x)] = dH[f(x)] + \log_2 |a|$ , где  $a$  — масштабирующий множитель [6].

### 3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНТРОПИЕЙ

Определим, какой из законов распределения  $f(x)$  и при каких условиях обладает максимальной дифференциальной энтропией.

Найдём функцию  $f(x)$ , с заданной дисперсией, определённую на интервале  $[-\infty, +\infty]$ , при которой дифференциальная энтропия  $dH$  достигает максимума. Это задача максимизации выражения  $dH^{\max}[f(x)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx$  относительно произвольных вариаций функции  $f(x)$ . В работе [5] показано, что её решение достигается, когда функция плотности имеет вид  $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$ , т. е. когда она гауссовская и соответствующее максимальное значение дифференциальной энтропии равно

$$dH = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi e\sigma^2) = \ln(\sqrt{2\pi} e\sigma) \approx \ln(4,133\sigma). \quad (3)$$

Найдём теперь функцию  $\varphi(x)$ , определённую на интервале  $[0, L]$ , максимизирующую значение дифференциальной энтропии (3) при условии отсутствия каких либо ограничений на её моменты. Дифференциальная энтропия в этом случае запишется как  $dH^{\max U} = - \int_0^L \varphi(x) \log_2 \varphi(x) dx$ . Вводя необходимое условие нормировки  $\int_0^L \varphi(x) dx = 1$  и составляя уравнение Эйлера, имеем  $-\log_2 \varphi(x) - 1/(\ln 2) + \lambda = 0$ , откуда  $\varphi(x) = 2^{\lambda + \ln 2}$ . Здесь  $\lambda$  находится из уравнения  $\int_0^L 2^{\lambda + \ln 2} dx = 1$ ,  $\lambda = \log_2(1/L) - \ln 2$ , что приводит к  $\varphi(x) = 1/L$ , т. е. к равномерному распределению. Соответственно максимальное значение энтропии

$$dH^{\max U} = - \int_0^L \varphi(x) \log_2[\varphi(x)] dx = - \int_0^L \frac{1}{L} \log_2\left(\frac{1}{L}\right) dx = \log_2(L). \quad (4)$$

Очевидно, что при бесконечных пределах ( $L = \infty$ ) энтропия равномерного распределения бесконечна. Но, если сравнивать закон нормального распределения и равномерный закон распределения при конечном диапазоне распределения  $L$ , то очевидно, что при  $L > (\sqrt{2\pi e} \sigma)^{\ln 2}$  дифференциальная энтропия ограниченного равномерного распределения становится больше дифференциальной энтропии нормального распределения с дисперсией  $\sigma$ .

### 4. РЕГИСТРАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХ

Регистрируемый непрерывный сигнал в этом случае заменяется гипервектором в  $d$ -мерном евклидовом пространстве ( $d = 2WT$ ). Это означает [5], что сигнал источника  $x(t)$  заменён гипервектором  $\mathbf{X}$  с координатами  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2Wt}$ , которые равны амплитудам сигнала  $x(t)$  в моменты времени  $0, 1/(2W), 2/(2W), \dots, 2WT/(2W) = t$ . Рассмотрим теперь шум в приёмном тракте  $n(t)$ , который тоже дискретизируем с помощью выборок, и получим гипервектор  $\mathbf{N}$

в том же  $2WT$ -мерном пространстве. Очевидное различие состоит в том, что выборочные значения шума представляют собой не детерминистические координаты, а одномерные функции плотности вероятности. Гипервектор шума играет роль вектора ошибки в пространстве состояний. Принятый сигнал  $y(t)$  тоже можно представить гипервектором  $\mathbf{Y}$  и, если возможно, считать шум аддитивным, иными словами влияющим на амплитуду сигнала, а не на его фазу, то мы будем регистрировать сигнал  $y(t) = x(t) + n(t)$ . Количество регистрируемой информации в этом случае запишется просто как разность между начальной неопределённостью  $H(\mathbf{X})$  и конечной неопределённостью  $H(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$ :  $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) - H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}/\mathbf{X})$ . Полагая шум статистически независимым от сигнала, можно записать  $H(\mathbf{Y}) = H(\mathbf{X}) + H(\mathbf{N})$ . Кроме того, считаем регистрацию сигнала безошибочной, т. е. полагаем, что  $H(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = 0$ . Тогда, после некоторых преобразований, получим  $H(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = H(\mathbf{N})$ , откуда следует

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{N}), \quad (5)$$

где  $H(\mathbf{N})$  — энтропия  $2WT$ -мерного случайного процесса:  $H(\mathbf{N}) = H(N_0, N_1, \dots, N_{2WT})$ .

В общем случае справедливо неравенство  $H(N_0, N_1, \dots, N_{2WT}) \leq \sum_{i=0}^{2WT} H(N_i)$ , которое при независимых  $N_i$  переходит в равенство  $H(N_0, N_1, \dots, N_{2WT}) = \sum_{i=0}^{2WT} H(N_i)$ . Из стохастической независимости одномерных шумовых компонент следует, что автокорреляционная функция шума должна обращаться в 0 в моменты времени  $\tau = 0; 1/(2W), 2/(2W); \dots; T$ . Такая автокорреляционная функция для плотности вероятности нормального закона распределения имеет вид  $B(\tau) = \sigma^2 \sin(W\tau)/(W\tau)$ . Взяв преобразование Фурье от  $B(\tau)$  и получив спектр шума, можно обнаружить, что он должен быть плоским при всех частотах  $W$ . Отсюда следует, что наихудшим (т. е. максимально искажающим сигнал) из возможных шумов является шум с плоским спектром, компоненты которого имеют функцию плотности вероятности с максимальной энтропией (так называемый белый шум) [5]. В реальных условиях сигналы могут быть зарегистрированы на ограниченном диапазоне, поэтому в расчётах можно использовать шум с равномерным законом распределения в качестве белого шума. При нормализации шума, например в процедуре «отбеливания» для оценок амплитуды шумовой составляющей, нормальный шум можно заменить равномерным с учётом приведённого выше соотношения, связывающего дисперсию нормального шума с амплитудным диапазоном равномерного шума.

#### 4.1. Определение оптимального количества уровней квантования сигналов

Оптимальное количество уровней квантования определяется из следующих соображений:

- 1) необходимо избежать информационных потерь на квантование;
- 2) необходимо максимизировать количество информации в проквантованном сигнале.

Из соотношения (5) понятно, что наибольшие информационные потери (наименьшее количество регистрируемой информации) реализуются тогда, когда  $H(\mathbf{N}) \rightarrow \max$ , но выше мы уже определили виды функций плотности вероятности с максимальной дифференциальной энтропией. Они должны представлять собой либо нормальный закон распределения с заданной  $\sigma$ , либо равномерный с параметром  $L$ .

Отсюда при равномерном распределении сигнала и шума

$$I_{\max}^{\text{uniform}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \log_2(L_Y/L_N),$$

при нормальном распределении сигнала и шума

$$I_{\max}^{\text{gauss}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \ln_2(\sigma_Y^{\text{gauss}}/\sigma_N^{\text{gauss}}).$$

Считая  $H(\mathbf{N}) \rightarrow \text{const}$ , максимум  $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  получим при

$$H(\mathbf{Y}) \rightarrow \max.$$

Из выпуклости функции энтропии следует, что для неё справедлива обобщённая теорема о среднем. Следовательно, можно записать:

$$\frac{-\sum_{i=1}^m \left[ \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy \times \log_2 \left( \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy \right) \right]}{m} \leq \frac{-\sum_{i=1}^m \left[ \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy \right]}{m} \log_2 \frac{\sum_{i=1}^m \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy}{m}.$$

С учётом нормировки  $\sum_{i=1}^m \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy = 1$  количество уровней квантования  $m$  сигнала определится из выражения

$$\log_2 m \geq -\sum_{i=1}^m \left[ \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy \times \log_2 \left( \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} p(y) dy \right) \right] = H(Y). \tag{6}$$

В предельном случае получим

$$\log_2 m \geq \log_2(L_Y/L_N) = \ln(\sigma_Y^{\text{gauss}}/\sigma_N^{\text{gauss}}). \tag{7}$$

### 4.2. Определение положения уровней квантования сигналов

Рассмотрим задачу об определении уровней квантования амплитуды сигнала, максимизирующих количество информации в коде относительно входного сигнала  $x(t)$ . Количество информации относительно  $x(t)$ , содержащееся в дискретном сигнале  $\mathbf{Y}$  (6) равно  $I(x, \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}/x)$ , где  $H(\mathbf{Y})$  — безусловная энтропия сигнала  $\mathbf{Y}$ , которая запишется как  $H(\mathbf{Y}) = -\sum_{i=0}^{m-1} P(Y_i) \log_2 P(Y_i)$ . Здесь  $P(Y_i)$  — вероятность дискретного сигнала  $Y_i = X_i + N_i$  относительно уровней квантования  $X_i$ :  $P(Y_i) = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(y) dy$ . Условная энтропия  $\mathbf{Y}$  относительно  $x$   $H(\mathbf{Y}/x)$  запишется как  $H(\mathbf{Y}/x) = -\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x) \sum_{i=0}^{m-1} P(Y_i/x) \log_2 P(Y_i/x) dx$  [7], где  $P(Y_i/x)$  — условная вероятность регистрации величины  $Y_i$  при условии, что входной сигнал равен  $x$ ,  $P(Y_i/x) = P(X_i < y < X_{i+1}) = P(X_i - x < N_i < X_{i+1} - x) = \int_{X_i-x}^{X_{i+1}-x} f(n) dn$ . Здесь  $f(n)$  — функция плотности распределения шума.

Поскольку  $\mathbf{Y}$  есть измеримая функция  $y(t)$  [8], то положительная разность  $\Delta = I(x, \mathbf{Y}) - I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  может трактоваться как информационные потери квантования. Таким образом, выбирая уровни квантования входного сигнала так, чтобы  $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , была максимальна, мы минимизируем информационные потери на квантование. Значения уровней  $X_i$ , максимизирующих  $I(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , находятся из уравнения

$$\frac{d[H(\mathbf{Y})]}{dX_i} - \frac{d[H(\mathbf{Y}/x)]}{dX_i} = 0. \tag{8}$$

Подставляя в формулы для энтропий, приведённые выше, выражения и дифференцируя их по  $X_i$ , получим для первого слагаемого в левой части (8):

$$\frac{d[H(\mathbf{Y})]}{dX_i} = f(X_i) \log_2 \frac{\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(y) dy}{\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(y) dy}, \tag{9}$$

где  $f(X_i), f(y)$  — функции плотности вероятностей сигнала, подлежащего регистрации, и сигнала на входе соответственно. Второе слагаемое запишется как

$$\frac{d[H(\mathbf{Y}/x)]}{dX_i} = \frac{1}{L_N} \int_{X_i-L_N/2}^{X_i+L_N/2} f(x) \log_2 \frac{1/2 + (x - X_i)/L_N}{1/2 - (x - X_i)/L_N} dx \tag{10}$$

или

$$\frac{d[H(\mathbf{Y}/x)]}{dX_i} = \frac{1}{L_N} \int_{X_i-L_N/2}^{X_i+L_N/2} f(x) \log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N] dx - \frac{1}{L_N} \int_{X_i-L_N/2}^{X_i+L_N/2} f(x) \log_2[1/2 - (x - X_i)/L_N] dx. \quad (11)$$

Проанализируем выражения  $\log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N]$  и  $\log_2[1/2 - (x - X_i)/L_N]$ . Поскольку интегрирование в выражении для производной  $H(\mathbf{Y}/\mathbf{X})$  проводится по диапазону шумовой составляющей  $X_i - L_N/2 < x < X_i + L_N/2$ , то  $|x - X_i| < L_N/2$ . Отсюда функции  $\log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N]$  и  $\log_2[1/2 - (x - X_i)/L_N]$  знакопостоянны в диапазоне интегрирования. Поэтому, исходя из непрерывности функций  $f(x)$ ,  $\log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N]$  и  $\log_2[1/2 - (x - X_i)/L_N]$  и согласно обобщённой теореме о среднем [9], можно записать

$$\frac{d[H(\mathbf{Y}/x)]}{dX_i} = \left\{ \frac{f'(\tilde{x})}{L_N} \int_{X_i-L_N/2}^{X_i+L_N/2} \log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N] dx \right\} - \left\{ \frac{f''(\tilde{x})}{L_N} \int_{X_i-L_N/2}^{X_i+L_N/2} \log_2[1/2 + (x - X_i)/L_N] dx \right\}, \quad (12)$$

где  $f'(\tilde{x})$  и  $f''(\tilde{x})$  — значения функций плотности в некоторых точках диапазонов интегрирования. При условии, что функция плотности  $f(x)$  в диапазоне шумовой составляющей медленно меняется или имеет симметричный вид, можно считать, что  $f'(\tilde{x}) \approx f''(\tilde{x})$ . Проведя соответствующие замены и последующее интегрирование, получим:

$$\frac{d[H(\mathbf{Y}/x)]}{dX_i} = \frac{f'(\tilde{x})}{L_N} \left( \frac{L_N}{\ln 2} \right) - \frac{f''(\tilde{x})}{L_N} \left( \frac{L_N}{\ln 2} \right) \approx 0. \quad (13)$$

С учётом (13), (8) сводится к уравнению  $d[H(\mathbf{Y})]/dX_i = 0$ , решением которого являются  $X_i$ , при которых функция плотности

$$f(x) = 0, \quad (14)$$

а также  $X_i$ , представляющие собой  $\alpha$ -квантили функции плотности  $f(y)$ :

$$\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(y) dy = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(y) dy. \quad (15)$$

С практической точки зрения это означает, что «плотность» уровней квантования сигнала пропорциональна плотности вероятности распределения амплитуды сигнала. Соотношение (15) соответствует известному принципу преобразования амплитуды видеосигнала — эквализации гистограмм и в каком-то смысле теоретически его обосновывает. Но алгоритм эквализации гистограмм не даёт оценку количества уровней преобразования амплитуды сигнала, кроме того существенным расширением алгоритма квантования амплитуды сигналов служит соотношение (14), которое обосновывает, например, распределение уровней квантования чёрно-белого изображения, в частности печатного текста.

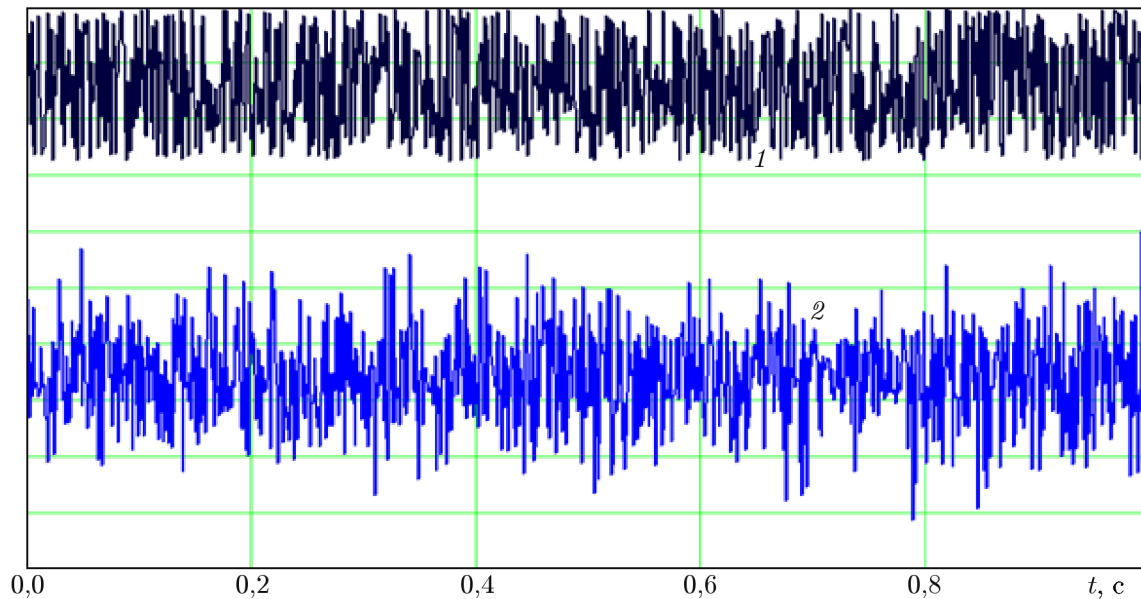


Рис. 2. Амплитуды сигналов равномерного (1) и нормального (2) шума. Энергии конкретных реализаций шумовых сигналов составляют 4,145 для нормального шума и 4,174 для равномерного

Таким образом, зная оценки плотности вероятности распределения амплитуды регистрируемого сигнала и параметры собственных шумов системы регистрации, можно оптимизировать количество уровней квантования амплитуды сигнала без потери информационного содержания его цифрового представления.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

### 5.1. Моделирование локационных сигналов

Для оценки информационных характеристик равномерного и нормального шума приведём результаты генерации равномерного и нормального шумов, параметры которых связаны соотношением  $L_e = (\sqrt{2\pi e} \sigma_g)^{\ln 2}$ , где  $L_e$  — диапазон распределения равномерного шума,  $\sigma_g$  — дисперсия нормального шума. Для моделирования использовался пакет MATCAD. Графики сигналов широкополосного шума представлены на рис. 2.

Рассогласование оценок обусловлено ограниченной длиной генерируемых векторов шума и сигнала, используемых для подсчёта значений их энергий.

### 5.2. Кодирование видеосигналов. Определение оптимальных параметров квантования амплитуды сигнала

Параметры системы кодирования (количество разрядов аналого-цифрового преобразователя) определяются величиной аналогового шума и величиной области насыщения телевизионного датчика. В соответствии с приведённым выше соотношением  $m = \text{int}(L_Y/L_N)$ , где  $m$  — количество уровней квантования видеосигнала,  $L_Y$  — диапазон распределения амплитуды формируемого видеосигнала прибора,  $L_N$  — диапазон распределения шума,  $\text{int}(\beta)$  — целая часть числа  $\beta$ .

Алгоритм квантования амплитуды заключается в следующем:

1) определение гистограммы распределения амплитуды видеосигнала на кадре, которая служит оценкой функции плотности видеосигнала;

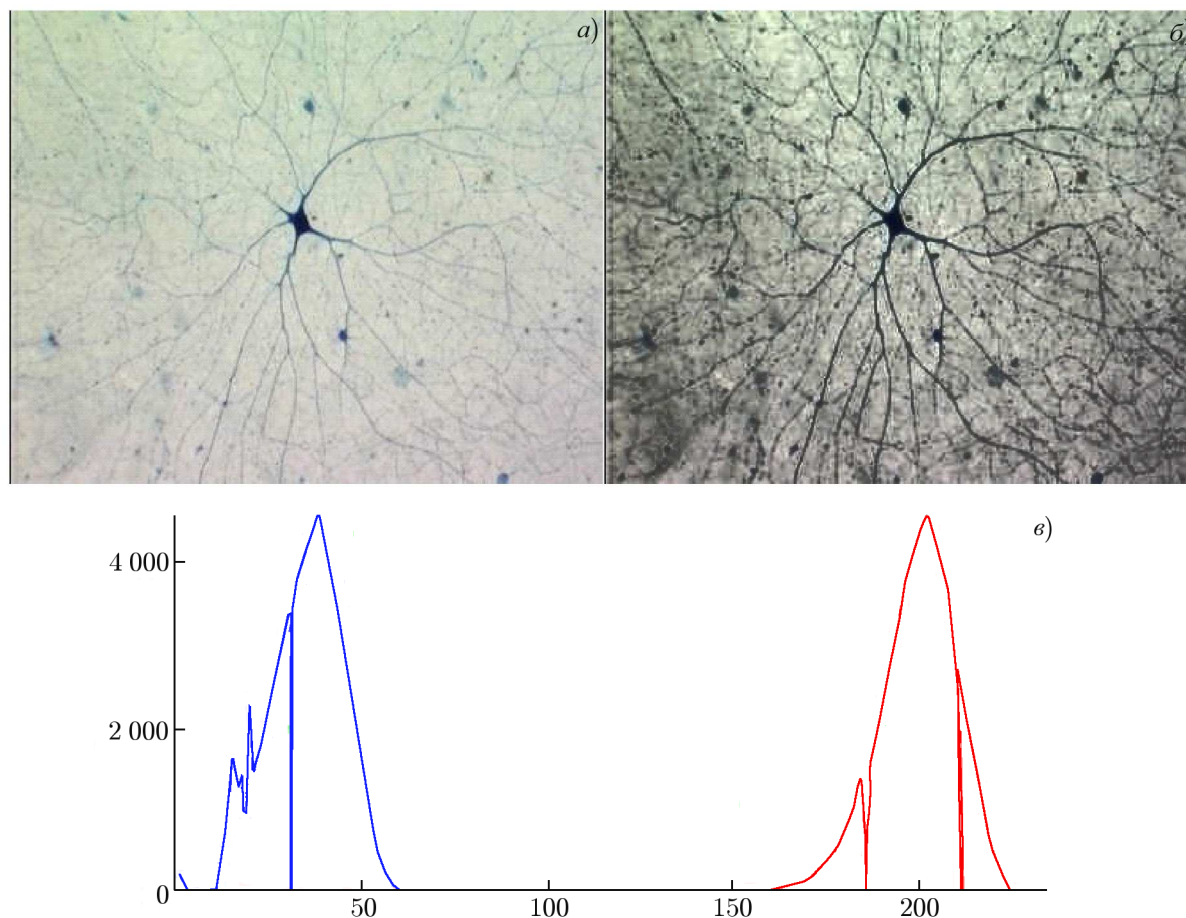


Рис. 3. Изображение и соответствующая ему гистограмма (оценка плотности распределения амплитуды сигнала по уровням): панель *a* и красная кривая на панели *в* соответствуют исходному изображению, панель *б* и синяя кривая на панели *в* — изображению с перекодированной амплитудой

- 2) определение энтропии гистограммы и на её основе количества уровней квантования видеосигнала, при этом подразумевается, что диапазон распределения шума на входе  $L_N < L_Y/m$  и тогда  $\log_2 L_N = 0$  и  $m = 2^{\text{int}(H(\mathbf{Y}) - \log_2 L_N)}$ ;
- 3) определение уровней квантования сигнала согласно положениям квантилей функции плотности и её нулевым значениям.

Кодирование изображения при минимизации числа уровней квантования без информационных потерь представлено на рис. 3. Количество уровней представления амплитуды сигнала после перекодирования уменьшилось с 256 до 64, при этом оценки энтропий примерно совпадают: для исходного сигнала  $H = 5,518$ , для обработанного сигнала  $H = 5,335$ .

Операцию по кодированию можно провести и для цветных координат вектора изображения, имея в виду, что при этом значения преобразованных цветных координат при отображении кодированной цветовой координаты по «исходной» шкале отсчётов будут искажены аналогично искажению амплитудных отсчётов в приведённой выше иллюстрации.

Кодирование цветных компонент изображения в пространстве HSV представлено на рис. 4.

При использовании приведённых выше принципов квантования для сокращения количества отсчётов координат видеосигнала для того, чтобы избежать эффекта искажения цвета, достаточно выполнить обратное преобразование кодированных отсчётов в исходные значения.



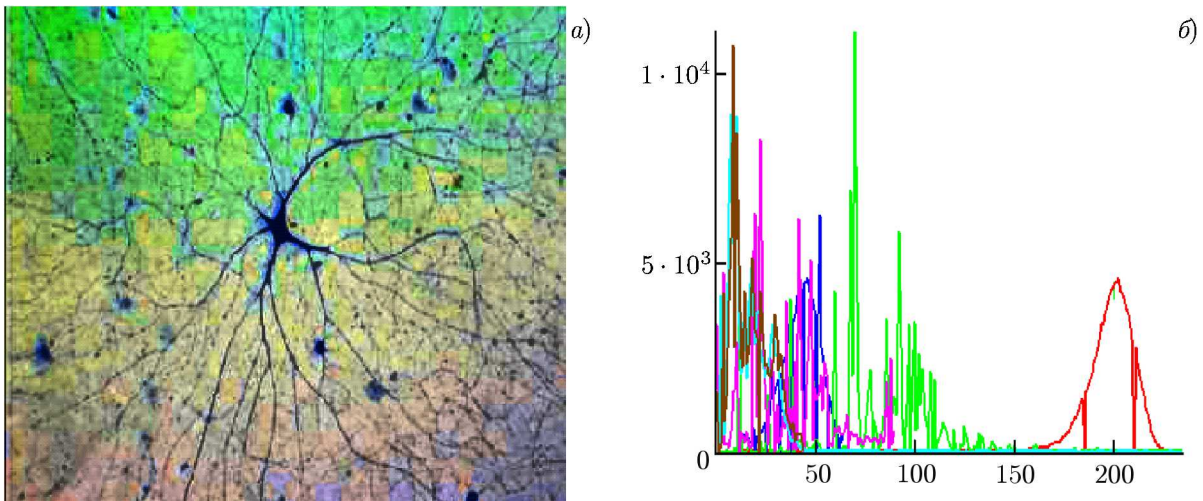


Рис. 4. Изображение, перекодированное по всем цветовым координатам в пространстве HSV (а), и гистограммы распределения цветовых координат (б). Красным, зелёным и голубым цветом на панели б представлены амплитуда, тон и насыщенность исходного изображения соответственно, синим, фиолетовым и коричневым — соответствующие координаты преобразованного изображения

## ВЫВОДЫ

Исходные регистрируемые сигналы с непрерывной плотностью распределения потенциально содержат бесконечно большое количество информации. Ограничение количества «регистрируемой» информации связано только с конечным динамическим диапазоном системы регистрации, обусловленным аддитивным «инструментальным» шумом.

Количество уровней квантования амплитуды сигнала при неизвестных распределениях плотности сигнала и шума оценивается как  $m = \text{int}(L_Y/L_N)$ , при этом шкала квантования сигнала равномерная.

При неизвестном законе распределения шума и известной оценке плотности распределения сигнала при условии, что плотность распределения шума имеет закон, отличный от равномерного,  $m = \text{int}[2^{H(Y)} - \log_2 L_N]$ . При этом шкала квантования сигнала имеет нелинейный характер, определяемый соотношениями для уровней квантования  $X_i$ :  $f(X_i) = 0$  и  $\int_{X_{i-1}}^{X_i} f(y) dY = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(y) dy$ . Последнее справедливо с учётом того, что функция плотности распределения амплитуды сигнала мало меняется на интервале шумовой составляющей.

Законами распределения с максимальной энтропией являются равномерный и нормальный законы, параметры которых связаны соотношением  $L_e = (\sqrt{2\pi e} \sigma_g)^{\ln 2}$ . Поэтому при моделировании шумов, в частности белого шума, нормальный закон распределения с целью экономии вычислительных ресурсов можно заменить равномерным.

Данная работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 02 «Нелинейная динамика в математических и физических науках» за 2018 год (тема 0035–2015–0001).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Max J. // IRE Trans. Information Theory. 1960. V. 6, No. 1. P. 7.
2. <https://plato.stanford.edu/entries/information/>

3. Shannon C. E. // Bell System Technical J. 1948. V. 27, No. 3. P. 379.
4. Wilde M. M. From Classical to Quantum Shannon Theory. arXiv:1106.1445v8 [quant-ph]. 774 p.
5. Nicolis J. S. Dynamics of Hierarchical Systems An Evolutionary Approach. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 488 p.
6. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation, 2nd edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. 823 p.
7. Хоботов А. Г., Лысов В. И. // Электронная техника. Сер. 7. 1987. Вып. 4(143). С. 23.
8. Ковалеров Г. И., Мандельштам С. М. Введение в информационную теорию измерений. М.: Энергия, 1974. 374 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. С. 831.

Поступила в редакцию 26 апреля 2019 г.; принята в печать 30 сентября 2019 г.

### INFORMATION APPROACH TO THE DIGITAL RECORDING OF SIGNALS

*A. G. Khobotov, A. I. Khilko, and A. A. Tel'nykh*

In this work, we study the problems of processing complex-nature signals subject to noise, which arise because of the insufficient dynamic range of these signals in the case of their digital representation. The information criteria of quantization of the complex-signal amplitude are considered. The information-analytical approach to solving the problem of encoding the signal amplitudes, which is oriented at retrieving maximum amount of information for minimum volume of the obtained code, is formulated. Particular results of using such an approach are given.