

УДК 519.254

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ЭМПИРИЧЕСКИМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ТРОПОСФЕРЫ ПО РАДИОМЕТРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

*М. В. Беликович**, *М. Ю. Куликов*, *В. Г. Рыскин*, *А. А. Швецов*, *А. А. Красильников*,
Н. К. Скалыга, *Е. А. Серов*, *А. М. Фейгин*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе описан математический аппарат метода оптимальной оценки для восстановления профилей температуры тропосферы ($0 \div 10$ км) по радиометрическим данным с параметризацией искомых профилей в виде разложения по эмпирическим ортогональным функциям, получаемым путём сингулярного анализа ковариационной матрицы данных радиозондовых измерений. Показано, что в рамках такого подхода можно использовать сетку высокого разрешения по высоте при сравнительно небольшой размерности обратной задачи. Это позволяет корректно анализировать статистику радиозондовых измерений и оперативно восстанавливать профили температуры без привлечения больших численных мощностей. Проведено тестовое восстановление температуры по большому ансамблю модельных зашумлённых спектров собственного излучения атмосферы на основе статистики радиозондовых измерений температуры над Нижним Новгородом. Установлено, что среднеквадратичная ошибка восстановления температуры по спектрам в диапазонах частот $50 \div 55$; $55 \div 59$ и $50 \div 59$ ГГц варьируется в диапазонах $0,5 \div 2,7$ К (на высотах $0 \div 10$ км), $0,3 \div 1,0$ К (на высотах $0 \div 2$ км) и $0,3 \div 2,8$ К (на высотах $0 \div 10$ км) соответственно. При этом оптимальное количество эмпирических ортогональных функций (размерность задачи) составляет 6–8 в случае спектров в диапазоне частот $50 \div 55$ ГГц, 8 в случае $55 \div 59$ ГГц и 10 в случае $50 \div 59$ ГГц.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что температура воздуха является ключевой характеристикой большинства радиационных, химических и динамических процессов в атмосфере. В нижней части атмосферы, тропосфере (высоты $0 \div 10$ км), измерения профиля температуры особенно важны для прогноза погоды и предсказания опасных метеорологических явлений, вызываемых, например, конвективной неустойчивостью атмосферы. В настоящее время они проводятся с помощью спутниковых приборов, лидаров, радиозондов и наземных микроволновых радиометров (спектрорадиометров).

Начиная с конца 20 века в зарубежных странах активно развиваются системы сверхкраткосрочных метеорологических прогнозов («наукастинга») с заблаговременностью от нескольких мин до $2 \div 6$ часов [1], которые применяются, в частности, в интересах авиации. Помимо значительного повышения авиационной безопасности, такие прогнозы должны способствовать существенному снижению убытков аэропортов от не предсказанных, но случившихся опасных метеоявлений. В соответствии с требованиями Всемирной метеорологической организации [2, 3], для повышения достоверности наукастинга необходимы постоянные измерения профилей температуры тропосферы с высоким временным ($5 \div 30$ мин), вертикальным ($0,5 \div 1,0$ км в нижней тропосфере, $1 \div 3$ км — в верхней) и горизонтальным ($5 \div 200$ км) разрешением.

Отметим, что далеко не все методы измерения температуры тропосферы, указанные выше, в целом подходят для целей наукастинга. В частности, среди всего разнообразия спутниковых методов указанным требованиям удовлетворяют измерения с помощью аппаратуры, размещённой

* belikovich@ipfran.ru

на геостационарных спутниках. Однако и для них остаётся проблема точности измерения температуры ниже 3÷4 км (особенно в погранслое). В свою очередь, лидары не работают в дневное время, чувствительны к задымлённости, туману, снегу и смогу, а регулярное радиозондирование осуществляется с большим временным лагом: в России 12 часов или 24 часа, в западных странах в лучшем случае 6 часов. Кроме того, лидары и радиозондирование сравнительно дороги, требуют постоянного обслуживания и расходных материалов и, вообще говоря, в соответствии с требованиями авиационной безопасности, не могут осуществлять зондирование в зоне аэропорта. Поэтому для целей наукастинга (особенно в аэропортах) больше подходят наземные автоматизированные микроволновые приборы, которые к настоящему моменту производятся рядом коммерческих фирм. В частности, в России созданы температурный профилемер МТП-5 для зондирования погранслоя [4] и спектрорадиометр «Микрорадком» для зондирования всей тропосферы [5]. Данные измерений посредством этих приборов используются, в частности, для прогнозирования загрязнений воздуха и опасных метеорологических событий (см. обзор [6]), хотя в целом система наукастинга в нашей стране только формируется.

В состав действующих систем наукастинга (например, в системе CAN-Now, Канада) входят спектрорадиометры производства Radiometrics Corporation (США) и Radiometer Physics (Германия), которые широко используются для прогноза туманов, погоды в аэропортах, гроз и конвективных штормов [7–13], а так же для метеорологического обеспечения крупных международных событий, в частности, Олимпийских игр [14]. Данные приборы непрерывно измеряют спектры собственного излучения атмосферы в 5-миллиметровой полосе поглощения/излучения молекулярного кислорода в диапазоне частот 50÷60 ГГц со сравнительно небольшим временем накопления одного спектра. По каждому спектру оперативно (за характерное время много меньше 1 мин) на обычном персональном компьютере восстанавливается распределение температуры в диапазоне высот 0÷10 км с высоким пространственным (до нескольких десятков метров) и временным (1÷2 мин) разрешением. Высокая скорость обработки экспериментальных данных обусловлена использованием регрессионных методов: линейной или квадратичной регрессии [15] и искусственной нейронной сети [16].

Перед установкой прибора в конкретном географическом месте параметры модели определяются путём её обучения по многолетней базе данных, полученных на ближайшей станции радиозондирования. Таким образом, качество последующего восстановления температуры тропосферы в значительной степени определяется тем, насколько детально радиозондовые данные воспроизводят пространственно-временную эволюцию этой характеристики атмосферы непосредственно в месте установки прибора. Поэтому восстановление температуры тропосферы посредством указанных регрессионных методов может содержать существенные систематические и случайные ошибки, вызванные, например, заметной удалённостью станции радиозондирования от расположения прибора, разными климатическими условиями или недостаточно хорошим временным разрешением радиозондовых данных. В частности, сравнение температурных профилей, полученных прибором RPG-HATPRO (Radiometer Physics), размещённом в Санкт-Петербургском университете, с данными регулярных радиозондовых наблюдений на станции Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова показало [17], что систематическая погрешность измерений температуры составляла 1,0÷1,5 К на высотах 0÷1 км, 2,0÷3,5 К на высотах 2÷4 км, а выше 4 км оказалась больше естественных вариаций температуры и достигала 8 К. При этом найденное среднеквадратическое отклонение (1÷9 К в зависимости от высоты) также было существенно больше, чем заявленные производителем значения (0,25÷1,00 К).

Одним из потенциальных источников систематического отклонения является ошибка в параметрах модели распространения излучения, используемой при построении регрессионного алгоритма. В связи с этим следует отметить работу [18], где оценивается возможность построения

такого алгоритма без привлечения моделирования. Таким образом, на сегодняшний день остаётся актуальной проблема точности микроволновых измерений температуры тропосферы посредством указанных приборов. Попытки её улучшения за счёт других алгоритмов, обеспечивающих, как и регрессионные модели, высокую скорость обработки экспериментальных данных, продолжают-ся как в России, так и за рубежом. Как правило, успех алгоритма определяется способностью привлечь новую априорную информацию, уточнить имеющуюся или же использовать дополнительные измерения. В связи с этим стоит отметить работы [19, 20], в которых развивается общий подход (в том числе, применительно к данным RPG-NATPRO), представляющий априорные ограничения как виртуальные измерения. Такое более общее и единое описание упрощает привлечение новых источников информации.

Хорошо известно, что восстановление профилей температуры по радиометрическим данным является некорректной обратной задачей, допускающей множество решений. Исходная экспериментальная информация представляет собой частотный спектр яркостной температуры собственного излучения атмосферы с известным шумом измерений. Искомый профиль температуры связан с измеряемым спектром посредством нелинейного интегрального преобразования. Данное преобразование является решением уравнения распространения, излучения и поглощения радиации в миллиметровом диапазоне длин волн в приближении гидростатической связи между температурой и концентрацией O_2 и с учётом известных зависимостей коэффициентов поглощения/излучения молекулярного кислорода, азота и паров воды от частоты, давления и температуры. Эти зависимости обычно берутся из стандартной модели Либбе–Розенкранца [21, 22]. Для существенного повышения точности восстановления температуры тропосферы привлекается априорная информация о возможных её профилях, источником которой обычно является база данных, накопленная на близлежащей станции радиозондирования атмосферы в течение длительного периода измерений. Особенностью радиозондовых данных является неодинаковость сетки высот (давлений) от профиля к профилю, связанная с тем, что радиозонд передаёт данные через определённый промежуток времени, а скорость его подъёма существенно варьируется от запуска к запуску.

Статистически корректное восстановление профилей температуры по радиометрическим данным осуществляется методом оптимальной оценки (Optimal Estimation Method) [23]. Он основан на байесовом подходе, т. е. на рассмотрении условной вероятности возможного решения. На основании интегрального преобразования, предположения об аддитивности шума измерений, априорных данных, выбора класса функций, параметризующих искомый профиль температуры, и теоремы Байеса проводится построение апостериорной плотности вероятности. Результатом восстановления считается наиболее вероятный профиль температуры, соответствующий максимуму этой плотности вероятности, которая в общем случае является функцией большого числа переменных, большая часть которых параметризует искомый профиль. Поиск максимума является сложной задачей и, как правило, требует привлечения существенных вычислительных мощностей. Кроме того, существует проблема усвоения априорных данных, вызванная указанной особенностью радиозондовых профилей температуры. Обычно все данные приводятся к единой сетке, на которой затем проводится восстановление, а её разрешение в зависимости от высоты выбирается исходя из требований потребителей конечных данных [24]. В результате всегда остаётся вопрос, насколько хорошо выбранная сетка учитывает особенности пространственно-временного распределения априорных данных и минимизирует ошибку, возникающую вследствие сглаживания искомого профиля параметризующими функциями (smoothing error), которая по оценкам [25] вносит основной вклад в суммарную ошибку восстановления температуры тропосферы по радиометрическим данным.

Аппарат эмпирических ортогональных функций (ЭОФ) используется в различных областях

науки и техники, где его также называют методом главных компонент, преобразованием Кархунена—Лоэва, преобразованием Хотеллинга. В дистанционном спутниковом зондировании атмосферы ЭОФ применяются на различных этапах решения обратной задачи. Так, например, в работе [26] ЭОФ использованы для параметризации искомым температурных профилей по данным спутникового зондирования с целью уменьшения размерности задачи. С другой стороны, ЭОФ применяются для сжатия исходной спектральной информации, как это сделано в работе [27] при решении задачи определения общего содержания CO_2 по данным спутникового фурье-спектрометра. Также ЭОФ могут одновременно использоваться как для параметризации искомым профилей, так и измеренных спектров (см. [28]).

В данной работе ЭОФ-параметризация применяется в рамках метода оптимальной оценки для восстановления температуры по данным наземного радиометрического зондирования. Базис ЭОФ находится путём анализа ковариационной матрицы априорных данных радиозондирования. Основной целью работы является определение предельных возможностей метода. Поэтому в качестве исходных радиометрических данных взяты симулированные спектры собственного излучения атмосферы, полученные в результате решения прямой задачи распространения, излучения и поглощения радиации в миллиметровом диапазоне длин для ансамбля измеренных радиозондами профилей температуры атмосферы над Нижним Новгородом. Тем не менее, для определённости характеристики этих спектров (в частности, центральные частоты и ширины каналов, величина шума измерений, зенитные углы измерений) соответствуют параметрам сканирующих по зенитному углу спектрорадиометров для зондирования температуры приземного слоя и свободной тропосферы [29, 30], разработанных в ИПФ РАН и модернизируемых в настоящее время. С целью определения оптимального (с точки зрения результирующей ошибки измерения температуры тропосферы) диапазона частот отдельно рассмотрены спектры, измеряемые в диапазонах $50 \div 55$; $55 \div 59$ и $50 \div 59$ ГГц. Восстановление профилей температуры по этим спектрам и их сравнение с исходными данными радиозондовых измерений показало следующее. Во-первых параметризация на основе ЭОФ позволяет эффективно решать проблему выбора оптимального разрешения по высоте (разрешения сетки, на которой представляется результат восстановления температуры) и корректно усваивать статистику радиозондовых измерений. Во-вторых, она существенно уменьшает размерность задачи (число параметров параметризации), что делает возможным оперативное (в режиме реального времени) восстановление профилей температуры без привлечения больших вычислительных мощностей.

Работа построена следующим образом. В разделах 1 и 2 представлено краткое описание прямой и обратной задач восстановления профиля температуры тропосферы по радиометрическим данным, а также основных характеристик спектрорадиометров ИПФ РАН. В разделе 3 показано, как осуществляется параметризация искомым профилей на основе ЭОФ. В разделе 4 проведён анализ ошибок их восстановления. В разделе 5 представлены результаты восстановления температуры тропосферы по большому ансамблю модельных спектров и исследована зависимость его ошибки от числа учитываемых в параметризации ЭОФ.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Здесь и далее мы будем придерживаться терминологии, используемой в работе [23]. Пусть вектор $\boldsymbol{\mu}$ (вектор состояния¹) определяет профиль температуры в тропосфере $T_{\boldsymbol{\mu}}(z)$, вектор \mathbf{R} (вектор измерений) включает в себя яркостные температуры собственного излучения атмосферы

¹ В свою очередь, вектор состояния определяется параметризацией восстанавливаемых профилей температуры, которая будет рассмотрена в разделе 3.

($R_q \equiv R_{ik}$, где i — номер спектрального канала, k — номер зенитного угла сканирования, $q = i + (k - 1)n_k$ — индекс, объединяющий измерения в один вектор, n_k — общее количество углов сканирования), измеренные на поверхности земли. Более подробно о параметризации восстанавливаемых профилей температуры профиля будет сказано в разделе 3.

Мы полагаем, что оба вектора связаны между собой посредством прямой задачи:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\xi}, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}) = \{F_q(\boldsymbol{\mu})\} = \{F_{ik}(\boldsymbol{\mu})\}$ — вектор-функция, $\boldsymbol{\xi}$ — шум измерений. В свою очередь, $\{F_{ik}(\boldsymbol{\mu})\}$ представляет собой интегральное соотношение

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}, f, \theta) = T_0 \exp\left(-\int_{z_0}^{z_\infty} \frac{\alpha}{\cos \theta} dz'\right) + \int_{z_0}^{z_\infty} \frac{\alpha}{\cos \theta} T_\mu(z) \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{\alpha}{\cos \theta} dz'\right) dz, \tag{2}$$

усреднённое по форме i -го спектрального канала $\psi_i(f)$:

$$F_{ik}(\boldsymbol{\mu}) = \int_0^\infty \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}, f, \theta_k) \psi_i(f) df, \quad \int_0^\infty \psi_i(f) df = 1. \tag{3}$$

Таблица 1. Частотные каналы спектрорадиометров для зондирования температуры приземного слоя и свободной тропосферы (f_c — центральная частота, Δf — ширина канала)

	f_c , ГГц	Δf , ГГц
Свободная тропосфера	50,400	0,50
	51,210	0,30
	51,710	0,30
	52,270	0,30
	52,705	0,15
	53,285	0,15
	53,900	0,30
	54,420	0,50
Приземный слой	55,500	0,60
	56,500	1,00
	58,200	1,60

В формулах (2) и (3) f — частота, z_0 — высота поверхности земли относительно уровня моря, z_∞ — высота верхней границы атмосферы, $\alpha = \alpha[f, T_\mu(z), p(z), p_{H_2O}(z)]$ — коэффициент поглощения атмосферного воздуха по Microwave Propagation Model [21, 22], θ — зенитный угол наблюдения (θ_k — k -й угол сканирования), T_0 — яркостная температура фонового (реликтового) микроволнового излучения, $p(z)$ — профиль давления, связанный с температурой гидростатическим соотношением

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{M_a g}{\bar{R} T_\mu(z')} dz'\right), \tag{4}$$

где p_0 — давление на поверхности земли (берётся из метеоданных), M_a — средняя молярная масса воздуха, g — ускорение свободного падения, \bar{R} — универсальная газовая постоянная. Профиль давления водяного пара считается известным из данных измерений другим прибором или, следуя работе [25], параметризуется в виде экспоненциально спадающей функции с характерной высотой 3 км и значением давления паров воды на поверхности земли, определённым по данным метеорологических наблюдений.

Отметим, во-первых, что выражение (2) есть решение уравнения распространения излучения в длинноволновом приближении (приближении Рэля—Джинса). Во-вторых, оно не учитывает конечную ширину диаграммы направленности антенны, а также рассеяние на жидких частицах облаков. В-третьих, атмосфера рассматривается в плоскостойком приближении, поэтому вектор состояния $\boldsymbol{\mu}$ описывает вертикальную структуру атмосферы, одинаковую для всех углов сканирования.

Как было указано во Введении, в данной работе рассмотрены модельные спектры собственного излучения атмосферы, полученные в результате применения решения прямой задачи к радиозондовым профилям температуры атмосферы над Нижним Новгородом, измеренным в 2009–2014 и 2016 годах. Характеристики этих спектров приведены к параметрам (см. табл. 1) сканирующих по зенитному углу спектрорадиометров для зондирования температуры приземного слоя и свободной тропосферы [29, 30], разработанных в ИПФ РАН. Данные приборы выполнены по схеме супергетеродинного приёма сигнала с узкими диаграммами направленности антенной системы (2° и $2,5^\circ$ соответственно) и уникальной системой внутренней калибровки интенсивности принимаемого радиоизлучения атмосферы (модулятор-калибратор [31] на основе GaAs-диодов с барьером Шоттки с точностью калибровки 0,1 К). Шумовая температура приборов и ширины частотных каналов при времени накопления 1 с обеспечивают чувствительность несколько сотых долей градуса. Ниже в разделах 4–6 рассмотрены три вида спектров в диапазонах частот $50 \div 55$; $55 \div 59$ и $50 \div 59$ ГГц. Каждый из этих спектров предполагается зашумлённым гауссовым шумом с нулевым средним и дисперсией, отвечающей точности калибровки (0,1 К). Отметим, что эта точность соответствует всем созданным на данный момент спектрорадиометрам для измерений температуры тропосферы, в том числе коммерческим приборам.

В следующем разделе представлено краткое описание восстановления профилей температуры тропосферы по радиометрическим данным с помощью метода оптимальной оценки.

2. МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Как указано выше, метод оптимальной оценки [23] базируется на байесовом подходе, то есть рассмотрении возможных решений с точки зрения их статистической значимости. Рассматривается апостериорное распределение плотности вероятности вектора состояний $P(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{R})$, т. е. условная плотность вероятности наблюдать вектор $\boldsymbol{\mu}$ при измеренном \mathbf{R} . Согласно теореме Байеса

$$P(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{R}) = \frac{P(\mathbf{R}|\boldsymbol{\mu})P_{\text{a priori}}(\boldsymbol{\mu})}{P(\mathbf{R})}, \quad (5)$$

где $P(\mathbf{R}|\boldsymbol{\mu})$ — плотность вероятности распределения возможных результатов измерения спектров собственного излучения атмосферы при заданном профиле температуры, $P_{\text{a priori}}(\boldsymbol{\mu})$ — априорная плотность вероятности профилей температуры, $P(\mathbf{R})$ — плотность вероятности априорного распределения результатов измерения. Распределение $P(\mathbf{R}|\boldsymbol{\mu})$ тривиально связано с плотностью вероятности ошибок измерения (предполагается, что шумы измерений не коррелированы и распределены по нормальному закону):

$$P(\mathbf{R}|\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\prod_i \sqrt{2\pi} \sigma_i^m} \exp \left[- \sum_{ik} \frac{[R_{ik} - F_{ik}(\boldsymbol{\mu})]^2}{2\sigma_i^2} \right]. \quad (6)$$

Здесь m — число углов сканирования, σ_i^2 — дисперсия шума в i -м частотном канале, которая предполагается не зависящей от угла сканирования.

В методе оптимальной оценки априорное распределение выбирается в виде многомерной функции Гаусса, средние и ковариационная матрица которой совпадают со средними и ковариационной функцией априорного ансамбля:

$$P_{\text{a priori}}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp \left[- \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_a)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_a) \right]. \quad (7)$$

Здесь Σ — ковариационная матрица априорного ансамбля (Σ^{-1} — обратная матрица), μ_a — среднее априорного ансамбля, M — размерность μ . В качестве решения обратной задачи (искомого профиля температуры) выбирается наиболее вероятный профиль, которому соответствует максимум выражения (5) по μ . С учётом того, что знаменатель (5) не зависит от вектора состояния, нахождение максимума сводится к минимизации соотношения

$$L(\mu) = [\mathbf{R} - \mathbf{F}(\mu)]^T \mathbf{S}^{-1} [\mathbf{R} - \mathbf{F}(\mu)] + (\mu - \mu_a)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_a), \quad (8)$$

где \mathbf{S}^{-1} — обратная корреляционная матрица шума, которая является диагональной, $S_{ii}^{-1} = 1/\sigma_i^2$. Первое слагаемое в (8) традиционно называют невязкой, второе — регуляризирующим или априорным. Отметим, что поиск наиболее вероятного профиля проводится численно, для чего много раз решается прямая задача $F(\mu)$. При этом сетка интегрирования по высоте в выражении (2) обычно выбирается с гораздо лучшим разрешением, чем сетка параметризации восстанавливаемых профилей. Тем не менее, необходимо отметить, что ресурсоёмкость метода оптимальной оценки в первую очередь обусловлена процессом поиска минимума функционала $L(\mu)$ (в частности, вычислением производных по вектору состояния), т. е. зависит от размерности μ , которая, в свою очередь, определяется параметризацией восстанавливаемых профилей.

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭОФ

При выборе параметризации восстанавливаемых профилей температуры необходимо, чтобы она учитывала все возможные реальные вариации этих профилей, имеющиеся в априорных данных и, таким образом, минимизировала ошибку аппроксимации. Наиболее часто используется кусочно-линейная параметризация, так что с учётом указанной во Введении особенности радиозондовых профилей температуры для корректного усвоения априорной информации желательно, чтобы она имела большое число слоёв по высоте. С другой стороны, число слоёв определяет число компонент вектора состояния (размерность задачи), так что высокая размерность вектора μ существенно затрудняет оперативное (т. е. в реальном режиме времени) восстановление профилей температуры по данным измерений без привлечения больших численных мощностей.

В данной работе предлагается учесть свойства априорной информации не только в регулирующем слагаемом функционала (8), но и при выборе параметризации восстанавливаемых профилей. Анализ ковариационной матрицы радиозондовых измерений [32] показывает, что вариации температуры на разных высотах тропосферы в той или иной степени коррелируют (или антикоррелируют) между собой, так что пространственно-временное распределение температуры тропосферы в целом может быть описано сравнительно небольшим набором взаимно ортогональных пространственных распределений (т. е. эмпирических ортогональных функций, ЭОФ). Отметим, что к настоящему моменту ЭОФ используются во многих областях науки, где их также называют главными или принципиальными компонентами [33]. С математической точки зрения эти функции являются собственными векторами симметричной ковариационной матрицы априорной статистики.

Линейную параметризацию восстанавливаемого профиля температуры запишем как

$$T_{\mu}(z) = \sum_{k=1}^M \mu_k a_k(z) + a_0(z), \quad (9)$$

где $a_k(z)$ — набор базисных функций, M — их число, $a_0(z)$ соответствует среднему априорному профилю, μ_k — k -я компонента вектора состояния. Таким образом, размерность вектора состояния и, следовательно, функционала (8), минимизируемого в рамках метода оптимальной оценки,

равна числу базисных функций M . В данной работе мы предлагаем в качестве $a_k(z)$ выбрать ЭОФ, определённые по массиву зондовых данных. Зададим $a_k(z)$ и $a_0(z)$ как кусочно-линейные функции на сетке $Z = z_i, i = 1, \dots, N$, где N — количество её узлов:

$$a_k(z) = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i} p_{i+1}^k + \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} p_i^k, \quad z \in [z_i, z_{i+1}]; \quad (10)$$

$$a_0(z) = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i} \bar{T}_{i+1} + \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} \bar{T}_i, \quad z \in [z_i, z_{i+1}]. \quad (11)$$

Здесь p_i^k и \bar{T}_i — значения k -й базисной функции и среднего априорного профиля температуры на высоте z_i соответственно. Число базисных функций можно выбрать практически независимо от N . Более того, поскольку, как было сказано выше, основной процент вариаций априорного профиля описывается сравнительно небольшим числом ЭОФ, можно предположить, что достаточное (для удовлетворительного описания восстанавливаемых профилей температуры) количество базисных функций $M \ll N$. Таким образом, использование ЭОФ должно эффективно решать проблему выбора оптимального разрешения по высоте (разрешения сетки) и корректно усваивать статистику радиозондовых измерений, поскольку число слоёв N можно выбирать, в принципе, достаточно большим, чтобы учитывать все особенности базы данных радиозондовых профилей температуры, ограничиваясь при этом сравнительно невысокой размерностью задачи.

Поясним алгоритм нахождения $a_k(z)$. Будем рассматривать общий случай, когда выбранная нами сетка высокого разрешения имеет неоднородное разбиение по высоте. При этом все высоты, представленные в априорных профилях, мы считаем равнозначными.

На первом шаге весь ансамбль радиозондовых профилей температуры, составляющих априорную статистику, посредством линейной интерполяции переносится на сетку Z . В результате получаем временной ряд $\mathbf{T}(t)$, где каждый элемент $T_i(t)$ — эволюция температуры на высоте z_i .

На втором шаге по ряду \mathbf{T} вычисляется ковариационная матрица:

$$\Sigma_{i,j} = w_i w_j \text{cov} T_i T_j. \quad (12)$$

Здесь w_k — вес каждого интерполированного отсчёта, связанный с неравномерностью интерполяционной сетки по высоте:

$$w_k = \begin{cases} \sqrt{(z_2 - z_1)/2}, & k = 1; \\ \sqrt{(z_{k+1} - z_{k-1})/2}, & 1 < k < N; \\ \sqrt{(z_N - z_{N-1})/2}, & k = N. \end{cases} \quad (13)$$

Наличие весов (13) является типичным случаем при построении ЭОФ на географических сетках (например, равномерных по широте) в различных геофизических приложениях (см. [34, 35]).

На третьем шаге матрица Σ диагонализуется путём сингулярного разложения (в данном случае сингулярные векторы совпадают с собственными):

$$\Sigma = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T, \quad (14)$$

где \mathbf{U} — матрица собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных значений.

На четвёртом шаге отбираются M собственных векторов (столбцов матрицы \mathbf{U}), отвечающих M наибольшим собственным значениям. Данные векторы определяют функцию (10):

$$p_i^k = y_{i,k}/w_i, \quad (15)$$

где $y_{i,k}$ — i -я компонента k -го собственного вектора матрицы (12). Следует отметить, что в данной параметризации $\boldsymbol{\mu}_a$ — нулевой вектор. В данной работе в качестве априорной информации

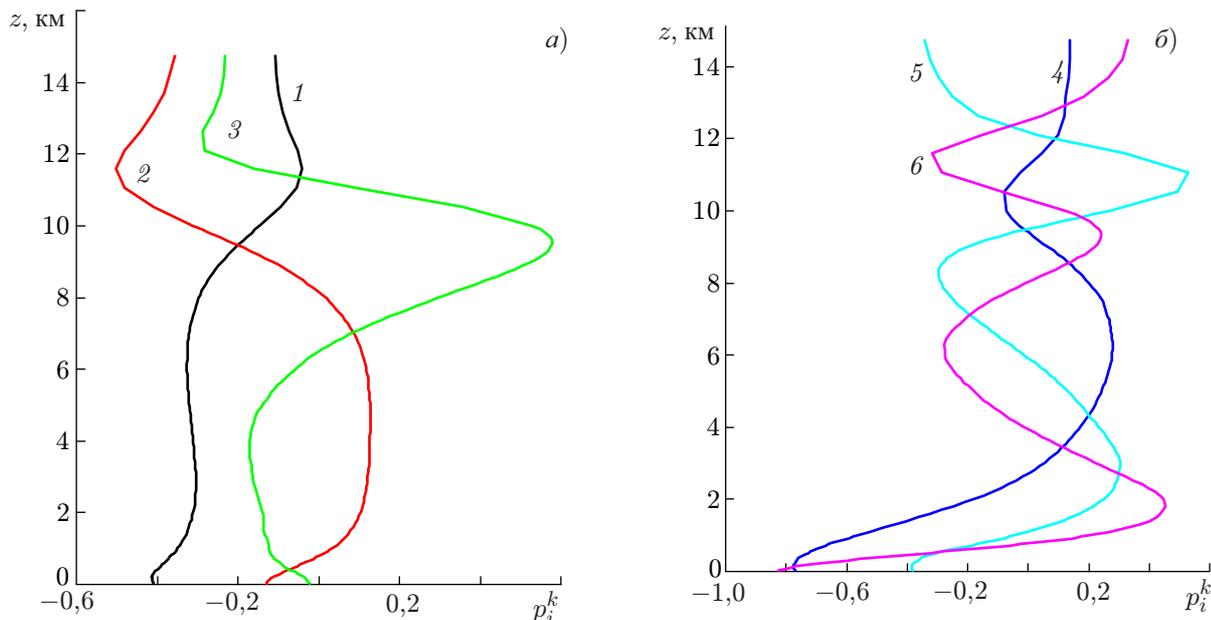


Рис. 1. Первые шесть ЭОФ, полученных по данным радиозондирования температуры тропосферы над Нижним Новгородом: 1–3 (а) и 4–6 (б)

Таблица 2. Доля первых 10 ЭОФ в общей изменчивости температуры тропосферы над Нижним Новгородом

Номер ЭОФ	Доля вариации индивидуально, %	Доля вариации суммарно, %
1	76,5	76,50
2	15,6	92,10
3	2,80	94,90
4	2,00	96,90
5	0,90	97,80
6	0,64	98,44
7	0,37	98,81
8	0,26	99,07
9	0,17	99,24
10	0,12	99,36

рассмотрены 4 116 профилей температуры, измеренных в диапазоне высот 0÷15 км на метеорологической станции «Нижний Новгород» (№ 27 459) в различные сезоны 2009–2014, 2016 годов. Эти данные были интерполированы на неравномерную сетку с высоким разрешением 30 м в диапазоне высот 0÷1 км, которое постепенно снижается и доходит до 0,5 км на высоте 15 км (всего 128 узлов сетки).

На рис. 1 в качестве примера показаны первые 6 ЭОФ, полученные в результате применения аппарата ЭОФ к выбранным данным, а в табл. 2 представлена доля первых 10 ЭОФ в общей изменчивости температуры тропосферы над Нижним Новгородом. Можно видеть, в частности, что уже первая ЭОФ отвечает за 76,5 % всех возможных вариаций температурного профиля, а первые три ЭОФ суммарно — за 94,9 %. Таким образом,

если в параметризации восстанавливаемого по радиометрическим данным профиля температуры ограничиться только тремя ЭОФ, длина вектора состояния или размерность задачи будет более чем в 40 раз меньше числа слоёв по высоте. Однако при восстановлении реальных профилей с малым количеством ЭОФ может возникать существенная ошибка (smoothing error), вызванная запретом мелкомасштабной изменчивости по высоте, которую обеспечивают отброшенные ЭОФ. Поэтому в следующих разделах проведён анализ ошибок восстановления температуры тропосферы изложенным здесь методом и исследована зависимость этой ошибки от числа учитываемых в параметризации ЭОФ.

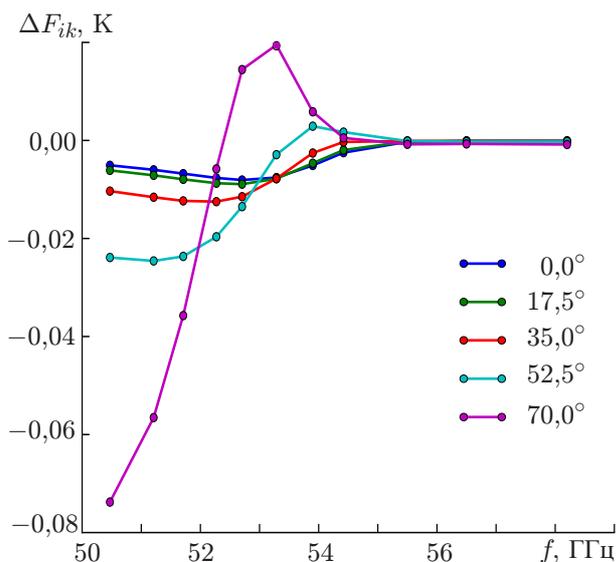


Рис. 2. Ошибка модели прямой задачи, связанная с отсутствием учёта конечной ширины диаграммы направленности антенны

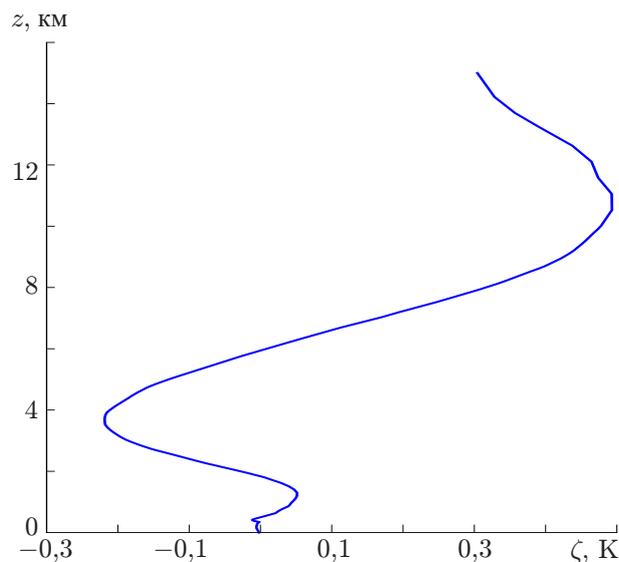


Рис. 3. Оценка систематической ошибки восстановления вертикального профиля температуры, связанная с отсутствием учёта конечной ширины диаграммы направленности антенны

4. АНАЛИЗ ОШИБОК

В дистанционном зондировании атмосферы сложился общепринятый набор методик, применяемых для анализа ошибок восстановления, в соответствии с формализмом [23]. В их основе лежит рассмотрение линеаризованной процедуры восстановления вблизи, например, среднего априорного профиля восстанавливаемой характеристики атмосферы. Во-первых, это позволяет оценить вклад малых ошибок (как систематических, так и случайных), во-вторых, даёт возможность использовать мощный и общеизвестный аппарат линейной алгебры.

Дифференцирование по вектору измерения результата восстановления, заключающегося в минимизации функции (8), приводит к известному в методе оптимальной оценки выражению

$$\mathbf{G}_R = (\mathbf{K}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K} + \mathbf{\Sigma}^{-1})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{S}^{-1}, \quad (16)$$

где \mathbf{K} — матрица производных прямой задачи (2) ($K_{ab} = \partial F_a / \partial \mu_b$), вычисленная в найденном минимуме функции (8). Матрица \mathbf{G}_R описывает чувствительность результата восстановления к малым изменениям в векторе измерений. Она имеет множество применений, одно из которых — оценка влияния факторов, неучтённых в прямой задаче (2) (дефекта модели). В частности, можно определить влияние конечной ширины диаграммы направленности измерительной антенны. В этом случае систематическая ошибка в измерении яркостных температур оценивается как

$$\Delta F_q = \Delta F_{ik} = \frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial \theta_k^2} \frac{\Delta \theta}{8 \ln 2}, \quad (17)$$

где θ_k — зенитный угол, $\Delta \theta$ — ширина диаграммы направленности антенны, делитель $8 \ln 2$ возникает вследствие свёртки гауссова пучка с функцией, квадратичной по зенитному углу, производная $\partial^2 F_{ik} / (\partial \theta_k^2)$ рассчитывается численно. Напомним, что для антенных систем спектро-радиометров, разработанных в ИПФ РАН, $\Delta \theta = 2,0^\circ \div 2,5^\circ$.

На рис. 2 представлена ошибка измерений этими приборами, определяемая выражением (17), в зависимости от частоты и угла наблюдения. Можно видеть, во-первых, что её величина мак-

симальна (около 0,075 К) при зенитном угле 70°. Во-вторых, данные зависимости хорошо (как качественно, так и количественно) соответствуют результатам работы [36] (см. рис. 9 в этой работе), где эта ошибка определялась для микроволнового прибора TEMPERA, подобного нашему комплексу спектрорадиометров. Умножая матрицу (16) на представленные зависимости ошибки измерений яркостных температур (17), получаем систематическую погрешность ζ восстановления профиля температуры вследствие ненулевой $\Delta\theta$ (см. рис. 3). Можно видеть, что максимальная смещённость профиля составляет 0,5 К на высоте 11 км.

Применяя матрицу \mathbf{G}_R к линеаризации прямой задачи, можно получить линейный отклик процедуры восстановления на изменения истинного атмосферного профиля — матрицу сглаживающих (усредняющих) ядер задачи:

$$A_{i,j} = \partial\mu_{\text{ret } i} / \partial\mu_{\text{true } j}, \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\text{ret}}$ — вектор состояния, определяющий восстановленный профиль, $\boldsymbol{\mu}_{\text{true}}$ — истинный вектор состояния. Матрица \mathbf{A} описывает искажения в результате восстановления, обусловленные как прямой задачей (физикой измерений), так и используемой априорной информацией. Как правило, она оценивается как

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_R \mathbf{K} = (\mathbf{K}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K} + \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{K}. \quad (19)$$

При использовании обычной сеточной параметризации температурного профиля сглаживающие ядра (строки матрицы (16)) характеризуют вертикальное разрешение измеряющей системы (т. е. прибора вместе с алгоритмом восстановления). При использовании ЭОФ-параметризации матрица (18) не имеет подобной наглядной интерпретации, однако путём преобразований можно оценить сглаживающие ядра измерительной системы в обычной сеточной параметризации:

$$\mathbf{A}_{\text{uni}} = \mathbf{T}_{\text{uni}} \mathbf{G}_R \mathbf{K}_{\text{uni}}, \quad (20)$$

где \mathbf{T}_{uni} — матрица перехода от ЭОФ параметризации к однородной сетке по высоте, \mathbf{K}_{uni} — матрица производных прямой задачи с параметризацией в виде однородной сетки. При этом профиль для взятия производных выбирается наиболее близким (в смысле наименьших квадратов) к профилю, полученному при восстановлении с использованием ЭОФ-параметризации. Отметим, что в случае совпадения сеток это будет один и тот же профиль. Для однородной сетки в диапазоне высот 0÷15 км с шагом 100 м сглаживающие ядра (строки матрицы (20)) показаны на рис. 4. По ширине этих ядер, взятой по уровню, соответствующему половине максимума каждого ядра (FWHM, см., например [25]), оценивается вертикальное разрешение измеряющей системы η в зависимости от высоты (см. рис. 5). Там же на рис. 4 и 5 представлена характеристика χ , называемая чувствительностью (sensitivity [19] или measurements response [25]) и представляющая собой сумму всех элементов строки матрицы (20). Близость этой характеристики к единице во всём диапазоне высот указывает на то, что результат восстановления определяется в основном радиометрическими измерениями, а не априорным профилем.

Матрица сглаживающих ядер (19) также применяется для исследования информационной составляющей задачи. Её след равен количеству степеней свободы сигнала — оценке количества независимых частей информации, содержащихся в измерении и относящихся к сигналу (в нашем случае, температурному профилю). Вычисления показали, что для спектров в диапазоне 50÷55 ГГц число степеней свободы задачи равно 3,8, а при использовании спектров 50÷59 ГГц — 5,1.

Характеристикой, близкой по смыслу к количеству степеней свободы, является эффективный ранг задачи. Он соответствует тому, сколько независимых линейных комбинаций (из компонент

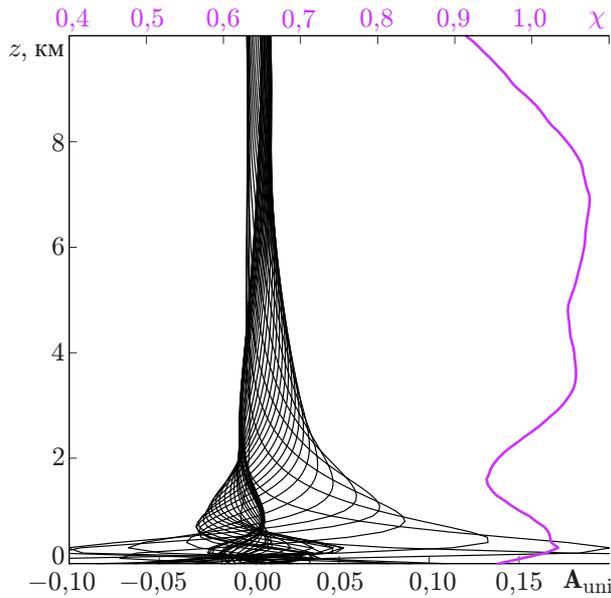


Рис. 4. Сглаживающие ядра описанной в статье измерительной системы, использующей ЭОФ-параметризацию, в контексте формулы (20)

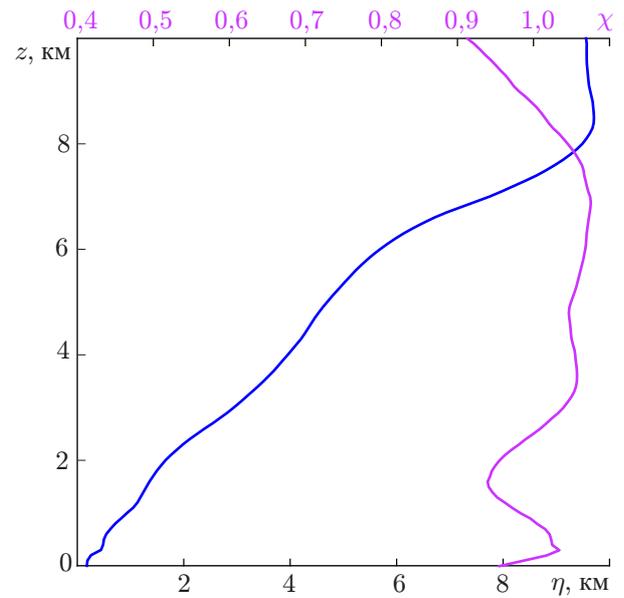


Рис. 5. Разрешение по высоте η и чувствительность χ

вектора состояния) может быть определено на фоне ошибки, вызванной шумом измерений. Эффективный ранг определяется как количество сингулярных чисел матрицы

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{K} \mathbf{\Sigma}^{1/2}, \quad (21)$$

которые по величине больше 1, где \mathbf{K} — матрица производных прямой задачи (2), \mathbf{S} — корреляционная матрица шума,

$$\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^T, \quad (22)$$

где $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$, \mathbf{U} — унитарная матрица перехода в базис собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных значений. Напомним, что она является диагональной матрицей, поэтому матрица $\mathbf{S}^{1/2}$ также является диагональной и имеет ненулевые элементы $\mathbf{S}_{ii}^{1/2} = 1/\sigma_i$. Расчёты для данных, использованных в разделе 4, показали, что для спектров для диапазона 50÷55 ГГц эффективный ранг задачи равен 4, а при использовании спектров 50÷59 ГГц — 5.

Следует отметить, что количество степеней свободы и эффективный ранг являются информационными характеристиками линеаризованной задачи. Для этих оценок производные прямой задачи соответствуют априорному профилю. Значения этих величин для приборов, анализирующих спектр в диапазоне частот 50÷55 ГГц, оказались меньше, чем для диапазона 50÷59 ГГц. Это отражает тот факт, что привлечение дополнительных спектральных данных увеличивает информативную составляющую измерений.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТРОПОСФЕРЫ

Тестовый ансамбль модельных зашумленных спектров собственного излучения атмосферы в диапазонах частот 50÷55; 55÷59 и 50÷59 ГГц с характеристиками, указанными в разделе 1, был получен в результате применения прямой задачи к ансамблю из 200 профилей температуры атмосферы в диапазоне высот 0÷15 км ($T_i(z)$, $i = 1, \dots, N_{\text{test}}$), случайным образом выбранных из полной базы данных априорной информации, при зенитных углах 0°; 17,5°; 35,0°; 52,5° и 70,0°.

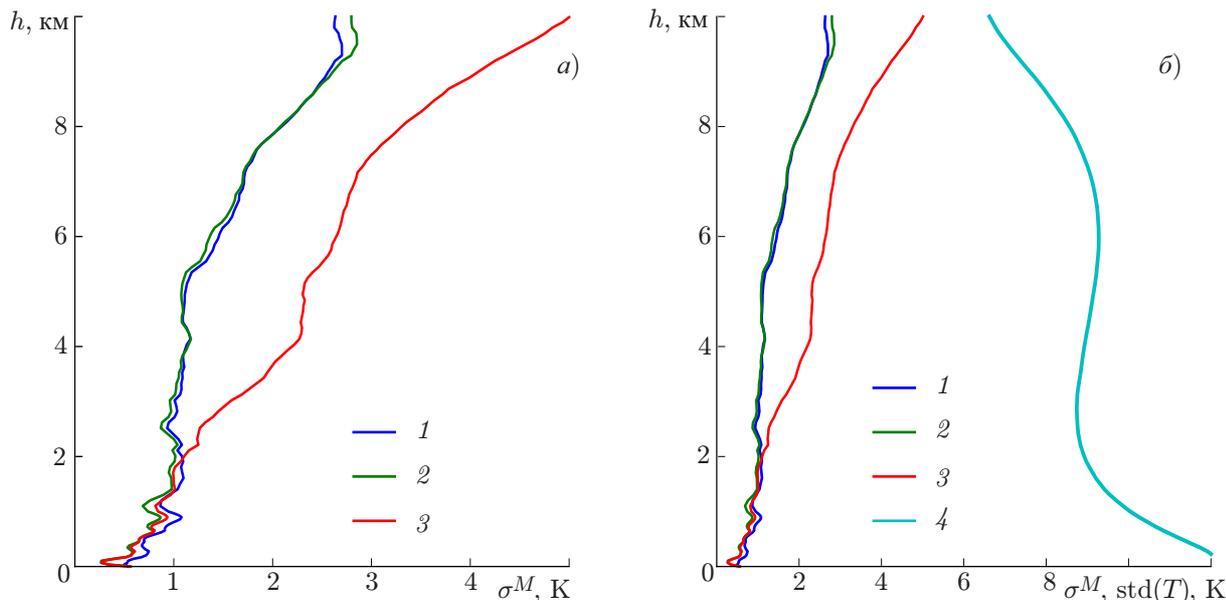


Рис. 6. Профили среднеквадратичного отклонения результатов восстановления от исходных данных при $M = 15$. Кривые 1 соответствуют диапазону частот $50 \div 55$ ГГц, кривые 2 — $50 \div 55$ ГГц, кривые 3 — $55 \div 59$ ГГц (а). На панели б представлена среднеквадратичная изменчивость тропосферного профиля температуры $std(T)$ (кривая 4)

По каждому набору из 5 спектров проведено восстановление температурного профиля при разном количестве ЭОФ (M), используемых в параметризации. Число M соответствует длине вектора состояния, его значение варьировалось от 1 до 15. Интегрирование по высоте в прямой задаче (2) осуществлялась методом трапеций. Сетка интегрирования по высоте фиксирована (1300 слоёв) и выбиралась так, чтобы обеспечить высокую точность вычислений для типичных профилей. Интегрирование по частоте в выражении (3) осуществлялось методом Симпсона со следующей оптимизацией. С целью ускорения численных расчётов были введены опорные частоты, проведена интерполяция зависимости яркостной температуры от частоты с помощью многочленов Лагранжа и вычислены аналитические интегралы от них. Минимизация функционала (8) по вектору состояния μ проводилась с помощью алгоритма Бroyдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно (BFGS) [37], который эквивалентен традиционно применяемой квазиньютоновской итерационной процедуре.

В результате для каждого диапазона частот $50 \div 55$; $55 \div 59$ и $50 \div 59$ ГГц были получены 15 ансамблей восстановленных профилей $\hat{T}_i^M(z)$, $i = 1, \dots, N_{\text{test}}$, $M = 1, \dots, 15$. По каждому ансамблю были найдены профили среднеквадратичного отклонения результатов восстановления от исходных данных в зависимости от M :

$$\sigma^M(z) = \sqrt{N_{\text{test}}^{-1} \sum_i^{N_{\text{test}}} [\hat{T}_i^M(z) - T_i(z)]^2}. \tag{23}$$

На рис. 6 показаны примеры этих профилей в сравнении с общей вариацией температурного профиля ($std(T)$). На рис. 7 $\lambda = \sigma^M(z)/\sigma^{15}(z)$ (среднеквадратичное отклонение $\sigma^M(z)$, нормированное на $\sigma^{15}(z)$), представлено в виде контурной карты как функция от высоты и числа ЭОФ.

Из представленных рисунков можно видеть, что, начиная с определённого (вообще говоря, в каждом случае разного) номера ЭОФ, ошибка восстановления в интересующем нас диапазоне высот перестаёт существенно изменяться, т. е. наступает насыщение. Таким образом, рис. 6 фак-

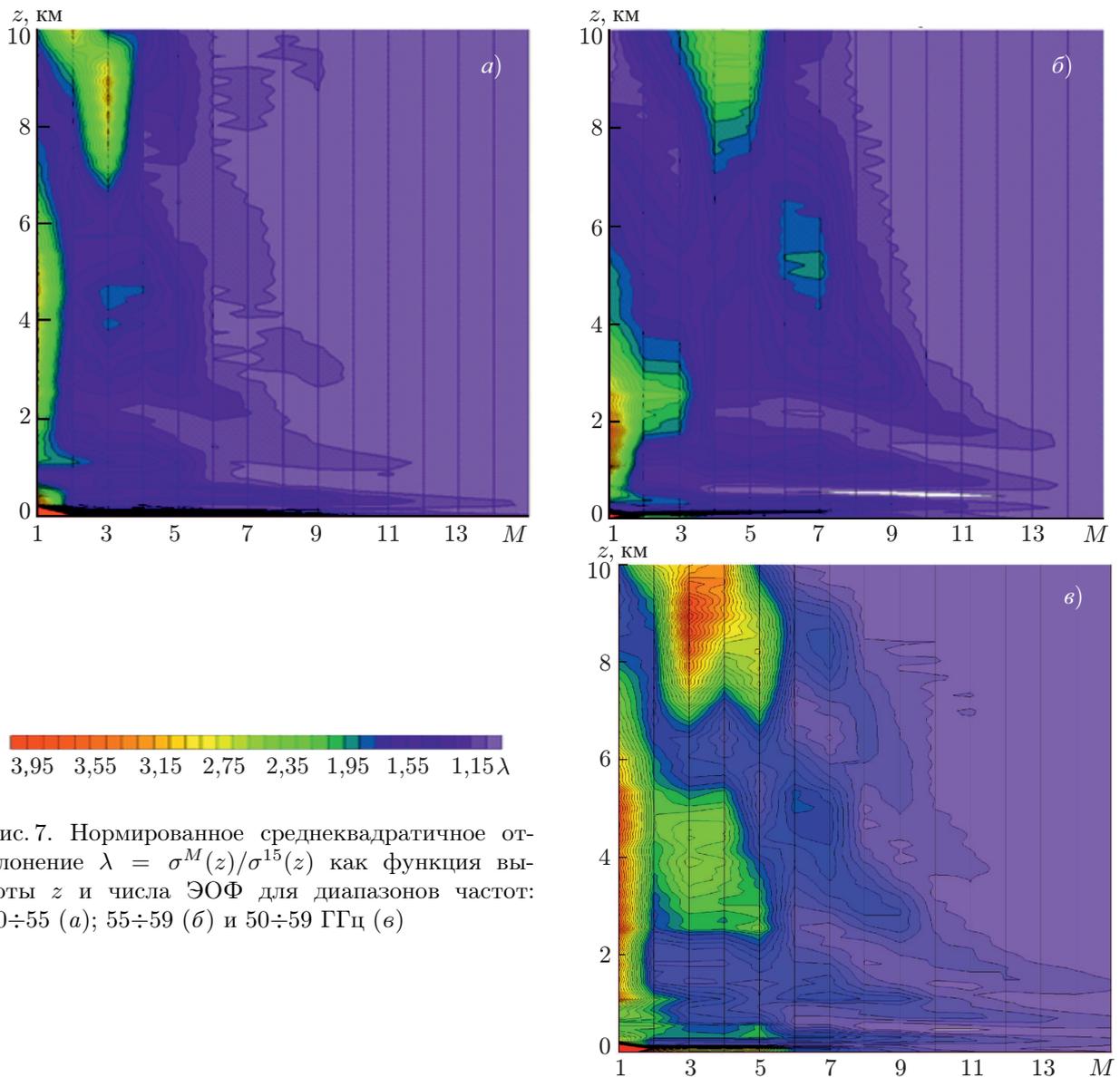


Рис. 7. Нормированное среднеквадратичное отклонение $\lambda = \sigma^M(z)/\sigma^{15}(z)$ как функция высоты z и числа ЭОФ для диапазонов частот: 50÷55 (а); 55÷59 (б) и 50÷59 ГГц (в)

тически демонстрирует предельные возможности метода для разных частотных диапазонов. Как можно было ожидать, высокочастотный спектр (55÷59 ГГц) позволяет очень хорошо (до величины точности 0,3 К на 0,1 км) восстанавливать температуру ниже примерно 2 км, при этом для достижения точности не хуже 1 К при параметризации достаточно взять всего 8 первых ЭОФ. Выше 2 км данный частотный диапазон сильно проигрывает качеству восстановления по спектрам в диапазоне 50÷55 ГГц, для которых оказывается достаточно использовать всего 6 первых ЭОФ, чтобы ошибка восстановления для высот 2÷10 км была вблизи насыщения. Отметим также, что спектры, измеренные в диапазоне частот 50÷55 ГГц, потенциально можно использовать и для восстановления профиля температуры ниже 2 км, если нас интересует точность не хуже примерно 1 К. В этом случае оптимальное количество ЭОФ равно 8. Интуитивно можно ожидать, что восстановление по полному диапазону частот 50÷59 ГГц должно включать в себя основные свойства восстановления по спектрам в диапазонах 50÷55 и 55÷59 ГГц. Однако из рис. 7 можно видеть, что для достижения насыщения ошибки во всём диапазоне высот 0÷10 км необходимо взять, как минимум 10 ЭОФ, а параметризация при использовании только 6 ЭОФ, в отличие от

спектров в диапазоне $50 \div 55$ ГГц, приводит к существенным ошибкам выше 3 км.

Отметим, что значения эффективного ранга задачи и количества степеней свободы системы, полученные в предыдущем разделе для диапазонов частот $50 \div 55$ и $55 \div 59$ ГГц, оказываются заметно меньше указанных оптимальных количеств ЭОФ для этих диапазонов. Поэтому данные характеристики можно рассматривать только как оценку снизу. Это означает, что при использовании метода оптимальной оценки для восстановления профилей температуры тропосферы с параметризацией в виде разложения по ЭОФ необходимо для каждого конкретного прибора проводить анализ, выполненный в этом разделе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен математический аппарат метода оптимальной оценки для восстановления профилей температуры тропосферы (высоты $0 \div 10$ км) по радиометрическим данным с параметризацией в виде разложения по эмпирическим ортогональным функциям, получаемым путём сингулярного анализа ковариационной матрицы данных радиозондовых измерений. Показано, что в рамках такого подхода можно использовать сетку высокого разрешения по высоте при сравнительно небольшой размерности обратной задачи, что позволяет корректно усваивать статистику радиозондовых измерений, но при этом оперативно восстанавливать профили температуры без привлечения больших численных мощностей.

Проведено тестовое восстановление температуры по большому ансамблю модельных зашумлённых спектров собственного излучения атмосферы на основе статистики радиозондовых измерений температуры над Нижним Новгородом. Установлено, что среднеквадратичная ошибка восстановления температуры по спектрам в диапазонах частот $50 \div 55$; $55 \div 59$ и $50 \div 59$ ГГц варьируется в диапазонах $0,5 \div 2,7$ К (на высотах $0 \div 10$ км), $0,3 \div 1,0$ К (на высотах $0 \div 2$ км) и $0,3 \div 2,8$ К (на высотах $0 \div 10$ км) соответственно. При этом оптимальное количество ЭОФ составляет 6–8 в случае спектров в диапазоне $50 \div 55$ ГГц, 8 в случае спектров в диапазоне $55 \div 59$ ГГц и 10 в случае спектров в диапазоне $50 \div 59$ ГГц. Таким образом, для определённого класса атмосферных приложений, где не требуется повышенная (заметно лучше 1 К) точность восстановления температуры в слое $0 \div 1$ км, оптимальными с точки зрения скорости восстановления температуры во всём диапазоне высот $0 \div 10$ км являются спектры, измеряемые в диапазоне частот $50 \div 55$ ГГц. В случае микроволновой аппаратуры ИПФ РАН, где полоса частот $50 \div 60$ ГГц анализируется двумя отдельными приборами, для такого класса задач достаточно использовать только один спектрометр, изначально предназначенный для зондирования свободной тропосферы.

В следующей работе будут представлены результаты применения разработанного подхода для восстановления профилей температуры тропосферы по реальным радиометрическим данным, получаемым прибором RPG-NATPRO и спектрометрами ИПФ РАН, в сравнении с радиозондовыми измерениями температуры. Отдельное внимание будет уделено модификации изложенного алгоритма для идентификации и восстановления профилей, отвечающих редким событиям, плохо представленным в статистике, что требует ослабления или полного удаления в обратной задаче статистической регуляризации, описываемой априорным слагаемым в функционале (8).

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 18-72-10113). Программный код для анализа ошибок дистанционного зондирования разработан при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-35-00675. Авторы благодарят Андрея Гаврилова за плодотворную дискуссию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакина Н. П., Иванова А. Р. Прогнозирование метеорологических условий для авиации. М.: Триада ЛТД, 2016. 312 с.
2. <https://library.wmo.int/>.
3. Тимофеев Ю. М. Глобальная система мониторинга параметров атмосферы и поверхности СПб.: Физ. факультет СПбГУ, 2010. 129 с.
4. Westwater E. R., Han Y., Irisov V. G., Leuvskiy V., et al. // J. Atmos. Ocean. Technol. 1999. V. 16. P. 805.
5. Кадыгров Е. Н., Горелик А. Г., Миллер Е. А. и др. // Оптика атмосферы и океана. 2013. Т. 26. С. 459.
6. Кадыгров Е. Н., Кузнецова И. Н., Ганьшин Е. В. и др. // Оптика атмосферы и океана. 2017. Т. 30, № 6. С. 502.
7. Chan P. W. // Meteorologische Zeitschrift. 2009. V. 18. P. 253.
8. Barrere C. A., Eilts Jr. M., Johnson J., et al. // Proc. 13th Conf. Aviation, Range, and Aerospace Met., 21–24 January 2008. New Orleans, USA. Rep. No. 4.7.
9. Shaw B. L., Barrere C. A. Jr., Carpenter R. L. Jr., Spencer P. L. // 13th Conf. Aviation, Range, and Aerospace Meteorology, 21–24 January 2008. New Orleans, USA.
10. Madhulatha A., George J. P., Rajagopal E. N. // J. Geophys. Res. 2013. V. 118, No. 1. P. 1.
11. Güldner J. // Atmos. Meas. Tech. 2013. V. 6. P. 2879.
12. Cimini D., Rizi V., Cirolamo P. D., et al. // Atmos. Meas. Tech. 2014. V. 7. P. 2981.
13. Cimini D., Nelson M., Güldner J., Ware R. // Atmos. Meas. Tech. 2015. V. 8. P. 315.
14. Ware R., Cimini D., Campos E., et al. // Atmospheric Res. 2013. V. 132–133. P. 278.
15. Massaro G., Stiperski I., Pospichal B., Rotach M. W. // Atmos. Meas. Tech. 2015. V. 8. P. 3355.
16. Instrument Operation and Software Guide: Operation Principles and Software Description for RPG standard single polarization radiometers (G5 series). http://www.radiometer-physics.de/download/PDF/Radiometers/HATPRO/RPG_MWR_STD_Software_Manual%20G5.pdf.
17. Зайцев Н. А., Тимофеев Ю. М., Косцов В. С. // Оптика атмосферы и океана. 2014. Т. 27. № 5. С. 392. No. 5. P. 386.
18. Kostsov V. S., Timofeyev Yu. M., Zaitsev N. A., et al. // Int. J. Rem. Sens. 2016. V. 37, No. 14. P. 3346.
19. Kostsov V. S. // Int. J. Rem. Sens. 2015. V. 36, No. 11. P. 2963.
20. Косцов В. С. // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51, № 2. С. 179.
21. Liebe H. J. // Int. J. Infrared Millim. Waves. 1989. V. 10. P. 631.
22. Rosenkranz P. W. Absorption of microwaves by atmospheric gases, in: Atmospheric remote sensing by microwave radiometry / eds. M. A. Janssen. John Wiley & Sons, 1993. P. 37.
23. Rodgers C. D. Inverse methods for atmospheric sounding: theory and practice. World Scientific, 2000. 238 p.
24. Lohnert U., Turner D., Crewell S. // J. Appl. Meteorol. Climatol. 2009. V. 48. P. 1017.
25. Stahli O., Murk A., Kampf N., et al. // Atmos. Meas. Tech. 2013. V. 6. P. 2477.
26. Малкевич М. С., Татарский В. И. // Косм. исследов. 1965. Т. 3. С. 444.
27. Катаев М. Ю., Лукьянов А. К. // Вестник Волгоградского госуниверситета. Сер. 1: Математика. Физика. 2013. № 2 (19). С. 99.
28. Поляков А. В., Тимофеев Ю. М., Виролайнен Я. А. // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 3. С. 373.
29. Рыскин В. Г., Швецов А. А., Куликов М. Ю. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 8–9. С. 819.

30. Швецов А. А., Рыскин В. Г., Куликов М. Ю. и др. // Приборы и техника эксперимента. 2016. № 3. С. 105.
31. Красильников А. А., Куликов М. Ю., Кукин Л. М. и др. // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 2. С. 123.
32. Обухов А. М. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1960. № 3. С. 432.
33. Jolliffe I. T. Principal component analysis. Springer Ser. in Statistics (2nd ed.). New York: Springer, 2002. 497 p.
34. North G. R., Bell T. L., Cahalan R. F., Moeng F. J. // Monthly Weather Rev. 1982. V. 110, No. 7. P. 699.
35. Baldwin M. P., Stephenson D. B., Jolliffe I. T. // J. Climate. 2009. V. 22, P. 234.
36. Navas-Guzman F., Kampfer N., Haeferle A. // Atmos. Meas. Tech. 2016. V. 9. P. 4587.
37. Fletcher R. Practical methods of optimization (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons. 2013. 456 p.

Поступила в редакцию 22 марта 2019 г.; принята в печать 30 сентября 2019 г.

**APPLICATION OF EMPIRICAL ORTHOGONAL FUNCTIONS
PARAMETERIZATION IN THE PROBLEM
OF RETRIEVAL OF THE TROPOSPHERIC THERMAL STRUCTURE
BY RADIOMETRIC DATA**

*M. V. Belikovich, M. Yu. Kulikov, V. G. Ryskin, A. A. Shvetsov, A. A. Krasilnikov, N. K. Skalyga,
E. A. Serov, and A. M. Feigin*

We describe the mathematical tools of the optimal estimation method for retrieval of tropospheric temperature profiles (0–10 km) from radiometric data with the desired profiles parameterized in the form of expansion over empirical orthogonal functions obtained by a singular analysis of the covariance matrix of the radiosonde measurement data. It is shown that within the framework of such an approach one can use a high-resolution altitude grid for a relatively small dimension of the inverse problem. This permits one to properly analyze the statistics of radiosonde measurements and, at the same time, retrieve the temperature profiles without using a large computing power. We have conducted test retrievals of temperature using a large ensemble of simulated noisy spectra of atmospheric self-radiation based on the statistics of radiosonde temperature measurements above Nizhny Novgorod. It is found that the r.m.s. error of temperature retrieval from spectra in frequency ranges 50–55 GHz, 55–59 GHz, and 50–59 GHz varies within the ranges 0.5–2.7 K (at altitudes of 0–10 km), 0.3–1 K (at altitudes of 0–2 km), and 0.3–2.8 K (at altitudes of 0–10 km), respectively. The optimal number of empirical orthogonal functions (dimension of the problem) is 6–8 in the case of the 50–55 GHz spectra, 8 in the case of the 55–59 GHz spectra, and 10 in the case of the 50–59 GHz spectra.