

УДК 534.2+534.6.08+550.834

АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ПОРИСТЫМ НАСЫЩЕННЫМ СЛОЕМ

*А. В. Лебедев**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Исследовано распространение сейсмоакустических волн в трёхслойной среде, состоящей из однородного изотропного деформируемого твёрдого слоя, нагруженного на однородный пористый слой, насыщенный жидкостью. В свою очередь, пористый слой покрывает однородное изотропное твёрдое полупространство. Данная среда моделирует геологический разрез, в котором верхний слой грунта отделён от глубинных пород пористым слоем, содержащим значительное количество жидкости. Проведён анализ полученного дисперсионного уравнения и представлены его решения для важных с практической точки зрения случаев. Отмечены эффекты, обусловленные перемещением жидкой фазы относительно деформируемого твёрдого скелета при прохождении волны. Выявлены характерные особенности дисперсионных кривых и пространственного распределения полей мод, позволяющие не только устанавливать наличие под верхним слоем грунта насыщенного жидкостью пористого слоя, но и определять его мощность и глубину залегания.

ВВЕДЕНИЕ

Дистанционная диагностика структурных неоднородностей природных сред представляет значительный практический интерес, в том числе для оценки параметров грунта при строительстве инженерных сооружений, устойчивости уже имеющихся строений, для обнаружения зарождающихся карстовых провалов и тому подобного. В большинстве случаев природные среды являются пористыми, т. е. содержат значительное количество пустот, заполненных газом или жидкостью. От объёмного содержания жидкости существенно зависит устойчивость грунта, что часто связывается с уменьшением силы трения, отвечающей за сцепление разнородных по составу слоёв. С практической точки зрения наибольший интерес представляет анализ характеристик приповерхностных слоёв до глубин в несколько десятков метров [1]. Примеры сейсмоакустических исследований на малых глубинах, где в качестве пробных волн используются объёмные волны, для которых применяются стандартные для сейсмической разведки методы анализа отражённых и преломлённых волн [2, 3], хорошо известны (см., например, [4, 5]). Физические основы инженерной сейсмоакустики представлены, например, в [6–8], прикладные задачи инженерной сейсмоакустики, к которым, в частности, относится рассматриваемая в данной работе диагностика содержания жидкости, перечислены в [6, 7].

Наряду с объёмными волнами интерес представляют поверхностные волны, характеристики которых также отражают особенности строения пористой среды. Наличие неоднородности среды по глубине приводит к появлению дисперсии поверхностной волны, что позволяет проводить дистанционную диагностику неоднородностей [9–11]. История и современное состояние методов диагностики на поверхностных волнах Рэлея и Стоунли представлена в [12, 13]. Отметим, что в указанных выше работах, посвящённых методам дистанционной диагностики на поверхностных волнах, учитывается наличие пористости и возможное содержание жидкости только посредством замены пористой среды на эффективно однородную упругую. Возможность дистанционной диагностики эффектов относительного перемещения жидкости (ненулевой проницаемости) в пористых средах не рассматривалась.

* swan@appl.sci-nnov.ru

Подробный анализ работ по распространению поверхностных волн в пористом полупространстве представлен в [14–16]. При наличии свободной границы пористого полупространства имеется только одна поверхностная волна рэлеевского типа. Возникновение второй волны типа Стоунли—Шолте возможно при контакте пористого полупространства с жидким и граничных условиях, обеспечивающих обмен жидкостью между пористой и жидкой средами. Таким образом, основным качественным отличием от классической задачи Лэмба для волны Рэлея на свободной границе упругого полупространства является появление дополнительного затухания, обусловленного движением жидкости относительно деформируемого твёрдого скелета.

Целью данной работы является теоретическое исследование эффектов, связанных с наличием пористого насыщенного жидкостью слоя, расположенного между непроницаемыми для жидкости упругим слоем сверху и упругим полупространством снизу. Рассматриваемая задача моделирует часто встречающееся в природе наличие насыщенного подземными водами пористого слоя, ограниченного сверху и снизу непроницаемыми породами. Выбор модели в виде набора плоских параллельных слоёв обусловлен накоплением осадочных отложений в поле тяжести Земли, что приводит к появлению подобных плоскостойких структур. Теория распространения волн в слоистых структурах имеет долгую историю (см., например, [17, 18] и многие другие монографии). Обзор современного состояния проблемы представлен в недавно вышедших монографиях [19, 20]. Стандартное описание сводится к численному решению системы уравнений в виде ленточных матриц (матричного пропагатора) [21]. При построении численной модели мы существенным образом опирались на материалы, представленные в указанных монографиях.

Ранее нами была рассмотрена модельная задача о водоносном слое с нулевым модулем сдвига при его расположении между упругими средами [22]. Эта модель отвечает отсутствию консолидации в пористой среде, когда модуль сдвига и объёмной жёсткости упаковки гранул стремятся к нулю [23]. Полученное в [22] аналитическое решение выявило наличие двух нормальных волн, не имеющих частот запираания (мода Рэлея и изгибная мода колебаний верхнего упругого слоя). Было показано, что анализ дисперсионных характеристик этих нормальных волн позволяет оценить глубину залегания и мощность водоносного слоя при использовании дистанционных методов исследования. Кроме того, наличие аналитического решения позволило провести калибровку численного алгоритма, с помощью которого получены дисперсионные зависимости, представленные в данной работе.

Возможность дистанционной диагностики сквозного течения в пористом слое представляет значительный интерес. Поскольку перемещение жидкости связано с ненулевой проницаемостью, поставленный вопрос сводится к оценке этого важного параметра пористых сред. Предметом данного исследования является анализ дисперсионных соотношений и затухания волны Рэлея в упругой среде, включающей пористый слой. Полученное решение может быть использовано для организации оптимальной дистанционной диагностики с помощью поверхностных волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что имеется среда, моделирующая геологический разрез, в котором верхний слой грунта отделён от глубинных пород пористым слоем, насыщенным жидкостью, например водой. Такая модельная среда состоит из двух слоёв и полупространства. Рассмотрим распространение волн в такой среде при их возбуждении вертикальным силовым гармоническим источником, помещённым в начало координат. В дальнейшем все величины предполагаются зависящими от времени t как $\exp(-i\omega t)$, где ω — циклическая частота источника. При амплитудах деформаций менее 10^{-6} , что характерно для возбуждения сейсмических волн портативным вибрационным источником [24], выраженные нелинейные эффекты в пористых и упругих средах не проявля-

ются [25] и поэтому линейное описание отвечает интересующим нас задачам дистанционной сейсмоакустической диагностики. Выбор вертикальной силы, приложенной к свободной (дневной) поверхности, в качестве источника обусловлен высокой эффективностью возбуждения поверхностных волн источником такого типа (см., например, [26]).

Строение рассматриваемой среды и используемые обозначения поясняются на рис. 1. Величины ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 отвечают плотности соответствующих слоёв, ρ_0 — плотность жидкости, заполняющей поры, величина V_{nP} , где $n = 1, 2, 3$, определяет скорость продольной волны (звука) в слое с номером n , V_{nS} — скорость волны сдвига в соответствующем слое. Пористая среда в рамках модели Био описывается набором параметров. Этими параметрами являются K_b , K_s , K_f — объёмные модули жёсткости сухой пористой среды, составляющих её зёрен и жидкости, заполняющей поры, соответственно, N — модуль сдвига пористой среды (в рамках модели Био предполагается, что модуль сдвига не меняется при насыщении пористой среды жидкостью); ϕ — пористость, или объёмное содержание пор, отнесённое к полному объёму среды; проницаемость κ характеризует степень связности пор друг с другом. Дополнительными параметрами являются плотности скелета ρ_s и параметр извилистости пор α , равный отношению расстояния вдоль поры к длине отрезка, соединяющего начало и конец поры.

В приложении, которое опирается на известные результаты и имеет по большей части справочный характер, приведены известные из литературы уравнения связи напряжений и смещений, а также волновые уравнения для пористой среды. Там же дано более подробное пояснение физического смысла перечисленных выше параметров.

Вектор смещения $\mathbf{u}$ может быть представлен в виде суперпозиции производных от скалярного и векторного потенциалов: $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$. В силу осевой симметрии задачи относительно вектора силы (см. рис. 1) векторный потенциал имеет только одну ненулевую проекцию Ψ вдоль направления $\mathbf{r} \times \mathbf{z}$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{z}$ — орты осей r и z . В пористом слое вектор смещения флюида $\mathbf{U}$ в общем случае не равен вектору смещения скелета $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi$, соответствующая ненулевая проекция вектора ψ будет обозначаться ψ . Потенциалы для $\mathbf{u}$ в каждом из трёх слоёв равны

$$\Phi_j(r, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_j(\kappa, z) \kappa H_0(\kappa r) d\kappa, \quad (1)$$

$$\Psi_j(r, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Psi}_j(\kappa, z) \kappa H_1(\kappa r) d\kappa, \quad (2)$$

где $H_0(\xi)$ и $H_1(\xi)$ — функции Ханкеля I рода 0-го и 1-го порядка соответственно, κ — одинаковая для всех слоёв горизонтальная (вдоль $\mathbf{r}$, см. рис. 1) проекция волнового вектора. Индекс $j = 1, 2, 3$ отвечает порядковому номеру слоя в рассматриваемой модели. Для пористого слоя ($j = 2$) записываются аналогичные (1) и (2) выражения для потенциалов, отвечающих полному смещению в жидкости, заполняющей поры. Отношения амплитуд скалярных и векторных потенциалов для смещений скелета и жидкости в пористом слое не зависят от κ (см. выражения (П13))

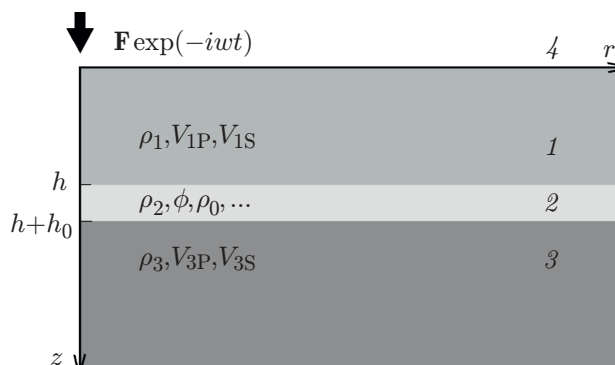


Рис. 1. Рассматриваемая модель среды с пористым слоем: 1 — упругий слой, 2 — пористый слой, 3 — упругое полупространство, 4 — вакуум

и (П18) в приложении):

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_2^{(f)}}{\Phi_2^{(f)}}, \quad \gamma_2 = \frac{\varphi_2^{(s)}}{\Phi_2^{(s)}}, \quad \gamma_3 = \frac{\psi_2}{\Psi_2}, \quad (3)$$

и определяются решениями волновых уравнений для пористой среды. Величины γ_1 и γ_2 отвечают быстрой и медленной объёмным волнам в пористой среде, что отражают верхние индексы f и s (см. подробнее в приложении).

Решение волновых уравнений (см. (П11) и (П12) в Приложении) относительно амплитуд потенциалов определяется граничными условиями. На свободной поверхности $z = 0$ граничные условия имеют стандартный вид: $\sigma_{zz} = F\delta(r)/(2\pi r)$ (нормальные напряжения отсутствуют везде, кроме точки или, в общем случае, области приложения силы; $\delta(r)$ — дельта-функция), $\sigma_{rz} = 0$ (тангенциальные усилия отсутствуют на всей поверхности). Наибольший интерес представляют граничные условия при $z = h$ и $z = h + h_0$. Изначально в классической работе Био [27] граничные условия не рассматривались. В упоминавшейся выше работе [15] представлено обсуждение граничных условий для контакта пористой среды с упругой или жидкой средами. В статье [28] отмечено существование и единственность волнового решения для приведённой ниже системы граничных условий (4)–(8).

Граничные условия при $z = h$, $h + h_0$ для слоистой среды, находящейся в контакте с упругими средами, как показано на рис. 1, имеют вид

$$[u_z] = 0, \quad (4)$$

$$[u_r] = 0, \quad (5)$$

$$U_z^{(2)} - u_z^{(2)} = 0, \quad (6)$$

$$[\sigma_{zz}] = 0, \quad (7)$$

$$[\sigma_{rz}] = 0, \quad (8)$$

где квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины при переходе через границу. Тензор напряжений σ_{ij} в пористой среде определён выражением (П1) в приложении, тензор напряжений в упругих средах даётся законом Гука (см., например, [29]).

Таким образом, к стандартным условиям непрерывности смещений и напряжений добавляется условие «непротекания» жидкости из пространства пор в упругие среды. Предполагается, что на границах пористой среды $z = h$ и $z = h + h_0$ все поры закрыты лежащими снизу и сверху непроницаемыми для жидкости упругими средами. Этот момент важно отметить, поскольку, например, при контакте пористой среды с жидкостью поры оказываются открытыми и вместо кинематического условия на вертикальную проекцию вектора смещения в скелете и порах следует рассматривать динамическое условие равенства давления жидкости (подробнее см. в [15]). В этом случае имеет место эффективное возбуждение медленной волны Био в пористой среде, что в морской акустике приводит к заметному изменению коэффициентов отражения акустических волн от дна [25]. Как показано в эксперименте [30], закрытие пор на границе раздела жидкость—пористое тело существенным образом ослабляло возбуждение медленной волны Био в пористой среде. При закрытии пор повышается порядок источника: из монопольного (изменение объёма жидкости в порах за счёт притока жидкости извне) он превращается в дипольный (силовой). Следовательно, ещё не решая задачу, можно предположить низкую эффективность возбуждения медленной волны Био силовым источником, размещённым на поверхности (см. рис. 1).

В дальнейшем нас будет интересовать решение дисперсионного уравнения для поверхностной волны рэлеевского типа, пространственная структура соответствующей моды и эффективность её возбуждения силовым источником (см. рис. 1). Эти характеристики представляют интерес для реализации метода дистанционной диагностики пористого насыщенного слоя.

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Каждый из потенциалов описывается амплитудой восходящей (распространяющейся в сторону $z < 0$, по направлению к поверхности) и нисходящей (распространяющейся в сторону $z > 0$) волн. Скалярный потенциал в общем случае состоит из двух слагаемых, отвечающих быстрой и медленной объёмным волнам. Следовательно, имеется 4 волны для скалярного потенциала. Векторный потенциал описывается двумя волнами. Итого пористый слой характеризуется шестью амплитудами потенциалов. Для верхнего упругого слоя имеется четыре амплитуды скалярного и векторного потенциалов. В полупространстве из-за отсутствия приходящих из бесконечности волн мы имеем две неизвестные амплитуды для скалярного и векторного потенциалов, описывающих распространение возмущения в сторону $z > 0$ и отсутствие возмущений, приходящих из бесконечности (принцип причинности Зоммерфельда). В итоге имеется 12 неизвестных амплитуд и матрица, равенство определителя которой нулю даёт дисперсионное уравнение. Аналитическое решение, подобное эталонной задаче [22], где ранг матрицы был вдвое меньше, очевидно, в рассматриваемом случае пористого слоя смысла не имеет.

Зависимости спектральных образов $\hat{\Phi}_j(\kappa, z)$ и $\hat{\Psi}_j(\kappa, z)$ от координаты z имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_j(\kappa, z) &= \mathcal{A}_j^+ \exp(+i\zeta_{j1}(z - z_j)) + \mathcal{A}_j^- \exp(-i\zeta_{j1}(z - z_{j+1})) + \\ &\quad + \mathcal{B}_j^+ \exp(+i\zeta_{j2}(z - z_j)) + \mathcal{B}_j^- \exp(-i\zeta_{j2}(z - z_{j+1})), \\ \hat{\Psi}_j(\kappa, z) &= \mathcal{C}_j^+ \exp(+i\zeta_{j3}(z - z_j)) + \mathcal{C}_j^- \exp(-i\zeta_{j3}(z - z_{j+1})),\end{aligned}\quad (9)$$

где $j = 1, 2, 3$ — номер слоя, $\zeta_{jn}^2 = K_{jn}^2 - \kappa^2$, $n = 1, 2, 3$. Значение $n = 1, 2$ отвечает продольным волнам, $n = 3$ — сдвиговым, K_{jn} — полное волновое число продольных или сдвиговых волн. Верхние индексы $+$ и $-$ отвечают волнам, распространяющимся в направлении $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Для упругих слоёв члены с индексом $n = 2$ отсутствуют, т.к. имеется только одна объёмная волна сжатия: $\mathcal{B}_1^+ = \mathcal{B}_3^+ = \mathcal{B}_1^- = \mathcal{B}_3^- \equiv 0$. Величины z_j отвечают глубинам залегания границ между слоями: $z_1 = 0$, $z_2 = h$, $z_3 = h + h_0$. Для упругого полупространства из-за отсутствия приходящих из $z = \infty$ волн $\mathcal{A}_3^- = \mathcal{B}_3^- = \mathcal{C}_3^- = 0$ и значение z_4 может быть задано произвольным. Выражения для потенциалов перемещения флюида в пористом записываются аналогично с умножением амплитуд на величины γ_n (3).

В выражениях (9) фазы волн отсчитываются от границ, которые порождают волны, распространяющиеся вниз и вверх. Для прижатых к границам (нормальных) волн $\text{Re}(\zeta_{ij}) = 0$, $\text{Im}(\zeta_{ij}) > 0$ и экспоненциальные функции должны описывать затухание от границ. Отсчёт фазы волн от границ позволяет естественным образом учесть ослабление взаимодействия границ с ростом частоты (уменьшением длины волны). Если этого не сделать, то наличие экспоненциально больших и малых членов в матрице пропагатора приводит к плохой обусловленности и потере устойчивости решения. Аналогичные приёмы, хотя и без пояснений, используются в вычислительной акустике [31].

Чтобы получить универсальную запись уравнений для всех возможных вариантов устройства сред, включая жидкие, упругие и пористые, используем следующий приём. Будем исходить из простого факта равенства нулю величин $\mathcal{B}_j^+$ и $\mathcal{B}_j^-$, связанных с медленной продольной волной для всех сред, кроме пористой. В случае жидкого слоя амплитуды $\mathcal{C}_j^+$ и $\mathcal{C}_j^-$ векторного потенциала также должны быть равны нулю. Кроме того, в силу условий причинности Зоммерфельда $\mathcal{A}_3^- = \mathcal{B}_3^- = \mathcal{C}_3^- = 0$. Следовательно, необходимо предложить универсальную запись граничных условий, при которой происходит обнуление соответствующих амплитуд скалярного и векторного потенциалов. В этом случае вычисления для всех возможных вариантов производятся единообразно, что исключает появление ошибок для частных случаев строения модельной

среды. Сравнив результат вычислений с решением эталонной задачи [22], можно быть уверенным в корректности решения для более сложной среды, составленной из большего числа слоёв, с возможной заменой жидкого слоя на пористый и тому подобного. Обнуление соответствующих амплитуд обеспечивается наличием в матрице пропагатора строки, составленной из нулей и содержащей одну единицу для соответствующей амплитуды потенциала. Поскольку в правой части для этой строки стоит нуль, такая запись эквивалентна обнулению выбранной амплитуды потенциала. В общем виде мы имеем дело с пористыми, упругими и жидкими слоями. Максимальное число ненулевых амплитуд потенциалов имеется в случае пористого слоя.

Слой Био при контакте с упругим слоем характеризуется пятью уравнениями (граничными условиями) для шести неизвестных амплитуд. Введём универсальный матричный блок размера 6×6 . Матрица пропагатора в общем случае контакта двух слоёв будет составлена из двух матричных блоков, где элементы второго из них, который стоит правее в матричных уравнениях, должны быть взяты с обратным знаком. Иными словами, если мы умеем задавать матричные блоки размера 6×6 , то из них собирается вся матрица. Для упругого слоя амплитуды медленных Р-волн должны быть равны нулю, т. к. этих волн нет в упругой среде. Следовательно, к имеющимся пяти граничным условиям (4)–(8) для слоя Био при $z = h$ и $z = h + h_0$ требуется добавить ещё одно, которое будет обеспечивать обнуление амплитуды медленной волны в упругих слоях выше и ниже пористого. Рассуждая аналогично, для случая контакта упругого и жидкого слоя мы должны дополнительно заменить граничное условие $[u_r] = 0$, а при контакте двух жидких слоев ещё и уравнение $[\sigma_{rz}] = 0$. Замена должна быть сделана таким образом, чтобы в матрице пропагатора в соответствующем месте помещалась единица, а в правой части при этом помещался нуль. Подробное описание конкретной реализации с учётом особенностей контакта пористого слоя с упругим, двух упругих, упругого и жидкого, а также двух жидких слоёв мы опустим, т. к. идея понятна. Общность записи при этом приводит к увеличению ранга матрицы пропагатора, который равен $6 \times N_1$, где N_1 — число слоёв в модели. Для модельной среды (см. рис. 1) из трёх слоёв ранг матрицы пропагатора равен 18.

Приводить громоздкие выражения для матрицы пропагатора, чтобы проиллюстрировать предложенный метод описания, смысла не имеет. Гораздо нагляднее представить эти выражения в символическом виде с указанием граничных условий:

P ⁺	P ⁻	S ⁺	S ⁻	s ⁺	s ⁻	P ⁺	P ⁻	S ⁺	S ⁻	s ⁺	s ⁻	P ⁺	P ⁻	S ⁺	S ⁻	s ⁺	s ⁻	type
*	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sigma_{zz} = 0$
0	0	*	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sigma_{rz} = 0$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$A_s^+ = 0$
*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	■	■	0	0	0	0	0	0	$[u_z] = 0$
0	0	*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0	0	0	0	$[u_r] = 0$
*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	■	■	0	0	0	0	0	0	$[\sigma_{zz}] = 0$
0	0	*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0	0	0	0	$[\sigma_{rz}] = 0$
0	0	0	0	0	0	■	■	0	0	■	■	0	0	0	0	0	0	$u_z = U_z$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$A_s^- = 0$
*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	■	■	0	0	0	0	0	0	$[u_z] = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	0	0	0	0	$[u_r] = 0$
0	0	0	0	0	0	*	*	0	0	■	■	*	*	0	0	0	0	$\sigma_{zz} = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	*	*	0	0	0	0	*	*	0	0	$\sigma_{rz} = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$A_s^+ = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$A_p^- = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$A_s^- = 0$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$A_s^- = 0$

Для упрощения восприятия вычисления выполнены для $\kappa = 0$, когда часть матричных элементов тождественно равна нулю из-за их пропорциональности κ . Величины, отличные от нуля и единицы, отмечены *. Ненулевые элементы, характерные для пористого слоя, отмечены символом ■.

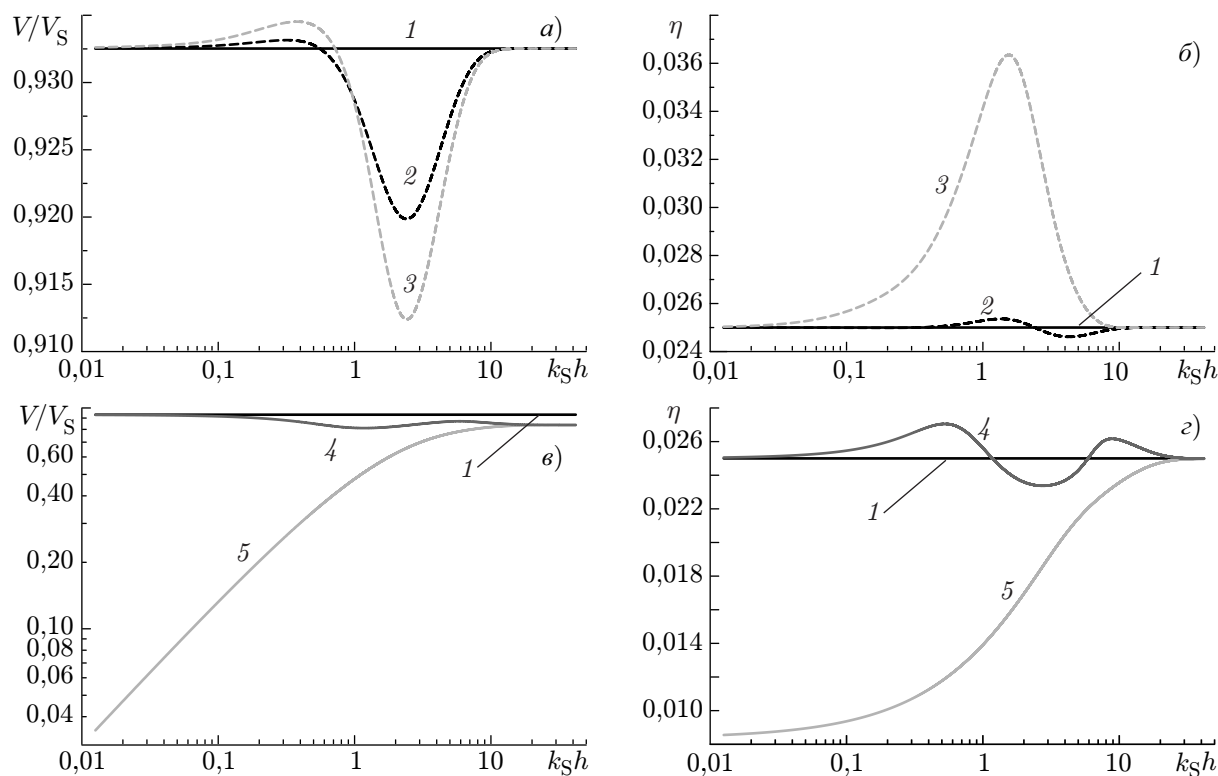


Рис. 2. Дисперсионные зависимости фундаментальных мод волны Рэлея для различных вариантов строения модельной среды ($k_S h = 0,01$ отвечает частоте 0,3 Гц): линия 1 соответствует однородному полупространству, 2 и 3 — пористым слоям в моделях Гассмана (2) и Био (3), 4 — жидкому слою между упругими слоями. Линия 5 соответствует дисперсионной зависимости медленной водной волны (изгиба)

Приведённая структура матрицы для рассматриваемой модели (см. рис. 1) создана программой, выполняющей вычисления. Символическая запись типов волн понятна и не требует пояснений. Последние три уравнения отвечают условиям Зоммерфельда и обеспечивают равенство нулю приходящих из бесконечности волн любых типов (поперечной и двух продольных). Эти три строки не зависят от структуры рассматриваемой слоистой среды.

На рис. 2 приведены искомые дисперсионные зависимости для нескольких вариантов модельных сред, составленных из трёх слоёв. Здесь и далее безразмерный параметр частоты вычисляется по скорости волны сдвига верхнего слоя. Предполагалось, что упругий слой и полупространство имеют одинаковые параметры: плотность $\rho_1 = \rho_3 = 1,5 \text{ г/см}^3$, скорости объёмных волн $V_{1P} = V_{3P} = 300 \text{ м/с}$, $V_{1S} = V_{3S} = 150 \text{ м/с}$, коэффициенты потерь $\eta_{1P} = \eta_{3P} = \eta_{1S} = \eta_{3S} = 0,05$. Приведённые значения отвечают условиям на сейсмоакустическом полигоне ИПФ РАН «Безводное» [24]. Глубина залегания промежуточного слоя равна $h = 1 \text{ м}$, мощность $h_0 = 0,2 \text{ м}$ (рис. 1). Параметры жидкого слоя $\rho_2 = 1 \text{ г/см}^3$ и $V_{2P} = 1450 \text{ м/с}$ отвечают работе [22]. Упругие параметры сухой матрицы пористого слоя полагались теми же, что и для упругих слоёв. Другие параметры пористой среды приведены в выражении (П17). Для диаметра зерна $D_g = 10 \text{ мм}$ (гравий) оценка проницаемости по формуле (П6) даёт величину $8,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$, что отвечает значительной проницаемости (для сравнения: коллекторы углеводородов зачастую имеют проницаемость порядка 10^{-13} м^2 и менее [32]).

Величины коэффициента потерь по скорости η определены отношением $|\text{Im } V / \text{Re } V|$, и асимптотические значения при $\eta_P = \eta_S$ равны $\eta_P / 2 = 0,025$. Отметим, что значения скоростей для вари-

анта с жидким слоем полностью совпадают с полученными ранее [22]. С учётом описанной выше организации вычислений это означает отсутствие ошибок в вычислительном коде. В работе [22] предполагалось отсутствие поглощения и нули определителя матрицы пропагатора располагались строго на оси действительных ω . Отметим малое поглощение для медленной нормальной моды, которой в области низких частот $k_S h \ll 1$ отвечают колебания изгиба пластины, образованной верхним упругим слоем. Малая величина поглощения связана с тем, что, как показано в [22], доминирующими колебаниями в этой медленной моде являются радиальные колебания жидкости в промежуточном слое. При величине $h_0 = 0,2$ м на частотах выше 10^{-5} Гц толщина соответствующих пограничных слоёв оказывается малой по сравнению с h_0 и жидкость может рассматриваться как идеальная, т. е. не имеющая вязкости. Именно это обуславливает наблюдаемому на рис. 2 справа малую величину коэффициента потерь для медленной нормальной моды. Таким образом, имеется дополнительное подтверждение корректности расчёта с использованием численной модели, описанной выше.

Рассмотрим подробнее дисперсионные зависимости для пористого слоя. Напомним, что модель Гассмана [32, 33] предполагает «замораживание» перемещения жидкости относительно твёрдой фракции. В модели Био относительные перемещения жидкости ненулевые, что должно привести к влиянию её вязкости из-за возбуждения медленной продольной волны. На рис. П1 в приложении представлены дисперсионные зависимости для объёмных волн в пористой среде. Частоте Био (П10) отвечает безразмерный параметр $k_S h \approx 0,2$, максимальные отклонения скорости нормальной волны от низкочастотной и высокочастотной асимптотик в модельной среде с пористым слоем наблюдаются при $k_S h \approx 2$ (рис. 2а), т. е. в области частот значительно выше частоты Био. Минимальное значение скорости нормальной волны составляет $0,91 V_{1S} \approx 136$ м/с, что превышает скорость медленной волны Био, которая составляет примерно 100 м/с в интересующей нас области частот (см. рис. П1). При таком соотношении фазовых скоростей нормальная волна характеризуется радиационными потерями из-за возбуждения медленной продольной волны в пористом слое.

Действительно, как видно из рис. 2б, учёт проницаемости (т. е. макроскопических перетоков жидкости внутри пористой среды) в рамках модели Био приводит к существенному (примерно в полтора раза) возрастанию поглощения по сравнению с моделью «замороженной» жидкости. В полном соответствии с соотношениями Крамерса—Кронига [34] увеличение максимума поглощения вызывает увеличение дисперсии, что наблюдается для модели Био на рис. 2а. Таким образом, диагностика наличия пористого слоя возможна по величинам дисперсии и поглощения поверхностной волны рэлеевского типа.

Характер изменения фазовой скорости нормальной волны также имеет простое объяснение. Отклонение в сторону увеличения объясняется ростом скорости волны сдвига (рис. П1а) при приближении к частоте Био. Наличие провала в частотной зависимости фазовой скорости нормальной волны обусловлено тем, что присутствие жидкости в порах приводит, главным образом, к возникновению дополнительной инерции, т. е. к уменьшению фазовой скорости.

Отмеченное выше появление радиационных потерь обусловлено соотношением между скоростями нормальной (поверхностной) волны и медленной объёмной продольной волны в пористом слое. За величину скорости волны рэлеевского типа отвечает модуль сдвига, который не меняется при заполнении пор жидкостью [27, 32, 33]. Поэтому всегда можно подобрать параметры пористой среды таким образом, чтобы исключить радиационные потери из поверхностной волны в медленную объёмную волну. Например, при $V_{1S} = V_{2S} = V_{3S} = 100$ м/с скорость волны Рэлея окажется меньше скорости медленной объёмной волны в пористом слое. Дисперсионные зависимости при указанных изменениях и сохранении неизменными прочих параметров приведены на рис. 3. Здесь же даны зависимости для $V_S = 150$ м/с. Нетрудно видеть, что в случае, когда ско-

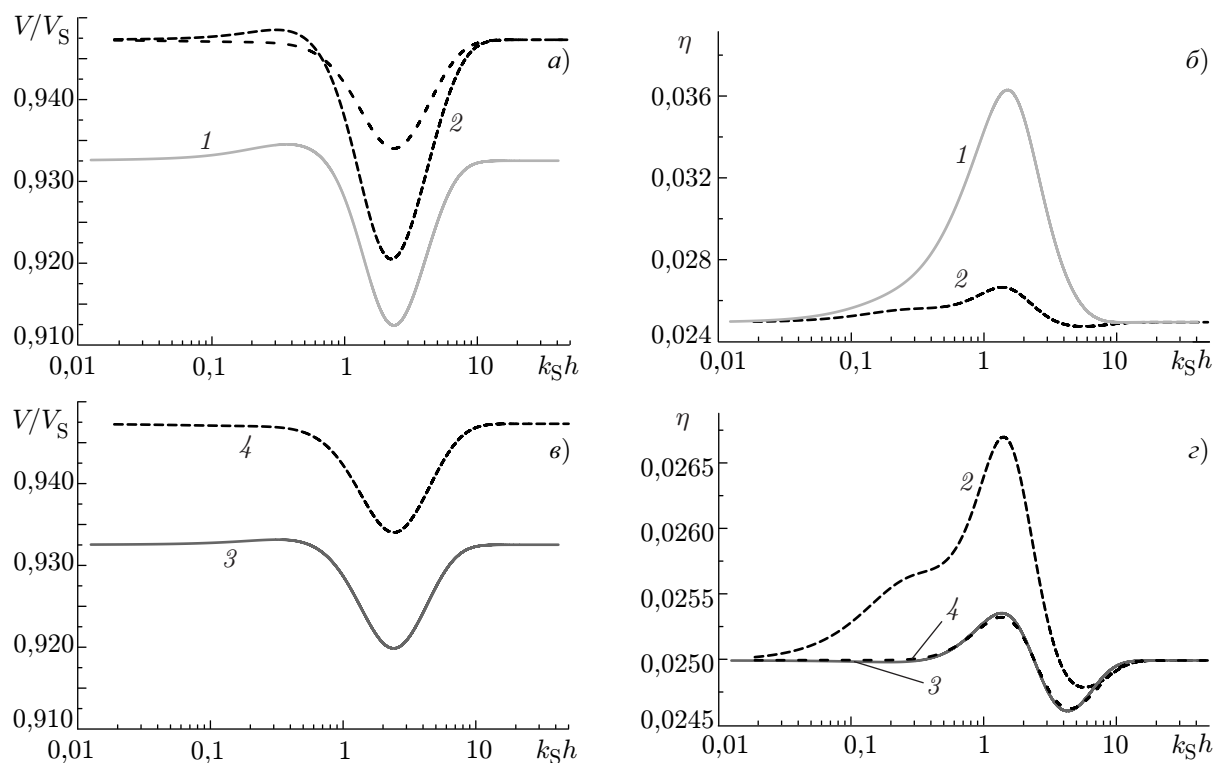


Рис. 3. Дисперсионные зависимости для пористого слоя в отсутствие радиационных потерь волны Рэлея ($V_S = 100$ м/с в пористом слое) в рамках модели Био (а, б; $V_S = 150$ м/с — линии 1, $V_S = 100$ м/с — 2) и Гассмана (в, з; $V_S = 150$ м/с — линии 3, $V_S = 100$ м/с — 4)

рость волны Рэлея меньше скорости медленной продольной волны в пористом слое, затухание существенно меньше. При этом в рамках модели Гассмана, которой отвечает «замороженная» внутри пористого скелета жидкость и отсутствие медленной продольной волны в пористом материале, частотные зависимости коэффициента затухания практически совпадают. Таким образом, приведённое выше соображение относительно радиационных потерь является обоснованным. Наблюдаемое небольшое увеличение значения V/V_S при уменьшении скорости сдвиговых волн во всех трёх слоях связано с ростом коэффициента Пуассона, а соответствующая зависимость скорости волны Рэлея от коэффициента Пуассона приведена в работе [29, § 24]. Сравнение расчётов для моделей Гассмана и Био показывает важность учёта относительных перемещений жидкости: дисперсия фазовой скорости волны рэлеевского типа и коэффициент поглощения оказываются больше при учёте относительных перемещений жидкости.

Появление радиационных потерь за счёт излучения волны Рэлея в медленную волну Био указывает на существование особенностей в дисперсионных зависимостях при изменении толщины пористого слоя. Дисперсионные характеристики при вариации мощности пористого слоя h_0 представлены на рис. 4. При выполнении граничного условия (6) относительные перемещения жидкости равны нулю на нижней и верхней границах пористого слоя. Естественно предположить, что медленная волна, будучи распространяющейся на частотах выше частоты Био, при наличии указанных особенностей будет иметь критическую частоту, обусловленную существованием волновода, который образован пористым слоем. Эту критическую частоту можно оценить из равенства удвоенной толщины пористого слоя h_0 и длины медленной продольной волны. Для рассматриваемых параметров критической частоте, близкой к частоте Био, отвечает длина медленной волны Био порядка 10 м (рис. П1). Следовательно, можно ожидать появление особенно-

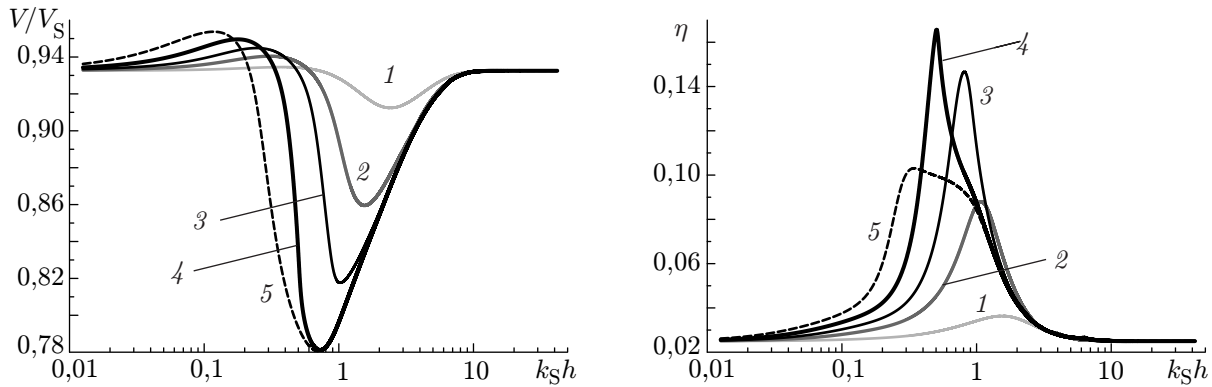


Рис. 4. Дисперсионные зависимости для различной мощности пористого слоя: $h_0/h = 1/5$ (линии 1), 1 (2), 2 (3), 4 (4) и 8 (5)

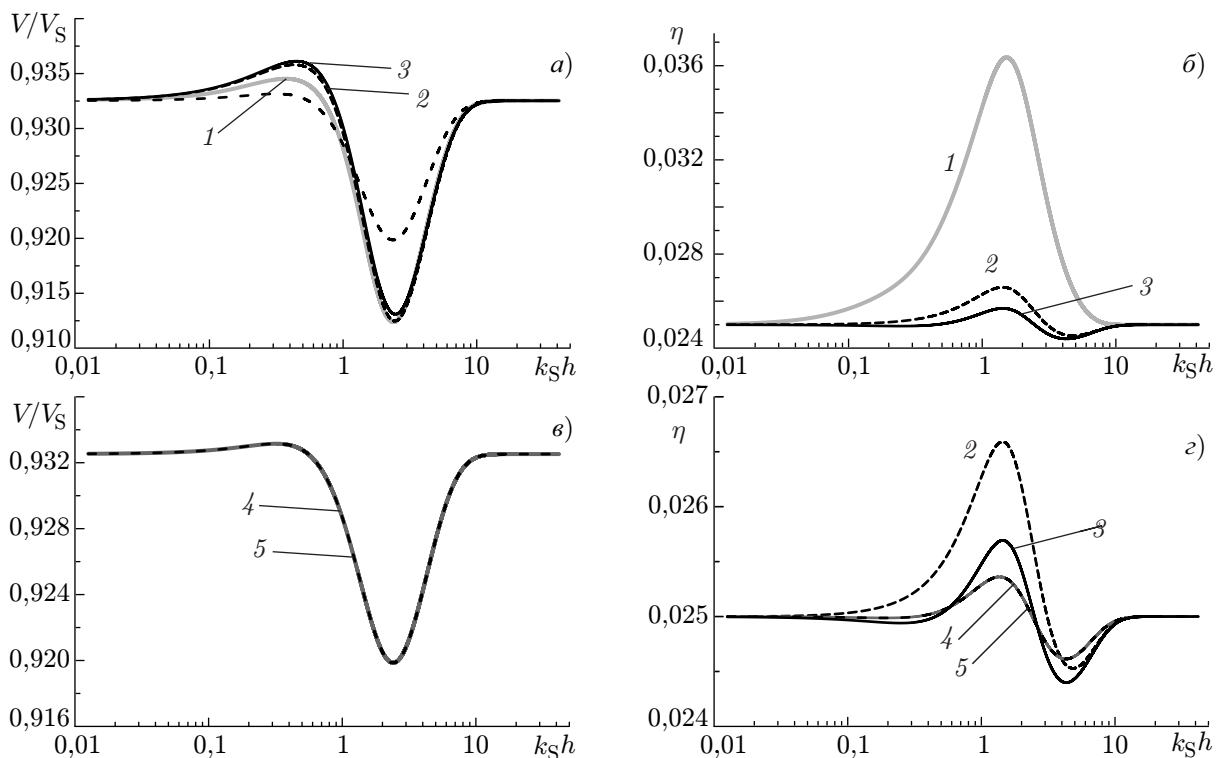


Рис. 5. Дисперсионные зависимости при изменении проницаемости пористой среды в рамках моделей Био (а, б, г; $V_S = 150$ м/с, линии 1, 2 и 3 соответствуют $D_g = 10$; 1 и 0,01 мм) и Гассмана (в, г; линии 4 и 5 соответствуют $D_g = 10$ и 1 мм)

стей в виде максимума поглощения при толщине пористого слоя $h_0 \approx 5$ м. На рис. 4 максимальное поглощение отвечает $h_0/h = 4$ или $h_0 = 4$ м (жирные чёрные линии). Дальнейшее увеличение мощности пористого слоя не ведёт к росту потерь.

Проницаемость среды прямо пропорциональна квадрату диаметра зерна (П6), частота Био (П10) обратно пропорциональна проницаемости. В отсутствие «прилипания» зёрен пористость не зависит от размера зерна, оставаясь постоянной величиной, зависящей от упаковки зёрен [32, § 5]. На рис. 5 приведены результаты расчёта для $V_{1S} = V_{2S} = V_{3S} = 150$ м/с и $D_g = 1$ мм. Уменьшение диаметра зерна на порядок приводит к увеличению частоты Био на два порядка. В этом случае в переходной области $k_S h \sim 1$ медленная волна представляет собой диффузионную вол-

ну (см. рис. П1). Несмотря на малое значение реальной части скорости медленной продольной волны по сравнению с фазовой скоростью волны Рэлея, дополнительные потери из-за перемещения жидкости относительно скелета в случае $D_g = 1$ мм (проницаемость $\kappa \approx 9 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$) не столь существенны, как для $D_g = 10$ мм. Диффузионный характер волны указывает на малую эффективность ее возбуждения и, как следствие, малую роль дополнительных потерь в области частот, существенно меньших частоты Био. При дальнейшем уменьшении диаметра зерна до 0,01 мм (проницаемость $\kappa \approx 9 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$) частотная зависимость коэффициента потерь для пористого слоя начинает приближаться к зависимости, характерной для «замороженной» жидкости. Аналогичные очень медленные изменения видны и в дисперсионной кривой (рис. 5а). Таким образом, сравнивая все представленные выше дисперсионные зависимости, мы видим, что переход к низкочастотному пределу теории пористых сред имеет место, но для разумных параметров пористых материалов наблюдаются заметные отличия между результатами расчётов в рамках моделей Гассмана и Био. В наибольшей степени эти отличия проявляются в затухании нормальной волны.

Наконец, зададимся вопросом о существовании предельного перехода от рассматриваемой модели пористого слоя к модели с жидким слоем из работы [22]. Из общих физических соображений жидкий слой отличается от пористого величинами пористости и проницаемости: для жидкого слоя пористость стремится к единице, а проницаемость — к бесконечности (строго говоря, к величине порядка квадрата мощности слоя h_0). Однако, оставаясь в рамках модели Био и задавая требуемые величины пористости и проницаемости, мы не получим непрерывного предельного перехода к жидкому слою. Здесь нет ошибки, и важно пояснить причины отсутствия непрерывного предельного перехода от модели слоя с высокой пористостью и проницаемостью к жидкому слою.

В рамках модели Био предполагается, что пористый слой имеет пусть малую, но отличную от нуля сдвиговую жёсткость. В рамках теории перколяции (см., например, [35]) это означает наличие бесконечно протяжённого кластера из соединённых друг с другом пор внутри скелета, формирующего пористую среду. Предел $\phi \rightarrow 1$ и $\kappa \rightarrow \infty$ по сути означает полную дезинтеграцию скелета, формирующего пористую среду. В результате исходные предположения, лежавшие в основе теории Био, становятся несправедливыми и предельный переход от пористой среды к жидкой некорректен. Ещё одним важным предположением теории Био является наличие сквозных макроскопических течений жидкости в порах. Теория перколяции указывает на существование критического значения пористости ϕ_c (для трёхмерных задач $\phi_c \approx 10\%$ — см. выражения в [35]), для которого при $\phi \leq \phi_c$ проницаемость становится равной нулю из-за отсутствия кластера бесконечной длины, заполненного жидкостью. По этой причине предельный переход от пористой среды в рамках модели Био, которая не учитывает наличие критической пористости, к модели эффективной среды с замороженным движением жидкой фазы также невозможен: в рамках модели Био проницаемость всегда отлична от нуля, лишь асимптотически приближаясь к нулевому значению. При этом, как видно из формул и графиков в приложении, величины скоростей объёмных волн в рамках модели Био в области низких частот совпадают с величинами в рамках теории Гассмана, которую поэтому часто называют низкочастотным приближением теории Био. Приведённые выше расчёты дисперсионных зависимостей показывают, что малые отличия величины дисперсии скорости и коэффициента потерь при использовании теории Био вместо теории Гассмана сохраняются в пределе $\kappa \rightarrow 0$, уменьшаясь по мере приближения к указанному пределу. При стремлении пористости к нулю ($\phi \rightarrow 0$; пористая среда асимптотически стремится к упругой) отличия становятся пренебрежимо малыми (графики не приводятся).

В рассмотренной нами ранее модели жидкого слоя мы наблюдали две нормальные волны, и в области низких частот медленная волна была связана с волнами изгиба для верхнего слоя.

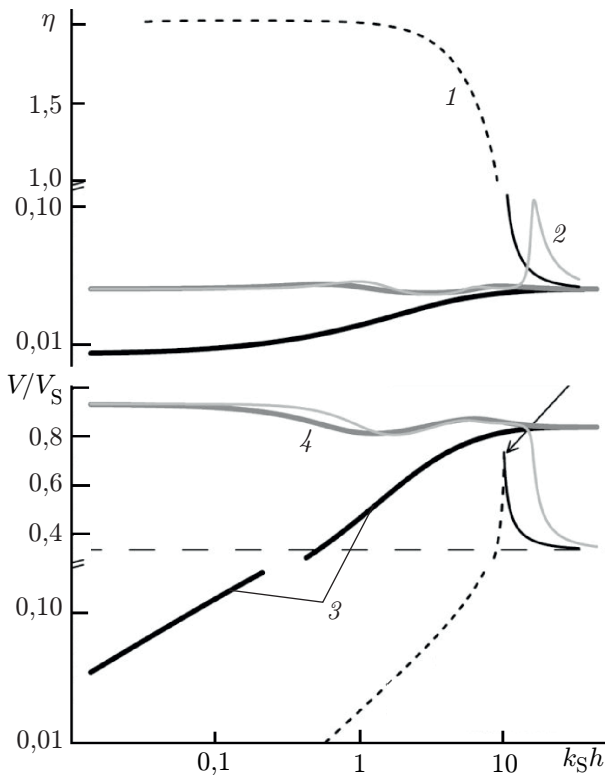


Рис. 6. Влияние сдвиговой жёсткости промежуточного слоя. Линии 1 и 2 соответствуют медленной моде и фундаментальной моде Рэлея в «жидком» слое с ненулевой сдвиговой жёсткостью, 3 и 4 — соответствующим модам в жидком слое. Горизонтальная штриховая линия отвечает скорости V_S в «жидком» слое; стрелкой отмечен резонанс слоя-пластины на упругом основании

Наличие ненулевой сдвиговой жёсткости промежуточного слоя приводит к эффекту, хорошо известному в теории изгибных колебаний пластины на упругом основании [36]. В этом случае появляется критическая частота, ниже которой полюсы дисперсионного уравнения для изгибных колебаний имеют равные реальную и мнимую части, т.е. распространение волн в такой пластине невозможно. В результате при наличии малой сдвиговой жёсткости промежуточного слоя медленная волна в задаче [22] должна исчезнуть в области самых низких частот. Этот эффект иллюстрируют графики на рис. 6.

Скорость сдвиговой волны в промежуточном слое задавалась равной $V_{2S} = 50$ м/с, коэффициенты потерь $\eta_{2P} = 0$, $\eta_{2S} = 0,05$. Нетрудно видеть, что вторая волна, имеющая меньшую по сравнению с волной рэлеевского типа скорость, существует в ограниченном снизу диапазоне частот. Критическая частота отвечает резонансу изгиба для пластины, образованной верхним слоем. Ниже этой частоты распространение волны невозможно из-за сильного затухания: волна становится неоднородной и ее существование возможно вблизи источника возбуждения. Волна рэлеевского типа в области частот ниже резонанса пластины имеет дисперсионную зависимость, мало отличающуюся от зависимости для ранее рассмотренной задачи о жидком слое [22].

Отметим качественные отличия в поведении медленной изгибной волны и волны Рэлея в области высоких частот при ненулевой сдвиговой жёсткости промежуточного слоя. Как отмечалось в работе [22], в области высоких частот обе нормальные волны трансформируются в волны Стоунли—Шолте, прижатые к границам раздела $z = h$ в случае волны рэлеевского типа и $z = h + h_0$ в случае медленной волны «изгиба». При ненулевом модуле сдвига обе волны имеют асимптотики $V = V_{2S}$ и отвечают каналовой волне, возбуждаемой в промежуточном слое. Других низших волноводных мод не существует, поскольку из всех скоростей только скорость волны сдвига в промежуточном слое является наименьшей.

3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Пространственная структура вертикальной и горизонтальной проекций вектора смещений в поверхностной волне рэлеевского типа при наличии промежуточного пористого слоя, насыщенного жидкостью, приведена на рис. 7. Параметры пористого слоя задавались теми же, что для рис. 2. Серыми линиями на рис. 7 показаны зависимости проекций вектора смещения для однородного полупространства с параметрами верхнего слоя. Величины смещения нормированы на максимальные значения в диапазоне изменения глубины $0 \text{ м} \leq z \leq 20 \text{ м}$. Расчёты проведены для пористого слоя с малой толщиной ($h_0/h = 1/5$, тонкие линии на графиках) и слоя с $h_0/h = 4$ (жирные линии), для которого имеет место резонансное поглощение поверхностной волны за счёт

возбуждения волноводной моды медленной волны Био в пористом слое. Для иллюстрации вклада перемещений жидкости относительно пористого скелета дополнительно приведены зависимости для случая $h_0/h = 4$ при использовании модели Гассмана пористой среды (линии с символами на рис. 7). Частоты, для которых выполнены расчёты, отвечают максимуму поглощения (см. рис. 4). Частота для однородного полупространства задавалась примерно равной частоте для слоя с $h_0/h = 1/5$.

Нетрудно видеть, что амплитуда вертикальной проекции вектора смещения существенно отличается от нуля. Из сравнения с решением для однородного полупространства видно, что качественные отличия отсутствуют. Следовательно, как и для классической задачи Лэмба, эффективность возбуждения волны рэлеевского типа вертикальным источником силы при наличии пористого слоя (см. рис. 1) будет достаточно высока.

Интересно отметить особенность в зависимости горизонтальной проекции вектора смещения $u_r(z)$ для случая эффективного возбуждения волной Рэля медленной волны Био в пористом слое. На рис. 7 отчётливо видно увеличение проекции u_r внутри пористого слоя по сравнению с любым из решений, представленных на графиках. Сравнивая результаты расчёта для моделей Био и Гассмана пористой среды, мы также видим заметное увеличение горизонтальной проекции вектора смещения в области локализации пористого слоя.

Наконец, отметим, что наличие пористого слоя проявляется в изменении отношения $|u_r(0)/u_z(0)|$, частотную зависимость которого нами ранее было предложено использовать при оценке сейсмоакустических параметров сред [37, 38]. В работе [22] также отмечалась эффективность использования указанного отношения для уточнения параметров плоскостных сред методами спектрального анализа поверхностных волн (Spectral Analysis of Surface Waves, SASW) и многоканального анализа поверхностных волн (Multi-channel Analysis of Surface Waves, MASW).

Для иллюстрации влияния промежуточного пористого слоя приведём результат расчёта сейсмоакустического отклика рассматриваемой модельной среды. На рис. 8 приведены вычисленные величины проекций вектора колебательной скорости ($\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$) при использовании источника вертикальной силы с амплитудой 100 Н в виде портативного вибратора [24]. Расчёт выполнен для проекций вектора колебательной скорости $\mathbf{v}$, т. к. именно эта величина регистрируется геофонами. Полоса частот линейно модулированного по частоте зондирующего сигнала задавалась от 3 до 30 Гц, т. е. перекрывала область частот максимума поглощения (см. рис. 2). Вычисление откликов проводилось с помощью теоремы о вычетах для найденного корня дисперсионного уравнения (численная реализация процедуры

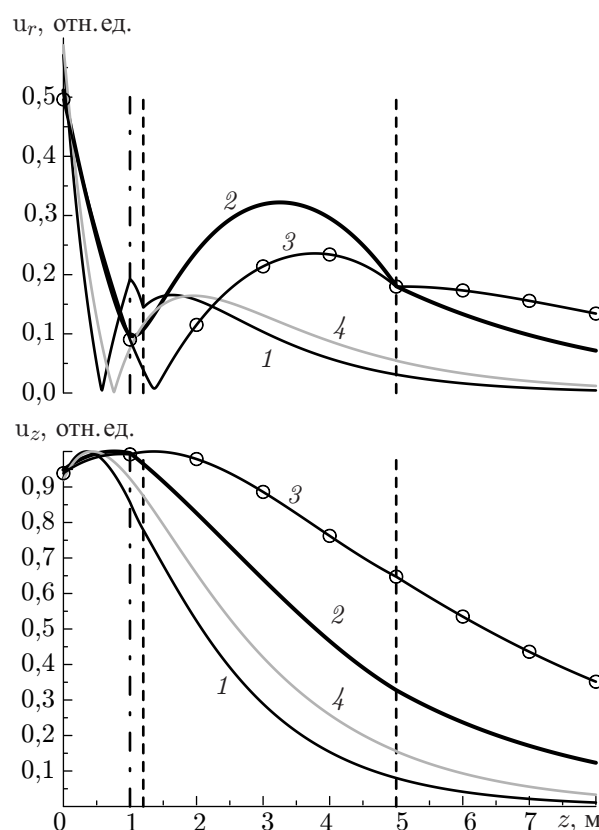


Рис. 7. Зависимости нормированных амплитуд проекций вектора смещения от глубины: линии 1 и 2 соответствуют значениям $h_0/h = 1/5$ и 4, линия 3 — значению $h_0/h = 4$ (модель Гассмана), 4 — решению для однородного полупространства. Вертикальные штрихпунктирные и штриховые линии отвечают верхней и нижним границам пористого слоя

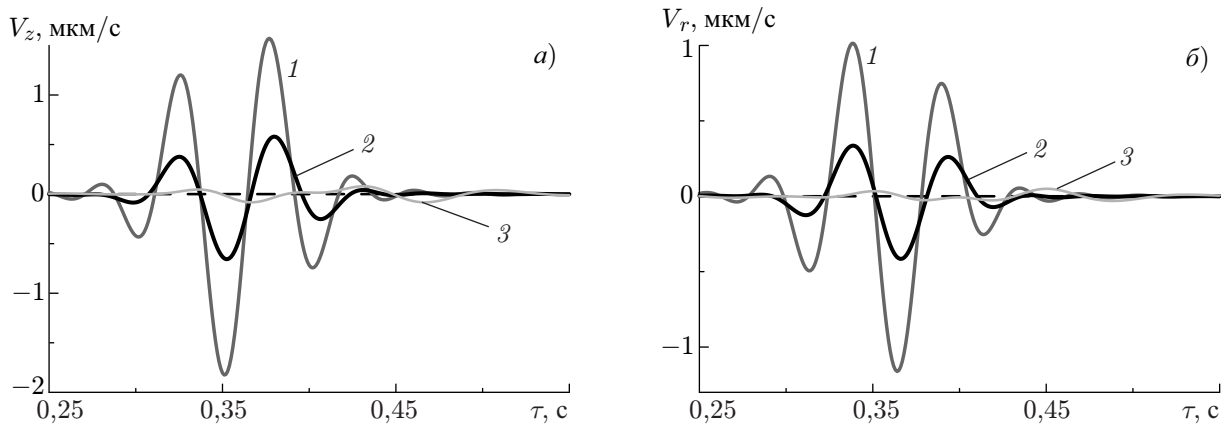


Рис. 8. Импульсный отклик модельной среды на расстоянии 5 длин волн для вертикальной (а) и радиальной (б) проекций вектора колебательной скорости в рамках моделей однородного упругого полупространства (линии 1) и пористого слоя с мощностью $h_0/h = 1/5$ (2), 1 (3); τ — время запаздывания

описана в [22]).

На рис. 8 тёмно-серыми линиями показаны отклики однородного упругого полупространства с параметрами верхнего слоя (см. рис. 1). Чёрными линиями дан результат расчёта при наличии промежуточного пористого слоя с мощностью $h_0/h = 1/5$, светло-серыми линиями — при увеличении мощности пористого слоя до $h_0/h = 1$. Расчёты проведены для расстояния между источником и приёмником, приблизительно равного пяти длинам волны Рэлея для средней частоты в полосе излучения. Такие расстояния характерны для проводившихся ранее экспериментов (см., например, [37, 38]). Сравнение откликов среды, содержащей пористый слой различной мощности, с откликом полупространства (классическая задача Лэмба) позволяет судить о влиянии промежуточного пористого слоя. Прежде всего, хорошо видно увеличение поглощения, что проявляется в заметном уменьшении амплитуды принимаемого сигнала. Чтобы сделать заметными изменения скорости распространения возмущений, проведены штриховые линии нулевого уровня. Нетрудно видеть, что наличие промежуточного пористого слоя приводит к увеличению времён прихода возмущения в виде волны Рэлея тем большему, чем толще пористый слой. Также хорошо видно различие в изменениях откликов для проекций вектора колебательной скорости (ср. с рис. 7), что указывает на перспективность анализа частотной зависимости отношения амплитуд проекций вектора смещений [22, 37].

В методах SASW/MASW [9–13] принятый отклик подвергается преобразованию Фурье, что позволяет определить особенности дисперсионных зависимостей. Однако уже прямое наблюдение импульсных откликов (рис. 8) без дополнительной обработки данных обнаруживает заметные изменения при наличии промежуточного пористого слоя и, следовательно, практическую реализуемость диагностики его наличия.

ВЫВОДЫ

Подведём итоги выполненной работы.

1) Выполнен анализ дисперсионных характеристик для среды, содержащей пористый слой между непроницаемыми упругим слоем и полупространством. Рассмотренная модель описывает часто встречающийся и представляющий практический интерес случай заглублённого насыщенного жидкостью слоя.

2) Представленные результаты показывают возможность дистанционной диагностики параметров пористого слоя с использованием поверхностных волн в качестве пробных или зондирующих. При этом эффективность наиболее простого способа возбуждения с помощью источника вертикальной силы оказывается высокой, что заметно облегчает практическую реализацию метода диагностики с помощью поверхностных волн.

3) Выделены особенности, обусловленные наличием ненулевой проницаемости (подвижности жидкости) в пористой среде. Продемонстрировано существование «резонансного» поглощения волны рэлеевского типа за счёт возбуждения волноводной моды медленной волны Био в пористом слое.

Автор выражает благодарность А. В. Разину за плодотворные дискуссии и критические замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-45-520006р_а) и при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований «Акустические исследования гетерогенных материалов», а также темы 0035-2019-0009 бюджетного финансирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теория Био: краткие сведения из литературы

Связь напряжений и деформаций для пористой среды имеет вид [27] (использованы обозначения работы [39] и общепринятые соглашения относительно суммирования по повторяющимся индексам):

$$\sigma_{ij} = (P - 2N) u_{kk} \delta_{ij} + 2N u_{ij} + Q U_{kk} \delta_{ij}, \quad (\text{П1})$$

$$S \delta_{ij} = -\phi p_f \delta_{ij} = (Q u_{kk} + R U_{kk}) \delta_{ij}, \quad (\text{П2})$$

где $\mathbf{u}$ — усреднённый по ансамблю зёрен и пор вектор смещения в скелете (смещения твёрдой фракции), $\mathbf{U}$ — усреднённый по объёму пор вектор смещения жидкой фракции, p_f — давление в жидкости, $0 \leq \phi < 1$ — пористость (относительный объём, занимаемый пустотами). В модели Био пористость отвечает так называемой связанной пористости или той части объёма пор, которые соединены с друг другом [27]. Тензор напряжений в жидкости диагонален, т. к. в рамках теории Био жидкость ньютонова и не передаёт сдвиговые деформации. Величина σ_{ij} описывает напряжения, действующие на скелет, суммарный тензор напряжений равен: $\sigma_{ij}^{\Sigma} = (1 - \phi) \sigma_{ij} + S \delta_{ij}$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Величины P , Q и R определены следующим образом [32, 39]:

$$P = \frac{(1 - \phi)(1 - \phi - K_b/K_s) K_s + \phi K_s K_b/K_f}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f} + \frac{4N}{3}, \quad (\text{П3})$$

$$Q = \frac{(1 - \phi - K_b/K_s) \phi K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f}, \quad R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - K_b/K_s + \phi K_s/K_f},$$

где K_b , K_s , K_f — объёмные модули жёсткости сухой пористой среды, составляющих её зёрен и жидкости, заполняющей поры, соответственно; N — модуль сдвига пористой среды, который в рамках Био не изменяется при насыщении пор жидкостью.

Уравнения для волновых движений в широком частотном диапазоне имеют вид (см., например, [27, 39] и другие источники):

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = P \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + Q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - N \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + bF(\omega) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right), \quad (\text{П4})$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = Q \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + R \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - bF(\omega) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right), \quad (\text{П5})$$

где $b = \eta \phi^2 / \kappa$ — «подвижность», η — динамическая вязкость жидкости, κ — проницаемость пор (геометрический фактор, имеющий размерность площади и описывающий степень связности пор). Для не слишком малых значений пористости оценка проницаемости с хорошей точностью может быть получена по формуле [32, § 8.4]:

$$\kappa = \frac{D_g^2}{72} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2 \alpha^2}, \quad (\text{П6})$$

где D_g — диаметр зерна, α — параметр извилистости. Большой набор экспериментальных данных, включая современные, представлен в [40]. Проницаемость задаётся пропорциональной ϕ^{3m} , где $1 \leq m \leq 2$, и с хорошей точностью $m \approx 1$. Значительные отклонения имеют место для сред с низкой проницаемостью (ил и глина).

Зависящая от частоты функция $F(\omega)$ описывает переход от течения Пуазейля к течению со скин-слоем (подробнее см. в [27]) и равна

$$F(\omega) = \frac{\zeta^2 T(\zeta)}{4\zeta + 8iT(\zeta)}. \quad (\text{П7})$$

Входящие в выражение (П7) величины определены следующим образом:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega a^2 \rho_0}{\eta}}, \quad T(\zeta) = \frac{\exp(i\pi/4) J_1[\zeta \exp(i\pi/4)]}{J_0[\zeta \exp(i\pi/4)]}, \quad (\text{П8})$$

где a — размер поры, который по порядку величины составляет $a \approx D_g/7$ [25]. Величина ζ равна половине отношения размера поры к толщине вязкого скин-слоя (напомним, что толщина скин-слоя [41] $\delta = \sqrt{2\eta/(\rho_0\omega)}$). Выражение для $T(\zeta)$ через функции Бесселя отвечает порам круглого поперечного сечения, другие варианты рассмотрены в работе [27]. Асимптотические значения модуля равны $|T(\zeta)| = 1$ при $\zeta \gg 1$ и $|T(\zeta)| \propto \zeta$ при $\zeta \ll 1$.

Плотности определены выражениями

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \phi) \rho_s, \quad \rho_{12} + \rho_{22} = \phi \rho_0, \quad \rho_{12} = -(\alpha - 1) \phi \rho_0, \quad (\text{П9})$$

комбинация $(1 - \phi) \rho_s$ равна плотности сухой пористой среды ρ_2 (см. рис. 1), а величина ρ_s определяет среднюю по объёму плотность минеральных составляющих твёрдой фазы. Величина ρ_{12} описывает эффект инерционного увлечения скелета при движении жидкой фракции [25, 39], и, поскольку движения противоположно направлены, $\rho_{12} \leq 0$ ($\alpha \geq 1$).

Параметр α характеризует извилистость пор и представляет собой отношение расстояния вдоль поры к длине отрезка, соединяющего начало и конец поры. Величина α может принимать значения от 1 до 3 при характерной пористости $\phi \sim 0,2$ [25], достигая 5 и, возможно, больших значений при уменьшении пористости ϕ (имеющиеся в литературе экспериментальные данные

указывают на существование величин извилистости $\alpha \approx 5$; используя теорию перколяции, например [35], можно показать, что значение $\alpha \approx 6,6$ отвечает отсутствию сквозного течения жидкости при критическом значении пористости $\phi_c \approx 0,1$). Отметим, что теория Био справедлива только при наличии сквозного течения жидкости через пористое пространство. В отсутствие такого течения пористая среда ничем не будет отличаться от эффективной среды, составленной из скелета и изолированных друг от друга включений жидкой фазы, заполняющей полости, равномерно распределённые в объёме. Модель такой среды представляет собой модель Гассмана [32, § 6] (оригинальная работа Фрица Гассмана [42] была опубликована на немецком языке, в работе того же автора [33] на английском языке воспроизведены существенные результаты [42]), и поэтому приводимые в статье результаты вычислений в рамках этой модели позволяют определить вклад относительных перемещений жидкости в дисперсионные зависимости.

Полагая все величины зависящими от времени как $\exp(-i\omega t)$, получаем уравнения движения в виде (П11) и (П12). Величина $\tilde{\rho}_{12}(\omega)$, как нетрудно убедиться, равна (см. также [39])

$$\tilde{\rho}_{12}(\omega) = \rho_{12} - ibF(\omega)/\omega.$$

С учётом определения ρ_{12} , заданного выражением (П9), можно ввести значение динамического параметра извилистости:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha + ibF(\omega)/(\omega\rho_0\phi).$$

В области высоких частот ($\zeta \gg 1$) мнимые добавки к ρ_{12} и α становятся пренебрежимо малыми и $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_{12}(\omega) = \rho_{12}$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}(\omega) = \alpha$. В области низких частот ($\zeta \ll 1$) асимптотическое значение составляет $\lim_{\zeta \rightarrow 0} T(\zeta) = i\zeta/2 - \zeta^3/16$ и величина $F(\omega) = -1$.

Формулы для динамических параметров плотности $\tilde{\rho}_{12}(\omega)$ и извилистости $\tilde{\alpha}(\omega)$ позволяют понять физический смысл частоты Био [27]. В области частот, где толщина скин-слоя превышает размер пор, и $F(\omega) = -1$, равенство единице множителя $bF(\omega)/\omega$ определяет частоту, на которой силы вязкого трения становятся равными силам инерции при движении жидкости. Частота Био равна (см. также [27, 32]):

$$f_b = \phi\bar{\eta}/(2\pi\rho_0\kappa). \quad (\text{П10})$$

В результате несложных манипуляций уравнения движения в виде (П4) и (П5) преобразуются следующим образом:

$$-\rho_s(1-\phi)\omega^2\mathbf{u} = P\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + Q\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - N\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \tilde{\rho}_{12}(\omega)\omega^2(\mathbf{U} - \mathbf{u}), \quad (\text{П11})$$

$$-\rho_0\phi\omega^2\mathbf{U} = Q\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + R\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \tilde{\rho}_{12}(\omega)\omega^2(\mathbf{U} - \mathbf{u}). \quad (\text{П12})$$

Вектор смещения скелета и жидкости может быть представлен в виде суперпозиции скалярного и векторного потенциалов: $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$, $\mathbf{U} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi$.

Используя уравнение (П12), определим связь между амплитудами Ψ и ψ векторных потенциалов, учитывая осевую симметричность задачи и ортогональность векторов Ψ и ψ координатным осям $\mathbf{z}$ и $\mathbf{r}$:

$$\psi = \Psi \frac{\tilde{\rho}_{12}(\omega)}{\tilde{\rho}_{12}(\omega) - \rho_0\phi} = \Psi \frac{\alpha - 1 - i\nu\phi F(\omega)/(\kappa\omega)}{\alpha - i\nu\phi F(\omega)/(\kappa\omega)}, \quad (\text{П13})$$

где $\nu = \bar{\eta}/\rho_0$ — кинематическая вязкость жидкости.

Уравнение (П11) относительно вихревой компоненты смещения имеет вид уравнения Гельмгольца, которое после несложных преобразований приводится к виду (см. также выражение для скорости волны сдвига в [32, с. 268] с учётом изменения знака временной зависимости):

$$N\nabla^2\Psi + \frac{\rho[\alpha + i\nu\phi F(\omega)/(\kappa\omega)] - \rho_0\phi}{\alpha + i\nu\phi F(\omega)/(\kappa\omega)}\omega^2\Psi = 0, \quad (\text{П14})$$

где $\rho = \rho_s(1 - \phi) + \rho_0\phi$ — средняя плотность с учётом заполнения пор жидкостью: $\rho = \rho_2$ на рис. 1. Выражение (П14) позволяет определить скорость волны сдвига и её асимптотические представления, показанные на рис. П1 штриховыми линиями.

Из системы уравнений (П11) и (П12) можно получить уравнения относительно скалярных потенциалов Φ и φ . Соответствующее секулярное уравнение имеет два собственных решения. Одно из них будет отвечать быстрой волне (минимум разности смещений жидкости и скелета $|\mathbf{U} - \mathbf{u}|$), а второе — медленной (максимум разности смещений жидкости и скелета $|\mathbf{U} - \mathbf{u}|$). Относительно скалярных потенциалов обсуждаемая система уравнений перепишется следующим образом ($\xi = k/\omega$ — обратная величина фазовой скорости):

$$\begin{aligned} \left\{ P\xi^2 - [\rho_s(1 - \phi) - \tilde{\rho}_{12}(\omega)] \right\} \Phi + [Q\xi^2 - \tilde{\rho}_{12}(\omega)] \varphi &= 0, \\ [Q\xi^2 - \tilde{\rho}_{12}(\omega)] \Phi + \left\{ R\xi^2 - [\rho_0\phi - \tilde{\rho}_{12}(\omega)] \right\} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

Определитель равен

$$\begin{aligned} \det = (PR - Q^2)\xi^4 + \xi^2 \left\{ P[-\rho_0\phi + \tilde{\rho}_{12}(\omega)] + 2Q\tilde{\rho}_{12}(\omega) + R[-\rho_s(1 - \phi) + \tilde{\rho}_{12}(\omega)] \right\} + \\ + \rho_s\rho_0\phi(1 - \phi) - \rho\tilde{\rho}_{12}(\omega). \end{aligned} \quad (\text{П16})$$

На рис. П1 представлены результаты расчёта по формуле (П16) для быстрой и медленной продольных волн и по формуле (П14) для волны сдвига. Вычисления по формуле (П16) приводят к правильному результату: скорость быстрой волны точно выходит на свои предельные значения. Отметим, что низкочастотный предел для быстрой волны отвечает теории Гассмана, в рамках которой относительное движение жидкости отсутствует ($\mathbf{u} = \mathbf{U}$).

Параметры пористой среды, для которой выполнен расчёт на рис. П1, приведены ниже:

$$\begin{aligned} \rho_s = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad V_P = 300 \text{ м/с}, \quad V_S = 150 \text{ м/с}, \quad \eta_P = 0,05, \quad \eta_S = 0,05, \quad \phi = 0,3, \quad \alpha = 3, \\ D_g = 0,01 \text{ м}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad K_s = 3,7 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_f = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Па}. \end{aligned} \quad (\text{П17})$$

Значение $D_g = 1$ см отвечает крупному зерну типа гравия, что позволяет сместить частоту Био (П10) в область низких частот. Величины η_P и η_S определяют коэффициенты потерь в сухой пористой среде, величины V_P и V_S — скорости объёмных волн в сухой пористой среде. Коэффициент потерь характеризует затухание на длине волны: $\exp(-\pi\eta)$. Через величины скоростей V_P и V_S вычисляются модули $K_b = \rho_s(1 - \phi)(V_P^2 - 4V_S^2/3)$ и $N = \rho_s(1 - \phi)V_S^2$.

Отношение скалярных потенциалов вычисляется из любого из уравнений (П15) для корней, соответствующих быстрой и медленной волнам, и равно

$$\left. \frac{\varphi}{\Phi} \right|_\ell = - \frac{Q\xi_\ell^2 - \tilde{\rho}_{12}(\omega)}{R\xi_\ell^2 - \rho_0\phi + \tilde{\rho}_{12}(\omega)}, \quad (\text{П18})$$

где индексы $\ell = s, f$ отвечают медленной и быстрой продольным волнам соответственно. Амплитуда потенциала φ , связанного с движением жидкости, имеет большую величину для медленной волны.

Ещё раз напомним физический смысл двух продольных волн: быстрая волна отвечает синхронному движению скелета и жидкости, медленная — движению жидкости навстречу движению скелета. Ясно, что в первом случае жидкость уменьшает сжимаемость пористой среды. Как видно из рис. П1, скорость быстрой волны оказывается больше скорости V_P в сухой среде. Во втором случае движение жидкости принципиально другое, и оно возможно в том числе для неподвижного и несжимаемого скелета.

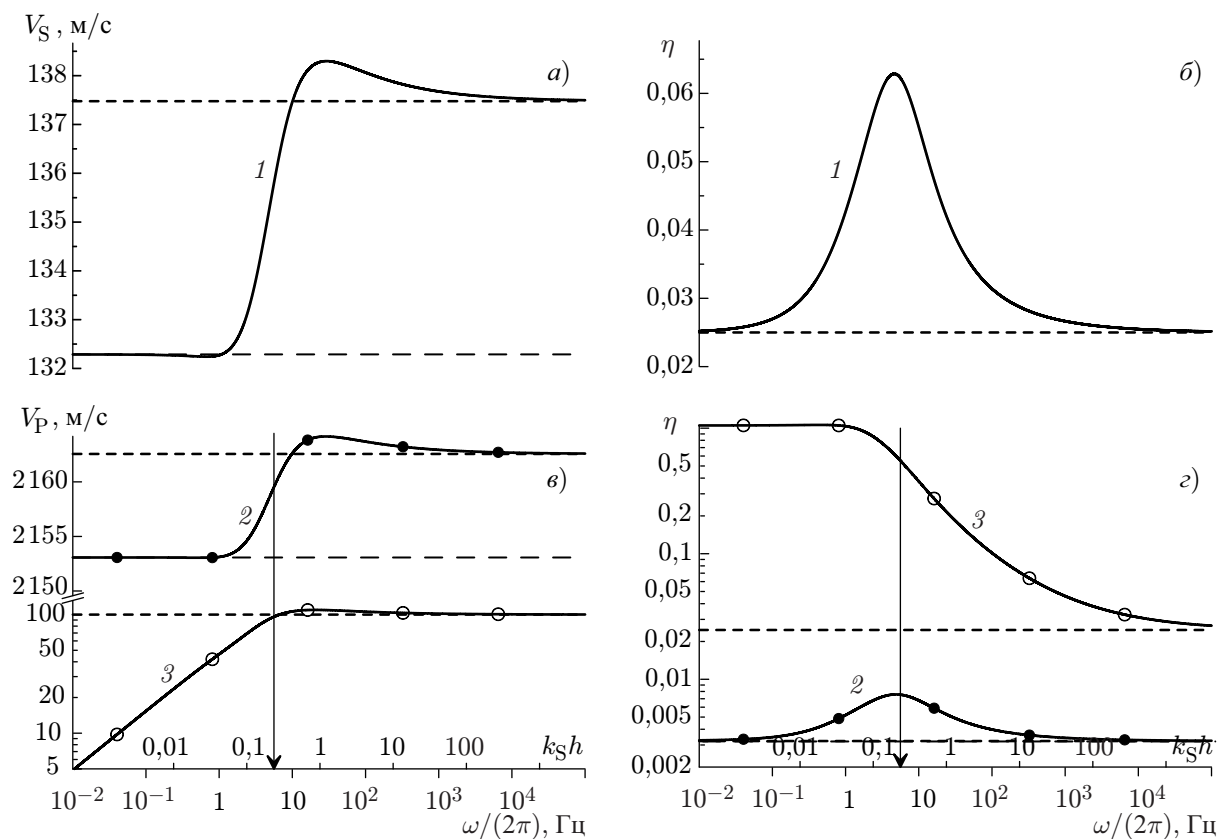


Рис. П1. Дисперсионные характеристики объёмных волн в пористой среде Био. Длинными штриховыми линиями показаны низкочастотные асимптотики (модель Гассмана), короткий штрих отвечает высокочастотным асимптотикам. Безразмерный волновой параметр отвечает модели среды на рис. 1 и параметрам (П17). Линии 1, 2 и 3 соответствуют волне сдвига, быстрой и медленной продольным волнам. Вертикальная стрелка отвечает частоте Био

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методология обеспечения защиты урбанизированных территорий от природных и техногенных воздействий / Под общей ред. Е. В. Копосова. Нижний Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2013. 596 с.
2. Хаттон Л., Уэрдингтон М., Мейкин Дж. Обработка сейсмических данных, теория и практика. М.: Мир, 1989. 216 с.
3. Yilmaz Öz. Seismic data analysis. V. 1, 2. Tulsa: Soc. Expl. Geophys., 2001. 1 028 p., 1 053 p.
4. Ghose R., Nijhof V., Brouwer J., et al. // Geophysics. 1998. V. 63, No. 4. P. 1 295.
5. Zhubayev A., Ghose R. // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131, No. 2. P. EL170.
6. Горяинов Н. Н., Ляховицкий Ф. М. Сейсмические методы в инженерной геологии. М.: Недра, 1979. 143 с.
7. Никитин В. Н. Основы инженерной сейсмологии. М.: Изд-во Московского университета, 1981. 176 с.
8. Авербух А. Г. Изучение состава и свойств горных пород при сейсморазведке. М.: Недра, 1982. 232 с.
9. Stokoe K. H., Rix G. R., Nazarian S. // Proc. 12th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Engng. 1989.

- V. 1. P. 331.
10. Park C.B., Miller R.D., Xia J. // *Geophysics*. 1999. V. 64, No. 3. P. 800.
 11. Xia J., Park C.B., Miller R.D. // *Geophysics*. 1999. V. 64, No. 3. P. 691.
 12. Miller R., Xia J., Park C.B., Ivanov J.M. // *The Leading Edge*. 2008. P. 268.
 13. Maraschini M. A new approach for the inversion of Rayleigh and Scholte waves in site characterization. Ph.D. thesis. Dottorato di Ricerca in Ingegneria Geotecnica (XX ciclo). Torino: Politecnico di Torino, 2008. 294 p.
 14. Albers B. Modelling of surface waves in poroelastic saturated materials by means of a two component continuum — Lecture notes. Preprint 952. Berlin: Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2004. 46 p.
 15. Городецкая Н.С. // *Акустичний вісник*. 2007. Т. 10, № 2. С. 43.
 16. Марков М.Г. // *Акуст. журн*. 2006. Т. 52, № 4. С. 502.
 17. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. *Elastic waves in layered media*. New York: McGraw-Hill, 1957. 380 p.
 18. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. М.: Наука, 1973. 343 с.
 19. Разин А.В., Собисевич А.Л. *Геоакустика слоистых сред*. М.: Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 2012. 210 с.
 20. Петухов Ю.В., Разин А.В., Собисевич А.Л., Куликов В.И. *Сейсмоакустические и акустико-гравитационные волны в слоистых средах*. М.: Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 2013. 280 с.
 21. Молотков Л.А. *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*. М.: Наука, 1984. 201 с.
 22. Коньков А.И., Лебедев А.В., Разин А.В. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2016. Т. 59, № 4. С. 324.
 23. Berryman J.G. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. V. 69, No. 2. P. 416.
 24. Авербах В.С., Лебедев А.В., Марышев А.П., Таланов В.И. // *Акуст. журн*. 2008. Т. 54, № 4. С. 607.
 25. Stoll R.D. *Sediment acoustics*. New York: Springer-Verlag, 1989. 154 p.
 26. Гуцин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д. // *Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками*. М.: Наука, 1981. С. 113.
 27. Biot M.A. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. V. 28, No. 2. P. 168.
 28. Lopatnikov S., Gillespie J.W., Jr. // *Transp. Porous Med.* 2012. V. 93. P. 597.
 29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости*. Т. 7. *Теоретическая физика*. М.: Наука, 1987. 248 с.
 30. Rasolofosaon P.N.J. // *Appl. Phys. Lett.* 1988. V. 52, No. 10. P. 780.
 31. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. *Computational Ocean Acoustics*. 2nd ed. New York: Springer, 2011. 794 p.
 32. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. *The Rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 524 p.
 33. Gassman F. // *Geophysics*. 1951. V. 16, No. 4. P. 673.
 34. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн*. М.: Наука, 2001. 560 с.
 35. Sahimi M. *Heterogeneous Materials: morphology, and linear transport and optical properties*. V. 22. *Interdisciplinary applied mathematics*. New York: Springer-Verlag, 2005. 793 p.
 36. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.
 37. Авербах В.С., Грибов Н.Н., Коньков А.И., и др. // *Изв. АН. Сер. физическая*. 2016. Т. 80, № 10. С. 1314.
 38. Konkov A.I., Lebedev A.V., Manakov S.A. // *Handbook of Geomathematics* / ed. by W. Freeden,

- M. Z. Nashed, T. Sonar. Berlin: Springer-Verlag GmbH, 2015. P. 2189.
39. Johnson D. L., Plona T. J. // J. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72, No. 2. P. 556.
40. Chotiros N. P. Acoustics of the seabed as a poroelastic medium. New York: Springer, 2017. 99 p.
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. 736 с.
42. Gassman F. // Vier. der Natur. Gesellschaft Zürich. 1951. V. 96. P. 1.

Поступила в редакцию 14 января 2019 г.; принята в печать 28 июня 2019 г.

ANALYSIS OF SURFACE WAVES IN ELASTIC MEDIUM WITH A POROUS SATURATED LAYER

A. V. Lebedev

We study the propagation of seismoacoustic waves in a three-layered medium consisting of a uniform isotropic deformable solid layer loaded on the uniform porous layer saturated with fluid. In turn, the porous layer covers the uniform isotropic solid half-space. This medium models the geological section in which the upper ground layer is separated from the deep rocks by a porous layer containing a significant amount of fluid. The obtained dispersion equation is analyzed and its solutions for the practically important cases are presented. The effects due to the liquid-phase motion with respect to the relatively deformable solid skeleton during the wave passage are pointed out. The features of the dispersion curves and the spatial distribution of the mode fields, which allow one not only to determine the presence of a fluid-saturated porous layer under the upper ground layer but also estimate its thickness and occurrence depth.