

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ С НАСЫЩЕНИЕМ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ПОТЕРЬ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Методом возмущений исследованы процессы нелинейного распространения первоначально гармонических упругих волн в микронеоднородных средах — поликристаллических твёрдых телах с насыщением гистерезисных потерь и релаксацией. Рассмотрены среды с основными видами гистерезисов: упругим и неупругим. Определены эффективные параметры нелинейности таких сред для процессов самовоздействия квазигармонической волны и генерации её высших гармоник.

ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, основные уравнения и результаты в нелинейной акустике однородных сред, характеризующихся (для продольных напряжений и деформаций) слабой упругой квадратичной нелинейностью, уже получены, подробно изучены и опубликованы в большом числе оригинальных статей, монографий, обзоров и учебных пособий [1–9]. В связи с этим, в последнее время в акустике все большее внимание уделяется микронеоднородным твёрдым телам [8–19], обладающим (по сравнению с однородными средами) сильной акустической нелинейностью. Как правило, уравнения состояния микронеоднородных твёрдых тел описываются неаналитическими (непрерывными, но негладкими и недифференцируемыми) функциями. Подобные свойства микронеоднородных сред определяются нелинейными дефектами их структуры: дислокациями, полостями, трещинами, контактами зёрен и т. д. Закономерности распространения и эволюции упругих волн в средах с неаналитической и квадратичной (аналитической) нелинейностями качественно отличаются, что можно использовать для диагностики и неразрушающего контроля микронеоднородных сред. Этому также способствует и то, что нелинейные акустические свойства микронеоднородных сред более чувствительны к наличию в них дефектов, чем линейные.

К микронеоднородным твёрдым телам относятся многие поликристаллические металлы и горные породы; в них наблюдаются эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения [20–23]. Это явление объясняется в рамках гистерезисных уравнений состояния поликристаллов, т. е. гистерезисных зависимостей $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Здесь и далее, для определённости, мы будем полагать, что σ и ε — продольные напряжение и деформация соответственно, хотя гистерезис поликристаллов имеет место и для сдвиговых напряжений и деформаций. Причиной гистерезисной нелинейности поликристаллических твёрдых тел является движение дислокаций — одномерных дефектов их кристаллической решётки [21–23]. Для других микронеоднородных твёрдых тел причины гистерезисных зависимостей могут быть связаны с проявлениями иных факторов, например трения или адгезии на контактах и поверхностях трещин [11, 12, 18, 24]. Площадь петли гистерезиса определяет амплитудно-зависимые (нелинейные) потери, а среднее (по периоду циклической деформации) значение $\langle \sigma'_\varepsilon(0) - \sigma'_\varepsilon(\varepsilon_m) \rangle$ — нелинейный дефект модуля упругости, где ε_m — амплитуда деформации. В работах [10, 19–21, 23, 25, 26] были предложены различные виды феноменологических безынерционных гистерезисных уравнений состояния, описывающих деформирование поликристаллических твёрдых тел на относительно низких частотах. Безынерционность таких уравнений

* v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

соответствует тому, что напряжение в данной точке среды в некоторый момент времени t определяется деформацией (и знаком скорости деформации) в этой же точке в этот же момент времени. Для сред с безынерционной нелинейностью эффективные параметры нелинейности (вообще говоря, различные для различных волновых процессов) являются постоянными, не зависящими от частот взаимодействующих волн. Результаты экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения (нелинейных потерь и сдвига резонансных частот) в акустических резонаторах свидетельствуют о том, что параметры гистерезисной нелинейности поликристаллических металлов и горных пород зависят от частоты волны (с ростом частоты они уменьшаются [14–19]), и, следовательно, гистерезисные уравнения состояния таких сред не являются безынерционными. Для объяснения этого факта была предложена реологическая модель микронеоднородной среды — одномерной цепочки масс, жёстких линейных упругих элементов и относительно мягких нелинейных вязкоупругих дефектов [27, 28]. В этих работах было показано, что в результате релаксации нелинейных дефектов на частотах первичных и вторичных (нелинейно генерируемых) волн эффективные параметры нелинейности микронеоднородных сред являются частотно-зависимыми и с ростом частоты уменьшаются.

В некоторых поликристаллических металлах (меди [29, 30], цинке [15, 31], свинце [14], алюминии [32], ряде сплавов на основе меди [33], индии [34, 35]) имеет место насыщение гистерезисных потерь. Вообще говоря, гистерезисное поведение характерно не только для механических, но и для магнитных и диэлектрических свойств твёрдых тел — ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, причём для них также имеет место насыщение гистерезисных потерь [36]. Физическая природа и механизмы проявления различных гистерезисов также различны, однако их феноменологическое описание содержит много общего. В работах [37, 38] для объяснения насыщения гистерезисных потерь поликристаллических твёрдых тел были предложены модифицированные безынерционные гистерезисные уравнения состояния. Однако эффективные параметры нелинейности металлов с насыщением гистерезисных потерь зависят от частоты волны, так что в этих металлах также имеют место релаксационные процессы. В связи с этим представляет интерес исследование нелинейных акустических эффектов в поликристаллических твёрдых телах с насыщением гистерезисных потерь и релаксацией.

В данной работе методом возмущений проводится теоретический анализ нелинейных акустических эффектов, возникающих при распространении первоначально гармонических волн в микронеоднородных средах — поликристаллических твёрдых телах с насыщением гистерезисных потерь и релаксацией; определены амплитудно-частотные зависимости эффективных параметров нелинейности для процессов самовоздействия волны и генерации её высших гармоник. Рассмотрены среды с двумя основными видами гистерезисов: упругим и неупругим [26].

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С НАСЫЩЕНИЕМ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ПОТЕРЬ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

Получим уравнение состояния микронеоднородной среды с насыщением гистерезисных потерь и релаксацией в рамках реологической модели [27, 28], в которой среда представляется одномерной цепочкой масс m , линейно-упругих жёстких элементов — пружинок (с коэффициентами упругости κ) и относительно мягких нелинейных (гистерезисных) вязкоупругих дефектов (с линейной упругостью $\kappa_1 = \zeta\kappa \ll \kappa$, где ζ — относительная упругость дефектов, $0 < \zeta < 1$). В этой модели (см. рис. 1) однородные участки цепочки, состоящие из масс и жёстких упругих элементов — пружинок, соответствуют областям бездефектного идеально упругого твёрдого тела, а части цепочки, состоящие из нелинейных вязкоупругих элементов, соответствуют относительно мягким гистерезисным дефектам. Предполагается, что жёсткие и мягкие элементы такой

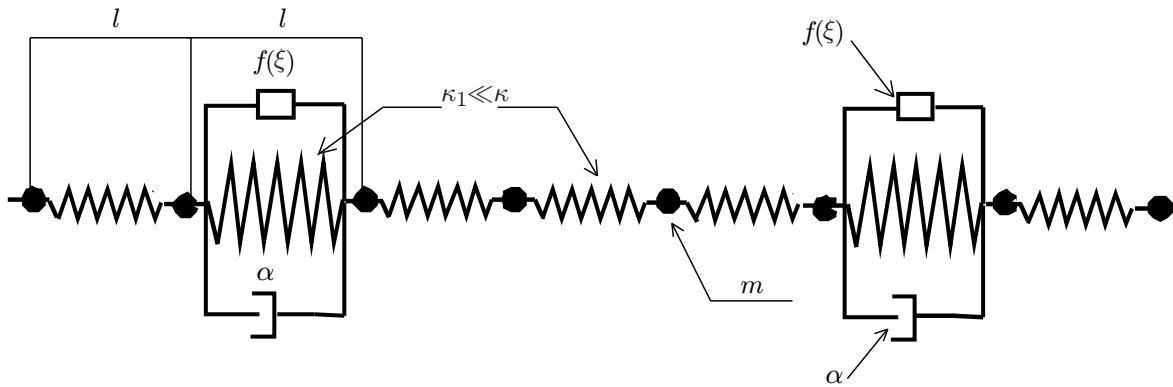


Рис. 1. Реологическая модель микронеоднородной нелинейной среды с релаксацией

цепочки имеют одинаковую длину $l \ll \Lambda$ (Λ — длина волны), при этом число всех элементов на длине L равно N ($L = Nl \gg l$), а число дефектов $N_d = \nu N$, при этом безразмерный коэффициент ν соответствует концентрации дефектов ($\nu = N_d/N$).

В соответствии с реологической моделью, при $\omega \ll (\zeta\kappa/m)^{1/2}$, где ω — частота деформирования, уравнение состояния гистерезисных вязкоупругих дефектов имеет вид

$$\sigma(\xi) = \zeta E [\xi - f(\xi)] + \alpha \dot{\xi}, \quad (1)$$

где ξ — деформация дефекта, $E = \kappa l$ — модуль упругости жёстких элементов, $f(\xi)$ — нелинейная (в данном случае, гистерезисная) функция, $|f(\xi)| \ll |\xi|$, α — коэффициент линейной диссипации, точкой обозначена полная производная по времени.

Здесь мы будем рассматривать дефекты с основными видами квадратичных (при малых амплитудах деформации) гистерезисов с насыщением гистерезисных потерь — упругим и неупругим (или пластическим) [22, 23, 26], когда $f(\xi = 0) = 0$ и $f(\xi = 0) \neq 0$ соответственно. Отметим, что уравнения состояния микронеоднородных сред с разными гистерезисными дефектами (упругим и неупругим) также будут гистерезисными, но разными, а именно, разными будут гистерезисные слагаемые в этих уравнениях. Эти различия можно выявить при изучении амплитудно-частотных зависимостей нелинейных эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерации высших гармоник [25, 26].

Для дефектов с упругим гистерезисом [37]

$$f(\xi) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0 |\xi|)} \begin{cases} \gamma_1 \xi^2, & \xi \geq 0, \dot{\xi} > 0; \\ -\gamma_2 \xi^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \xi_m \xi, & \xi \geq 0, \dot{\xi} < 0; \\ -\gamma_3 \xi^2, & \xi \leq 0, \dot{\xi} < 0; \\ \gamma_4 \xi^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \xi_m \xi, & \xi \leq 0, \dot{\xi} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ξ_m — амплитуда деформации, $\gamma_0, \gamma_i, i = 1, \dots, 4$, — параметры гистерезисной нелинейности, $\gamma_0 \geq 0, |\gamma_i| \xi_m \ll 1, |\gamma_i| \gg 1$. Гистерезис (2) аналогичен дислокационному гистерезису Гранато—Люкке [21]; он также состоит из четырёх параболических ветвей (вообще говоря, несимметричных), непрерывно переходящих друг в друга при $\xi = \pm \xi_m$ и $\xi = 0$. Гистерезис Гранато—Люкке связывается с гистерезисным поведением дислокаций под действием внешнего переменного напряжения, а именно, с последовательным и лавинообразным отрывом дислокаций от примесных атомов при нагрузке ($\xi \geq 0, \dot{\xi} > 0$; $\xi \leq 0, \dot{\xi} < 0$) и одновременным закреплением на них же при разгрузке ($\xi \geq 0, \dot{\xi} < 0$; $\xi \leq 0, \dot{\xi} > 0$).

Для дефектов с неупругим гистерезисом [38]

$$f(\xi) = \frac{\beta \xi_m \xi}{1 + \gamma_0 \xi_m} + \frac{1}{2(1 + \gamma_0 \xi_m)} \begin{cases} \beta_1 \xi^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \xi_m^2, & \dot{\xi} > 0; \\ -\beta_2 \xi^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \xi_m^2, & \dot{\xi} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь γ_0 , β , β_i , $i = 1, 2$, — параметры гистерезисной нелинейности, $\gamma_0 \geq 0$, $\beta \xi_m \ll 1$, $\beta_i \xi_m \ll 1$, $|\beta| \gg 1$, $|\beta_i| \gg 1$. Гистерезис (3) состоит из двух параболических ветвей: положительной ($\dot{\xi} > 0$) и отрицательной ($\dot{\xi} < 0$), переходящих друг в друга при $\xi = \pm \xi_m$. Здесь гистерезисное поведение поликристалла связывается с его необратимой микропластической деформацией [20, 23], возникающей при напряжениях, существенно меньших макроскопического предела текучести твёрдого тела.

В выражениях (2) и (3) за насыщение гистерезисных потерь и дефекта модуля упругости отвечают множители $(1 + \gamma_0 |\xi|)^{-1}$ и $(1 + \gamma_0 \xi_m)^{-1}$ соответственно [37, 38].

При малой концентрации дефектов ($\nu/\xi \ll 1$) уравнение состояния микро-неоднородной среды имеет следующий вид [27, 28]:

$$\sigma(\varepsilon) = E \left\{ \varepsilon - \int_0^\infty \int_0^1 R(\varepsilon) N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega - \int_0^\infty \int_0^1 \zeta R\{f[R(\varepsilon)]\} N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right\}. \quad (4)$$

Здесь

$$\left| \int_0^\infty \int_0^1 \zeta R\{f[R(\varepsilon)]\} N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right| \ll \left| \int_0^\infty \int_0^1 R(\varepsilon) N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right| \ll |\varepsilon|,$$

$R(\varepsilon) = (\Omega/\zeta) \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \exp[-\Omega(t - \tau)] d\tau$, $\Omega = \zeta E/\alpha$ — релаксационная частота дефекта, $0 < \Omega < \infty$, $N = N(\zeta, \Omega)$ — функция распределения дефектов по параметрам ζ и Ω . Поскольку параметры дефектов ζ и α независимы, то, без ограничения общности, можно считать, что $N(\zeta, \Omega) = N_0 N_\zeta(\zeta) N_\Omega(\Omega)$, где N_0 — концентрация дефектов. Результаты экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения показывают, что релаксационные частоты для многих поликристаллических твёрдых тел (металлов и горных пород) находятся в диапазоне от нескольких килогерц до нескольких десятков килогерц [14–19]. Отметим, что уравнение состояния (4) с упругим гистерезисом (2) применимо для описания волн любой формы [26, 39]. Уравнение состояния (4) с неупругим гистерезисом (3) применимо только для описания периодических (или квазипериодических) разнополярных волн и не применимо для описания распространения однополярных импульсов [26, 39].

Уравнение состояния (4) содержит линейное и нелинейное (гистерезисное) релаксационные слагаемые, при этом нелинейное слагаемое не совсем независимо от линейного (как для однородной среды): нелинейность микро-неоднородной среды зависит от её линейных релаксационных свойств. Линейная и нелинейная релаксация такой среды обусловлены вязкоупругими свойствами нелинейных дефектов, причём нелинейная релаксация проявляется дважды: первый раз за счёт линейной релаксации, поскольку нелинейная функция в уравнении (4) определяется линейным откликом дефектов, второй раз — как релаксация самой нелинейной функции. Линейная релаксация приводит к линейным диссипации и дисперсии акустических волн в микро-неоднородной среде, а нелинейная релаксация — к зависимости нелинейных свойств такой среды от частоты волны. Вследствие гистерезисной нелинейности дефектов, уравнение состояния (4) микро-неоднородной среды также является гистерезисным, при этом гистерезис в уравнении состояния микро-неоднородной среды соответствует гистерезису в уравнении состояния её дефектов.

В низкочастотном диапазоне ($\omega/\Omega \ll 1$) уравнение (4) сводится к уравнению с безынерционной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией:

$$\sigma(\varepsilon) = E_0[\varepsilon - \mu f(\varepsilon)] + \eta \dot{\varepsilon}, \quad (5)$$

где

$$E_0 = E \left[1 - \int_0^\infty \int_0^1 \frac{N(\zeta, \Omega)}{\zeta} d\zeta d\Omega \right], \quad \mu = \left[\int_0^\infty \int_0^1 \frac{N(\zeta, \Omega)}{\zeta^2} d\zeta d\Omega \right] \left[1 - \int_0^\infty \int_0^1 \frac{N(\zeta, \Omega)}{\zeta} d\zeta d\Omega \right]^{-1},$$

$$\eta = E \int_0^\infty \int_0^1 \frac{N(\zeta, \Omega)}{\zeta \Omega} d\zeta d\Omega, \quad \mu |f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon|, \quad \eta |\dot{\varepsilon}| \ll E_0 |\varepsilon|.$$

Подставляя уравнение состояния (4) в уравнение движения $\rho \partial^2 U / \partial t^2 = \partial \sigma(\varepsilon) / \partial x$ [5], получим волновое уравнение для продольной (вдоль оси x) деформации $\varepsilon = \partial U(x, t) / \partial x$:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\partial^2 R(\varepsilon)}{\partial x^2} N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right] = -C^2 \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\partial^2 R\{f[R(\varepsilon)]\}}{\partial x^2} \zeta N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega, \quad (6)$$

где U — смещение, ρ — плотность, $C = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость волны в среде без дефектов.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНТЕНСИВНОЙ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Зададим граничное условие в виде $\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ и рассмотрим нелинейные акустические эффекты, возникающие при распространении акустической волны в такой среде. По мере распространения первоначально гармоническая волна будет искажаться, при этом в среде будут возбуждаться волны на кратных частотах 2ω , 3ω и т. д. Решение уравнения (6) будем искать методом возмущений, полагая, что

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p(x) \sin[\omega_p t - k_p x - \varphi_p(x)], \quad \left| \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon_p(x) \sin[\omega_p t - k_p x - \varphi_p(x)] \right| \ll \varepsilon_1(x), \quad (7)$$

где $\omega_p = p\omega$, $k = \omega/C$, $k_p = \omega_p/C = pk$, $d\varepsilon_p(x)/dx \ll k_p \varepsilon_p(x)$, $d\varphi_p(x)/dx \ll k_p \varphi_p(x)$. Подставляя (7) в уравнение (6) и выделяя в нём соответствующие гармонические составляющие, находим выражения для амплитуд и фаз волн на основной частоте ω и на её второй и третьей гармониках, а также формулы для нелинейных декремента затухания $\delta(\omega, \varepsilon_1)$ и относительного изменения $\Delta C(\omega, \varepsilon_0)/C = [C(\omega, 0) - C(\omega, \varepsilon_0)]/C$ скорости распространения волны на основной частоте при $A_{l,1} kx \ll 1$, $A_1 \varepsilon_0 kx \ll 1$ и $|\varphi_p(x) - p\varphi_1(x)| \ll \pi$:

$$\varepsilon_1(x) \cong \varepsilon_0 \{1 - [A_{l,1} + A_1(x=0)\varepsilon_0] kx\}, \quad \varphi_1(x) \cong \varepsilon_0 [B_{l,1} + B_1(x=0)\varepsilon_0] kx; \quad (8)$$

$$\delta(\omega, \varepsilon_0) \approx A_1(x=0)\varepsilon_0, \quad \Delta C(\omega, \varepsilon_0)/C \approx B_1(x=0)\varepsilon_0; \quad (9)$$

$$\varepsilon_p(x) \approx \sqrt{A_p^2(x=0) + B_p^2(x=0)} \varepsilon_0^2 k_p x, \quad p = 2, 3; \quad (10)$$

$$\varphi_2(x) \approx \varphi_1(x) + \frac{1}{2} B_{l,2} k_2 x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{A_2(x=0)}{B_2(x=0)} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{A_2(x)}{B_2(x)} \right];$$

$$\varphi_3(x) \approx \frac{3}{2} \varphi_1(x) + \frac{1}{2} B_{l,3} k_3 x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{A_3(x=0)}{B_3(x=0)} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{A_3(x)}{B_3(x)} \right].$$

Здесь

$$A_{l,p}(\omega) = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{p\omega\Omega N(\zeta, \Omega)}{2\zeta(p^2\omega^2 + \Omega^2)} d\zeta d\Omega, \quad B_{l,p}(\omega) = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\Omega^2 N(\zeta, \Omega)}{2\zeta(p^2\omega^2 + \Omega^2)} d\zeta d\Omega.$$

В выражениях (8)–(10) нелинейные коэффициенты A_p и B_p определяются видом гистерезиса и его параметрами, начальной амплитудой ε_0 волны и её частотой ω , функцией распределения $N(\zeta, \Omega)$ дефектов и координатой x :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty \int_0^1 \{a_1[1 - (\omega/\Omega)^2] + 2b_1(\omega/\Omega)\} \frac{N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega}{\zeta^2 [1 + (\omega/\Omega)^2]^{5/2}}, \\ B_1 &= \int_0^\infty \int_0^1 \{b_1[1 - (\omega/\Omega)^2] - 2a_1(\omega/\Omega)\} \frac{N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega}{\zeta^2 [1 + (\omega/\Omega)^2]^{5/2}}, \\ A_p &= - \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\cos \Psi_p \sqrt{a_p^2 + b_p^2} N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega}{\zeta^2 [1 + (\omega/\Omega)^2] \sqrt{1 + (p\omega/\Omega)^2}}, \quad B_p = - \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\sin \Psi_p \sqrt{a_p^2 + b_p^2} N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega}{\zeta^2 [1 + (\omega/\Omega)^2] \sqrt{1 + (p\omega/\Omega)^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $p = 2, 3$, $\Psi_2 = -2\psi_1 - \psi_2 + \phi_2$, $\text{tg } \phi_2 = b_2/a_2$, $\Psi_3 = -3\psi_1 - \psi_3 + \phi_3$, $\text{tg } \phi_3 = a_3/b_3$, а коэффициенты a_1 , b_1 , a_p и b_p определяются далее.

Из выражения (8) видно, что при $A_1 > 0$ в среде будет наблюдаться ограничение амплитуды волны, а при $A_1 < 0$ – самопросветление среды. Аналогично, если $B_1 > 0$, то $\Delta C(\varepsilon_1) > 0$, если $B_1 < 0$, то $\Delta C(\varepsilon_1) < 0$.

Для твёрдых тел, содержащих дефекты с упругим гистерезисом (2), имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{8\pi a} \left[1 + \frac{2}{a} - \frac{2(1+a)\ln(1+a)}{a^2} \right]; \\ b_1 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{4\pi a} \left(1 - \frac{\pi}{2a} + \frac{\arccos a}{a\sqrt{1-a^2}} \right) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{16a} \left(1 - \frac{4}{\pi a} + \frac{2}{a^2} - \frac{4\arccos a}{\pi a^2\sqrt{1-a^2}} \right); \\ a_2 &= - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{12\pi a} \left[1 - \frac{3}{a} - \frac{6}{a^2} + \frac{6(1+a)\ln(1+a)}{a^3} \right]; \\ b_2 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{2\pi a} \left[1 - \frac{\pi}{2a} + \frac{(2-a^2)\arccos a}{2a\sqrt{1-a^2}} \right] - \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{12\pi} \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{6}{a^2} - \frac{3\pi}{a^3} + \frac{3(2-a^2)\arccos a}{a^3\sqrt{1-a^2}} \right]; \\ a_3 &= - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{24\pi a} \left[1 + \frac{10}{a} - \frac{12}{a^2} - \frac{24}{a^3} + \frac{6(1+a)(4-a^2)\ln(1+a)}{a^4} \right]; \\ b_3 &= \frac{1}{12\pi} \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{a} \right) \left[1 - \frac{3\pi}{2a} - \frac{12}{a^2} + \frac{6\pi}{a^3} - \frac{3(4-3a^2)\arccos a}{a^3\sqrt{1-a^2}} \right]; \\ a &= \frac{\gamma_0\varepsilon_1(x)}{\zeta [1 + (\omega/\Omega)^2]^{1/2}} = \frac{a_0\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_0\zeta [1 + (\omega/\Omega)^2]^{1/2}}, \quad a_0 = \gamma_0\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, для твёрдых тел, содержащих дефекты с неупругим гистерезисом (3), получаем те же выражения (11), в которых следует положить

$$a_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{3\pi(1+a)}, \quad b_1 = \frac{\beta}{2(1+a)}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{16(1+a)}, \quad a_3 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{15\pi(1+a)}, \quad b_3 = 0. \quad (13)$$

Из сравнения выражений (11)–(13) видно, что одни и те же коэффициенты a_n , b_n (A_n , B_n) для сред с упругим и неупругим гистерезисами определяются разными формулами. Эти формулы существенно упрощаются в низкочастотном диапазоне ($\omega/\Omega \ll 1$) при $\gamma_0 = 0$, при этом коэффициенты a_n и b_n (A_n и B_n) не зависят ни от амплитуды, ни от частоты волны.

Для среды с упругим гистерезисом при $\omega/\Omega \ll 1$ и $\gamma_0 = 0$ получаем

$$\begin{aligned} A_1(\omega = 0, \gamma_0 = 0) &= \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{24\pi} \right) K, \quad B_1(0, 0) = \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{16} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{6\pi} \right) K, \\ A_2(0, 0) &= \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{24\pi} \right) K, \quad B_2(0, 0) = \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{32} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{12\pi} \right) K, \\ A_3(0, 0) &= \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{30\pi} \right) K, \quad B_3(0, 0) = - \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{120\pi} \right) K, \end{aligned} \quad (14)$$

где $K = \int_0^\infty \int_0^1 N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega / \zeta^2$.

Аналогичные коэффициенты для неупругого гистерезиса при $\omega/\Omega \ll 1$ и $\gamma_0 = 0$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_1(0, 0) &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{3\pi} K, \quad B_1(0, 0) = \frac{\beta}{2} K, \quad A_2(0, 0) = 0, \quad B_2(0, 0) = - \frac{\beta_1 - \beta_2}{16} K, \\ A_3(0, 0) &= 0, \quad B_3(0, 0) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{15\pi} K. \end{aligned} \quad (15)$$

Из сравнения выражений (8)–(15) следует, что при $\omega/\Omega \ll 1$, $\gamma_0 = 0$, $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/(3\pi) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$ и $\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$ коэффициенты $A_1(0, 0)$ и $B_1(0, 0)$ для упругого и неупругого гистерезисов, ответственные за нелинейные декремент затухания и дефект модуля упругости, совпадают. Из выражений (14) и (15) также видно, что эти коэффициенты однозначно определяют значения коэффициентов $A_3(0, 0)$, $B_3(0, 0)$ и $\sqrt{A_3^2(0, 0) + B_3^2(0, 0)}$, при этом для коэффициентов $A_2(0, 0)$, $B_2(0, 0)$ и $\sqrt{A_2^2(0, 0) + B_2^2(0, 0)}$ такой связи с $A_1(0, 0)$ и $B_1(0, 0)$ нет. Для среды с упругим гистерезисом значение коэффициента $\sqrt{A_3^2(0, 0) + B_3^2(0, 0)}$ определяется коэффициентами $A_1(0, 0)$ и $B_1(0, 0)$, а для среды с неупругим гистерезисом — только коэффициентом $A_1(0, 0)$. Таким образом, соответствие (или несоответствие) экспериментально определённого значения коэффициента $\sqrt{A_3^2(0, 0) + B_3^2(0, 0)}$ (по амплитуде третьей гармоники) с результатом аналитического вычисления этого коэффициента (по экспериментально определённым коэффициентам $A_1(0, 0)$ и $B_1(0, 0)$) для какого-либо конкретного поликристалла будет указывать на то, каким гистерезисом, упругим или неупругим, описывается его уравнение состояния.

Далее, из выражений (8)–(13) следует, что при конечной частоте ω и $\gamma_0 > 0$ релаксация гистерезисных дефектов приводит к тому, что коэффициенты A_p и B_p становятся амплитудно- и частотно-зависимыми, при этом каждый из этих коэффициентов является комбинацией параметров γ_i , $i = 1, \dots, 4$, β , β_1 , β_2 и $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$. Из выражений (8)–(13) видно, что, даже если дефекты обладают не гистерезисной, а упругой «разномодульной» квадратичной нелинейностью, т. е. если $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$ ($\beta_1 + \beta_2 = 0$), так что гистерезисных потерь нет, но $\gamma_1 + \gamma_3 \neq 0$, $\gamma_2 + \gamma_4 \neq 0$ ($\beta \neq 0$), то такая микронеоднородная среда будет обладать и частотно-зависимыми нелинейной диссипацией и нелинейным дефектом модуля упругости, т. к. $A_1 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$. Это утверждение верно и в обратном случае, т. е. если $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 \neq 0$ ($\beta_1 + \beta_2 \neq 0$), но $\gamma_1 + \gamma_3 = 0$, $\gamma_2 + \gamma_4 = 0$ ($\beta = 0$).

С ростом параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$ нелинейность среды и, соответственно, интенсивность нелинейных эффектов уменьшаются. Вследствие неаналитической (квадратичной гистерезисной при $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$) нелинейности уравнения состояния (4), на малых расстояниях x от излучателя для

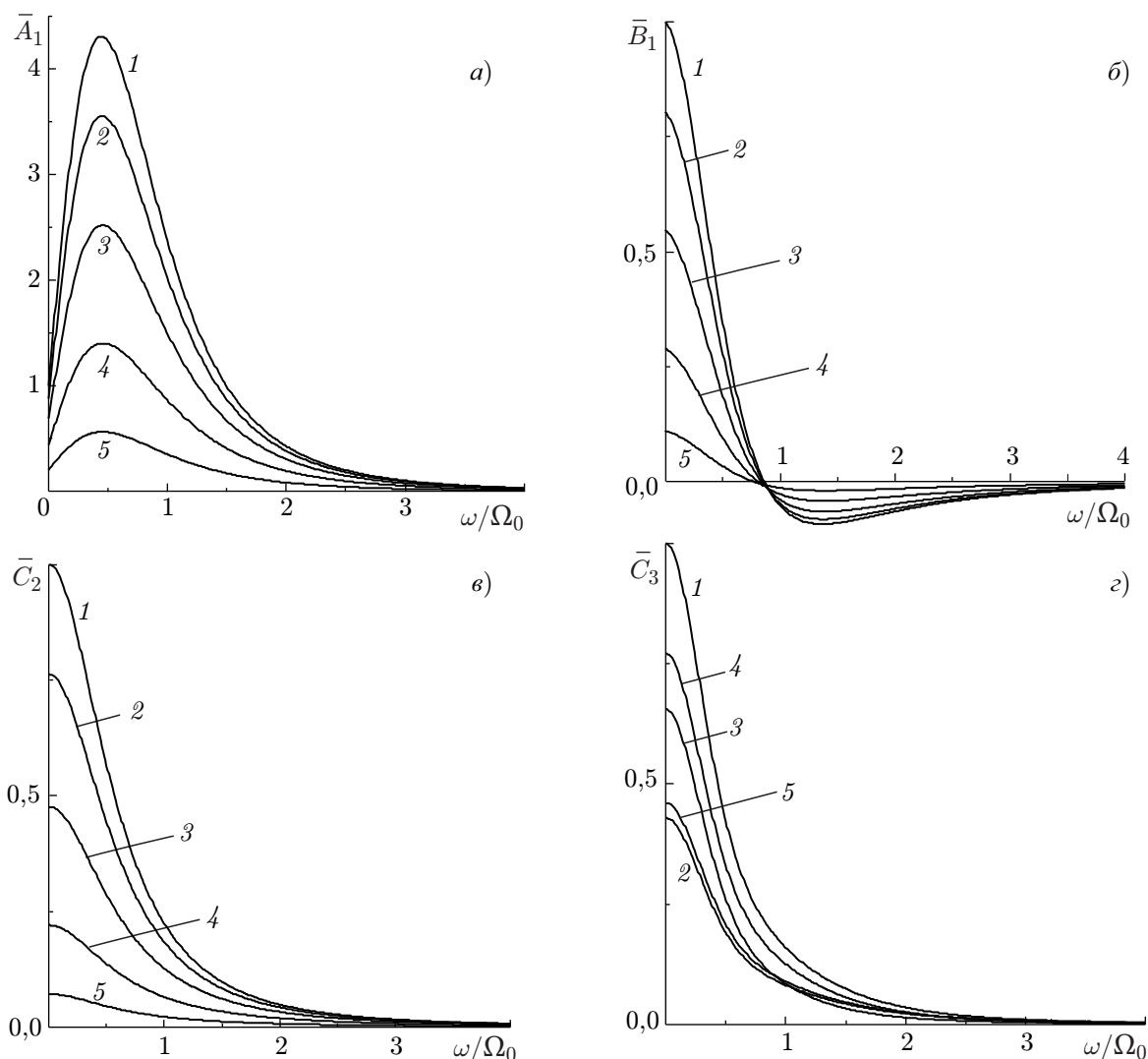


Рис. 2. Коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (а), $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (б), $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ (в) и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ (г) для среды с упругим гистерезисом при различных значениях параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$: $a_0 = 0$ (кривые 1), $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ (2), $a_0 = 10^{-2}$ (3), $a_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ (4), $a_0 = 10^{-1}$ (5)

амплитуд ε_p , $p \geq 2$, имеют место следующие соотношения: при $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$ имеем $\varepsilon_p(x) \propto \varepsilon_0^2$, а при $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$ величина $\varepsilon_p(x) \propto \varepsilon_0$ [25, 26, 37, 38].

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Далее проведём графический анализ зависимостей $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0) = A_1(\omega/\Omega_0, a_0)/A_1(0, 0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0) = B_1(\omega/\Omega_0, a_0)/B_1(0, 0)$ и

$$\bar{C}_p(\omega/\Omega_0, a_0) = \sqrt{A_p^2(\omega/\Omega_0, a_0) + B_p^2(\omega/\Omega_0, a_0)} / \sqrt{A_p^2(0, 0) + B_p^2(0, 0)},$$

$p = 2, 3$, для сред с упругим и неупругим гистерезисами при $N(\zeta, \Omega) = N_0 \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(\zeta - \zeta_0)$, $N_0 = 10^{-4}$, $\zeta_0 = 10^{-2}$, от параметров ω/Ω_0 и $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$. Здесь мы будем полагать, что при $\omega/\Omega_0 \ll 1$ и $\gamma_0 = 0$ выполняются соотношения $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/(3\pi) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$ и $\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$, когда значения коэффициентов $A_1(0, 0)$ и $B_1(0, 0)$ и для упругого,

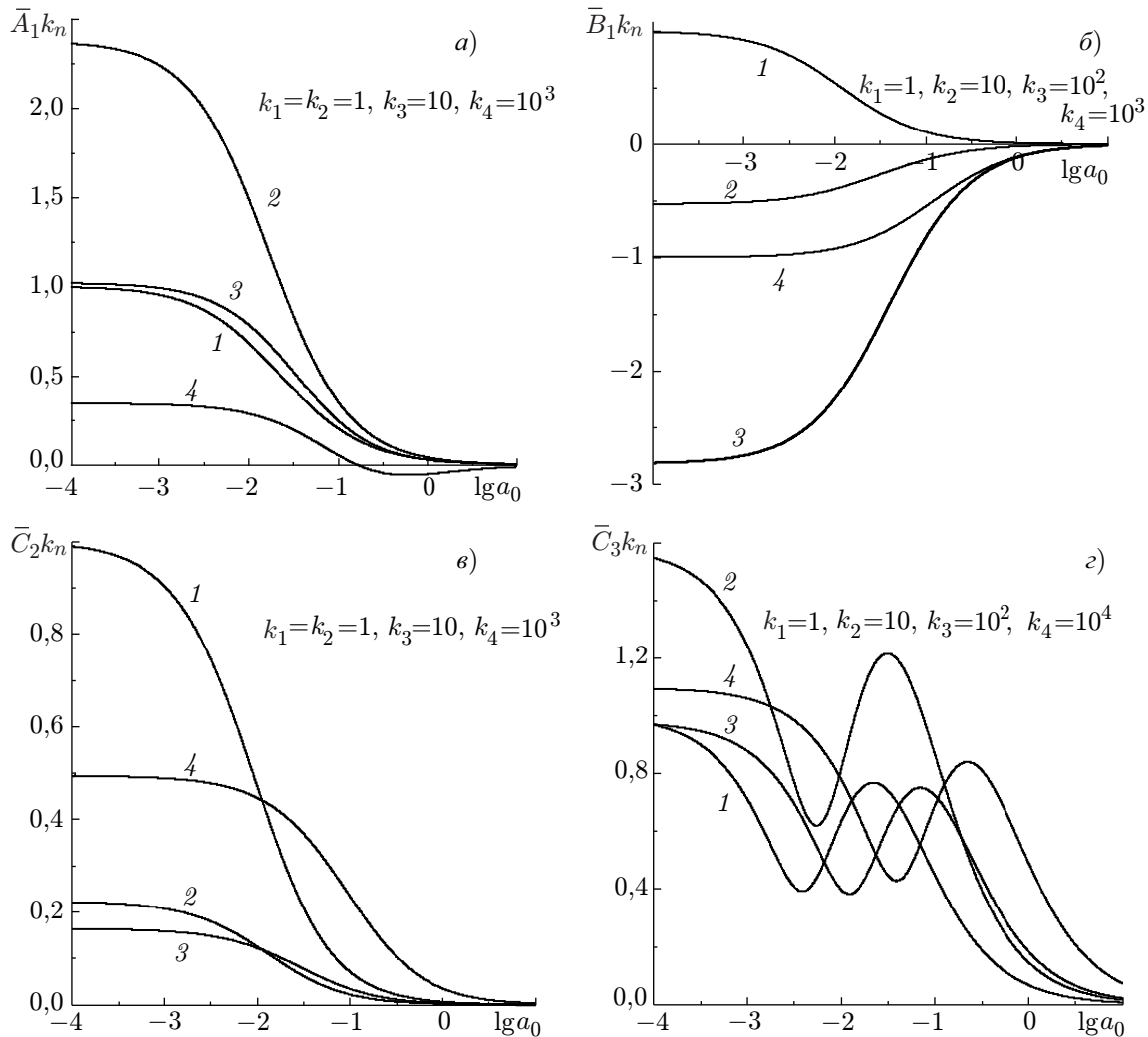


Рис. 3. Коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (а), $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (б), $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ (в) и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ (г) как функции параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$ для среды с упругим гистерезисом при различных значениях параметра ω/Ω_0 : $\omega/\Omega_0 = 10^{-4}$ (кривые 1), $\omega/\Omega_0 = 1$ (2), $\omega/\Omega_0 = 3$ (3), $\omega/\Omega_0 = 10$ (4). Индекс n у параметра k_n соответствует номеру кривой

и неупругого гистерезисов, ответственных за нелинейные декремент затухания и дефект модуля упругости, одинаковы.

3.1. Среда с упругим гистерезисом

На рис. 2 приведены графики зависимостей $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ от ω/Ω_0 для среды с упругим гистерезисом при $\gamma_1 = 50$, $\gamma_2 = 10$, $\gamma_3 = 25$, $\gamma_4 = 15$ и различных значениях параметра $a_0 = \gamma_0/\varepsilon_0$. Из рис. 2 видно, что с ростом частоты ω коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ в основном уменьшаются ($\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ уменьшается при $\omega/\Omega_0 > 1/2$, а $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ при $\omega/\Omega_0 \approx 0,8$ меняет знак). С ростом параметра a_0 первые три коэффициента монотонно уменьшаются, а коэффициент $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ изменяется немонотонно.

На рис. 3 приведены графики зависимостей тех же коэффициентов от параметра a_0 при различных значениях ω/Ω_0 . Видно, что с ростом a_0 модули коэффициентов $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$,

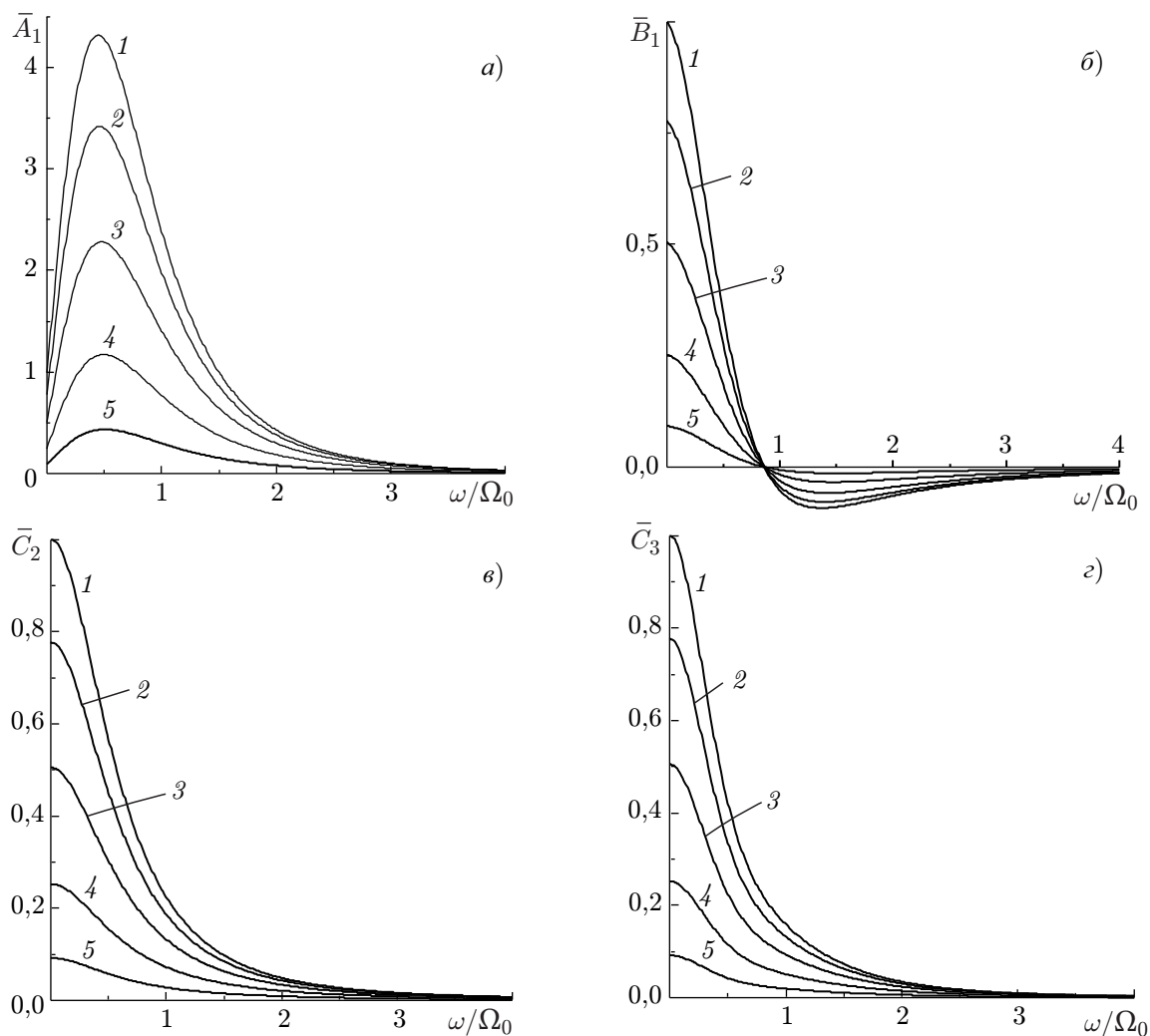


Рис. 4. Коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (а), $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (б), $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ (в) и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ (г) для среды с неупругим гистерезисом при различных значениях параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$: $a_0 = 0$ (кривые 1), $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ (2), $a_0 = 10^{-2}$ (3), $a_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ (4), $a_0 = 10^{-1}$ (5)

$\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ в основном уменьшаются. Коэффициент $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ ведёт себя более сложным образом: с ростом a_0 вначале он изменяется немонотонно, а затем уменьшается. С ростом частоты ω коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_{2,3}(\omega/\Omega_0, a_0)$ вначале изменяются немонотонно, но при $\omega/\Omega_0 \gg 1$ уменьшаются.

3.2. Среда с неупругим гистерезисом

Зависимости коэффициентов $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ от частоты ω и параметра a_0 для среды с неупругим гистерезисом ведут себя несколько по-другому.

На рис. 4 приведены графики зависимостей этих коэффициентов от ω/Ω_0 при $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/(3\pi) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 = 17,8$ и $\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 = 12,5$ ($\beta_1 = 7,5$; $\beta_2 = 5$) и различных значениях параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$. На рис. 4 видно, что с ростом частоты ω коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ в основном уменьшаются ($\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ уменьшается при $\omega/\Omega_0 > 1/2$, а $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ при $\omega/\Omega_0 \approx 0,8$ меняет знак). С ростом параметра a_0 все коэффициенты монотонно уменьшаются.

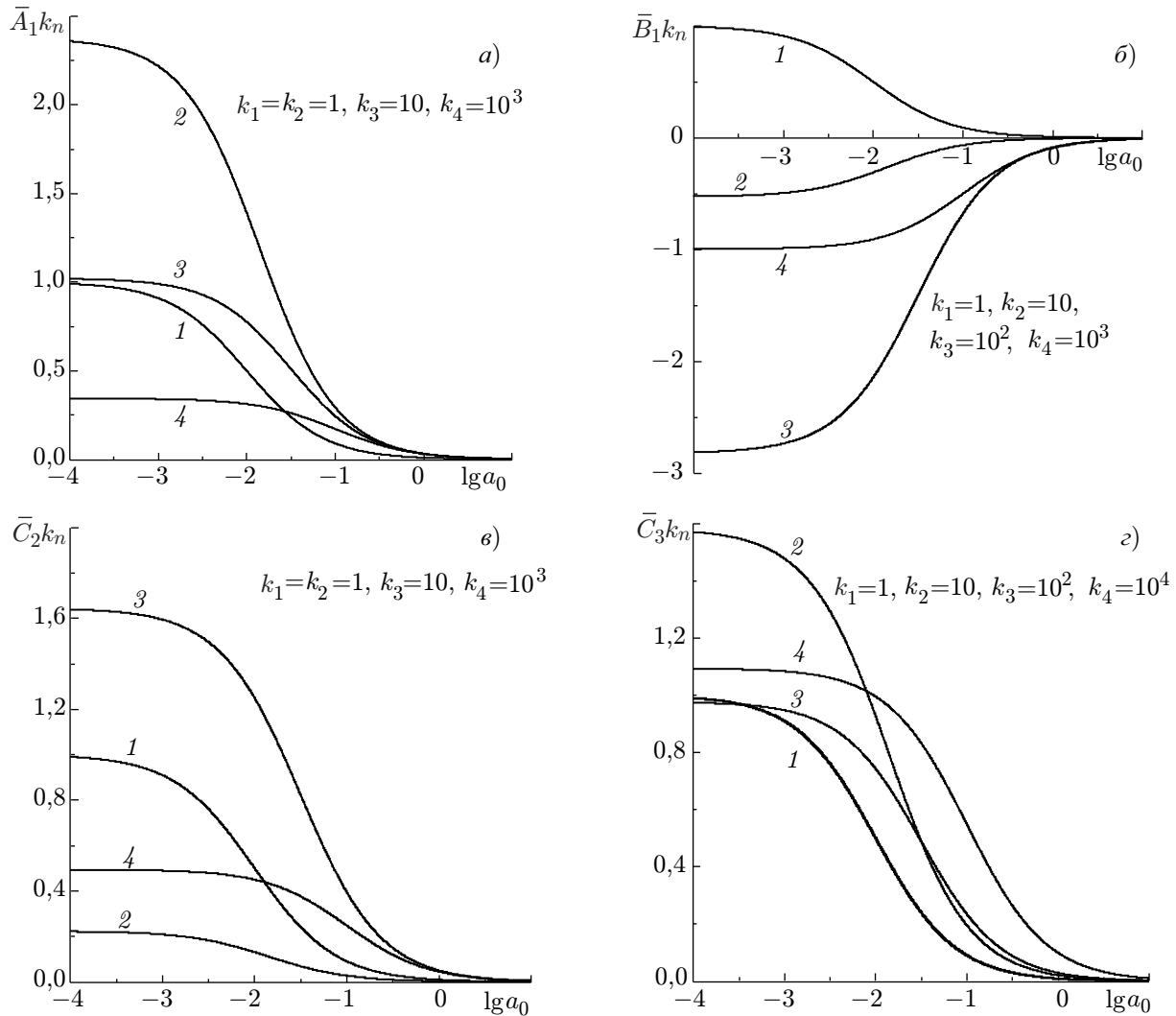


Рис. 5. Коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (а), $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ (б), $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ (в) и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ (г) как функции параметра $a_0 = \gamma_0 \varepsilon_0$ для среды с неупругим гистерезисом при различных значениях параметра ω/Ω_0 : $\omega/\Omega_0 = 10^{-4}$ (кривые 1), $\omega/\Omega_0 = 1$ (2), $\omega/\Omega_0 = 3$ (3), $\omega/\Omega_0 = 10$ (4). Индекс n у параметра k_n соответствует номеру кривой

На рис. 5 приведены графики зависимостей этих коэффициентов от параметра a_0 при различных значениях ω/Ω_0 . Видно, что с ростом a_0 модули коэффициентов $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ уменьшаются. С ростом частоты ω коэффициенты $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ вначале изменяются немонотонно, но уменьшаются при $\omega/\Omega_0 \gg 1$.

Из сравнения зависимостей на рис. 2–5 видно, что при одинаковых значениях параметров ω/Ω_0 и a_0 значения коэффициентов $\bar{A}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$, $\bar{B}_1(\omega/\Omega_0, a_0)$ и $\bar{C}_2(\omega/\Omega_0, a_0)$ для сред с упругим и неупругим гистерезисами довольно близки, в то время как значения коэффициентов $\bar{C}_3(\omega/\Omega_0, a_0)$ значительно отличаются, что является проявлением характерных отличий нелинейных акустических эффектов в средах с упругим и неупругим гистерезисами. Эти отличия связаны с различием как самих гистерезисных уравнений состояния дефектов (при $\gamma_0 \xi_m \ll 1$), так и множителей $(1 + \gamma_0 |\xi|)^{-1}$ и $(1 + \gamma_0 \xi_m)^{-1}$, отвечающих за насыщение гистерезисных потерь и дефекта модуля упругости.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе реологической модели микронеоднородной среды получено уравнение состояния поликристаллического твёрдого тела с насыщением гистерезисных потерь и релаксацией, при этом рассмотрены дефекты среды с двумя основными видами гистерезисов: упругим и неупругим. Методом возмущений проведено исследование нелинейных эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерации высших гармоник, возникающих при распространении первоначально гармонических волн в таких средах. Получены выражения для эффективных параметров нелинейности таких сред для эффектов самовоздействия волны и генерации её второй и третьей гармоник. Показано, что насыщение гистерезисных потерь приводит к различию амплитудных зависимостей нелинейных акустических эффектов при малых и больших амплитудах первичной волны, а нелинейная релаксация — к частотной зависимости эффективных параметров нелинейности среды. Знания теоретических амплитудно-частотных зависимостей нелинейных акустических эффектов в поликристаллических гистерезисных материалах необходимы и полезны при проведении соответствующих экспериментов и анализе их результатов. Рассмотрен наиболее простой случай микронеоднородной среды, когда релаксационные параметры гистерезисных дефектов одинаковы. В действительности такие дефекты могут иметь некоторое распределение по параметрам упругости и релаксационным частотам. В этом случае амплитудные закономерности нелинейных акустических эффектов, обусловленные гистерезисной нелинейностью среды, не изменятся, но их частотные зависимости, связанные с нелинейной релаксацией дефектов, будут другими. Таким образом, наряду с гистерезисными, изучение нелинейных релаксационных свойств поликристаллических материалов также может быть использовано для выявления физических механизмов нелинейности микронеоднородных сред и их диагностики.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПФ РАН по теме 0035–2019–0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
3. Зарембо Л. К., Красильников В. А. // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, № 4. С. 549.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
6. Naugol'nykh K. A., Ostrovsky L. A. Nonlinear wave processes in acoustics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 312 p.
7. Hamilton M. F., Blackstock D. T. Nonlinear acoustics. New York: Academic Press, 1988. 455 p.
8. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
9. Гурбатов С. Н., Руденко О. В., Саичев А. И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
10. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1988. V. 50, No. 1. P. 65.
11. Ostrovsky L. A., Johnson P. A. // La Rivista del Nuovo Cimento. 2001. V. 24. Ser. 4, No. 7. P. 1.
12. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176, № 1. С. 77.
13. Guyer R. A., Johnson P. A. Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of granular media including rocks and soil. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2009. 410 p.
14. Назаров В. Е. // Физика металлов и металловедение. 1999. Т. 88, № 4. С. 82.

15. Назаров В. Е. // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 2. С. 233.
16. Назаров В. Е., Радостин А. В., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 1. С. 85.
17. Назаров В. Е., Радостин А. В. // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 4. С. 524.
18. Назаров В. Е., Колпаков А. Б., Радостин А. В. // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13, № 2. С. 41.
19. Nazarov V. E., Radostin A. V. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015. 251 p.
20. Давиденков Н. Н. // Журн. техн. физики. 1938. Т. 8, № 6. С. 483.
21. Granato A. V., Lucke K. J. // J. Appl. Phys. 1956. V. 27, No. 6. P. 583.
22. Asano S. // J. Phys. Soc. Japan. 1970. V. 29, No. 4. P. 952.
23. Лебедев А. Б. // Физика твёрдого тела. 1999. Т. 41, № 7. С. 1214.
24. Назаров В. Е., Радостин А. В. // Физика Земли. 2003. № 2. С. 85.
25. Назаров В. Е., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 4. С. 711.
26. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405.
27. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acoust. Lett. 1999. V. 22, No. 12. P. 236.
28. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acta Acustica. With Acustica. 2002. V. 88, No. 1. P. 40.
29. Ниблетт Д., Уилкс Дж. // Успехи физ. наук. 1963. Т. 80, № 1. С. 125.
30. Назаров В. Е. // Акуст. журн. 1991. Т. 31, № 1. С. 150.
31. Nazarov V. E., Kolpakov A. B. // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107, No. 4. P. 1915.
32. Голяндин С. Н., Кустов С. Б., Сапожников К. В. и др. // Физика твёрдого тела. 1998. Т. 40, № 10. С. 1839.
33. Голяндин С. Н., Сапожников К. В., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2005. Т. 47, № 4. С. 614.
34. Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2010. Т. 52, № 1. С. 43.
35. Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2010. Т. 52, № 12. С. 2341.
36. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Электричество. М.: Физматлит, МФТИ, 2004. 656 с.
37. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 10. С. 762.
38. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 2. С. 124.
39. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 4. С. 529.

Поступила в редакцию 9 ноября 2018 г.; принята в печать 30 мая 2019 г.

NONLINEAR WAVE PROCESSES IN POLYCRISTALLINE SOLIDS WITH HYSTERESIS-LOSS SATURATION AND RELAXATION

V. E. Nazarov and S. B. Kiyashko

Using the perturbation method, we study the processes of nonlinear propagation of the initially harmonic elastic waves in micro-inhomogeneous media, namely, polycrystalline solids with hysteresis-loss saturation and relaxation. The media with the basic hysteresis types, elastic and inelastic, are considered. The efficient nonlinearity parameters of such media are determined for the processes of self-action of a quasiharmonic wave and generation of its higher harmonics.