

УДК 621.396:517.9

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МОДЕЛИ ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ПОЛЯ В ВИДЕ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН

*А. В. Сочилин, С. И. Эминов**

Новгородский госуниверситет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Россия

Работа посвящена сравнению значений входных сопротивлений линейной вибраторной антенны, полученных на основе решения интегральных уравнений точными и приближёнными методами. Для решения уравнений с точными ядрами используются разложения по полиномам Чебышева с весом и по тригонометрическим функциям. Полученные авторскими методами результаты сравниваются с результатами вычислений с помощью известной программы MMANA, основанной на решении интегрального уравнения с приближённым ядром и модели дельта-функции. Проведены теоретические и численные исследования зависимости входного сопротивления от распределения первичного поля. Определены погрешности, к которым приводит замена точного ядра на приближённое.

ВВЕДЕНИЕ

Способы расчёта вибраторных антенн, базирующиеся на решении интегральных уравнений, начали развиваться с 30-х годов XX века [1, 2]. С появлением ЭВМ эти исследования активизировались, для расчётов стали применяться такие численные методы как метод Галёркина, метод коллокаций, метод моментов. Математической моделью вибратора служило интегральное уравнение с приближённым ядром. Результаты исследований в этом направлении были систематизированы в работе [3]. Основное достижение заключается в том, что значения входного сопротивления вибраторных антенн, полученные численными методами, неплохо совпадали с результатами экспериментов.

В 1980-х годах появилось новое направление, связанное с выделением логарифмической особенности ядра точного интегрального уравнения в явном виде [4, 5]. Данный подход позволил применять опыт, накопленный в теории дифракции электромагнитных волн на экранах. Вместе с тем, на этом пути появились серьёзные трудности, связанные с наличием малого параметра — радиуса вибраторной антенны и локальности области возбуждения. Дальнейшее развитие теории вибраторных антенн связано с преодолением этих трудностей. Интерес к данным исследованиям объясняется также тем, что подобными методами анализируются широко применяемые на практике микрополосковые и щелевые антенны. В работах последних двух десятилетий [6–9] проведено теоретическое изучение уравнений и построены различные численные методы расчёта входных сопротивлений. Однако в указанных работах нет сравнений с результатами других работ и нет демонстраций скорости сходимости. Эффективность численных методов этих работ для вычисления входного сопротивления — характеристики, наиболее чувствительной к изменениям параметров антенн — остаётся открытой. С другой стороны, в настоящее время для расчёта антенн разработаны и применяются различные программные пакеты, такие как MMANA [10], CST Microwave Studio, FEKO, Ansoft HFSS и др. Поэтому весьма актуальна проблема сравнения различных методов.

Целью данной работы является оценка погрешности входного сопротивления вибраторных антенн при применении в качестве возбуждающего поля дельта-функции.

* eminovsi@mail.ru

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ВЫДЕЛЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Рассмотрим трубчатый линейный вибратор с длиной $2l$ и радиусом a с идеально проводящей поверхностью. Первичное поле отлично от нуля на участке длиной 2Δ (см. рис. 1). Вибратор находится в свободном пространстве. Интегральное уравнение относительно функции тока имеет вид [11]

$$\frac{kl}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} (xr - 1) I_0(\sqrt{x^2 - 1} ka) K_0(\sqrt{x^2 - 1} ka) \int_{-1}^{+1} I(t) \cos[lx(\tau - t)] dt dx = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0(l\tau). \quad (1)$$

Здесь ε, μ — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости, k — волновое число, $E^0(l\tau)$ — первичное поле, I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, K_0 — функция Макдональда нулевого порядка, t, x — переменные интегрирования, τ — переменная наблюдения.

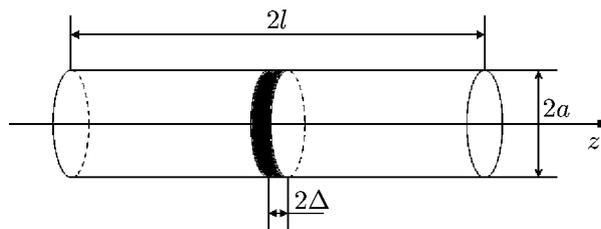


Рис. 1.

Используя асимптотику модифицированных функций Бесселя

$$I_0(xka)K_0(xka) \approx \frac{1}{2xka} \quad \text{при } xka \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

уравнение (2) можно привести к виду с выделенным главным оператором [11]

$$\beta(AI)(\tau) + (KI)(\tau) = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0(lk), \quad (3)$$

$$(AI)(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x \int_{-1}^{+1} I(t) \cos[x(\tau - t)] dt dx, \quad \beta = \frac{1}{4\pi(kl)(ka)}; \quad (4)$$

$$(KI)(\tau) = \frac{kl}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \left[(x^2 - 1) I_0(\sqrt{x^2 - 1} ka) K_0(\sqrt{x^2 - 1} ka) - \frac{x}{2ka} \right] \int_{-1}^{+1} I(t) \cos[lx(\tau - t)] dt dx. \quad (5)$$

Метод выделения главного оператора на основе асимптотики (2) широко применяется в научной литературе [6–9] и является одним из основных математических приёмов. Однако, как следует из формулы (2), эффективность данного подхода зависит от радиуса вибратора a , и при весьма малых a , как показывают расчёты, асимптотика (2) практически не работает.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ТОКА ПО БАЗИСУ МЕЙКСНЕРА

Оператор A является симметричным положительно-определённым оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$ и имеет плотную область определения. Это позволяет ввести энергетическое пространство H_A со скалярным произведением и нормой

$$[u, \nu] = (Au, \nu), \quad [u]^2 = (Au, u). \quad (6)$$

Уравнение (3) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода в пространстве H_A и имеет единственное решение в пространствах $L_2[-1, 1]$ и H_A [12].

Система функций

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{1 - \tau^2} U_n(\tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{7}$$

где $U_n(\tau)$ — полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1, U_2(\tau) = 2, U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т. д., образует ортонормированный базис пространства H_A ,

$$[\varphi_n, \varphi_m] = (A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{8}$$

Каждая функция из (7) удовлетворяет условию Мейкснера на ребре: обращается в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$ по корневому закону. Поэтому этот базис далее будем для лаконичности называть базисом Мейкснера. Решение уравнения (3) ищется в виде ряда

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(\tau). \tag{9}$$

Подставим (9) в (3) и умножим скалярно в пространстве H_A на базисные функции; с учётом равенства (8) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\beta c_n + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m K_{mn} = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

где $K_{mn} = (K\varphi_m, \varphi_n)$ — матричные элементы,

$$f_n = \left(i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0, \varphi_n \right).$$

Затем система (10) решается методом усечения. В данном случае этот метод эквивалентен методу Галёркина, когда в разложении (9) учитывается конечное число слагаемых.

В задачах возбуждения, когда первичное поле локализовано в небольшой (по сравнению с длиной антенны) области, метод усечения сходится медленно. В связи с этим в работе [11] развит численно-аналитический метод.

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ БАЗИС: БЕСКОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как отмечено выше, эффективность асимптотики (2) зависит от радиуса a . Чем меньше этот радиус, тем больше времени требуется для вычисления матричных элементов K_{mn} . Кроме того, падает точность вычисления несобственных интегралов. Положительная определённость главного оператора A позволяет решать уравнение (1) на основе другого, например тригонометрического, базиса. Для эффективного вычисления матричных элементов и выявления их структуры вместо уравнения (1) выведем другое уравнение.

Используем разложение функции Грина в цилиндрической системе координат [13]

$$\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-in(\varphi - \varphi')] \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{h^2 - k^2} |z - z'|\right) \frac{J_n(hr)J_n(hr')}{\sqrt{h^2 - k^2}} h dh, \tag{11}$$

где h — переменная интегрирования, r, φ, z — координаты точки наблюдения, r', φ', z' — координаты точки излучения, R — расстояние между точками наблюдения и излучения, J_n — функция Бесселя порядка n . Тогда уравнение вибраторной антенны можно привести к виду

$$-\left(\frac{d^2}{kl d\tau^2} + kl\right) \int_{-1}^{+1} B(\tau, t) I(t) dt = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0(l\tau), \quad (12)$$

где

$$B(\tau, t) = \frac{-i}{4\pi} \int_0^1 \exp\left(-i \sqrt{1-x^2} |\tau-t|\right) \frac{J_0^2(xka)}{\sqrt{1-x^2}} x dx + \frac{1}{4\pi} \int_1^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{x^2-1} |\tau-t|\right) \frac{J_0^2(xka)}{\sqrt{x^2-1}} x dx. \quad (13)$$

Ограничиваясь рассмотрением только чётной задачи, разложим функцию тока по тригонометрическому базису

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(\nu_n \tau), \quad \nu_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad (14)$$

подставим уравнение в (12) и умножим скалярно в пространстве $L_2[-1, 1]$ на базисные функции $\cos(\nu_m \tau)$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_m (K_{mn}^{(1)} + K_{mn}^{(2)}) = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где $K_{mn}^{(1)}$ соответствует первому слагаемому в (13), а $K_{mn}^{(2)}$ — второму.

Матричные интегралы получаются в виде тройных интегралов. Однако интегрирование по переменным τ и t проводится аналитически с помощью следующих интегралов, найденных элементарными методами

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \exp(-x |\tau-t|) \cos(\nu_m t) \cos(\nu_n \tau) dt d\tau = \frac{2x \delta_{mn}}{x^2 + \nu_n^2} + \frac{2(-1)^{m+n} \nu_m \nu_n}{(x^2 + \nu_m^2)(x^2 + \nu_n^2)} [1 + \exp(-2x)], \quad (16)$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \exp[-i\alpha(\tau-t)] \cos(\nu_m t) \cos(\nu_n t) \cos(\nu_n \tau) dt d\tau = \frac{2(-1)^{m+n} \nu_m \nu_n}{(-\alpha^2 + \nu_m^2)(-\alpha^2 + \nu_n^2)} [1 + \cos(2\alpha)] + i \left[\frac{2\alpha \delta_{mn}}{-\alpha^2 + \nu_n^2} - \frac{2(-1)^{m+n} \nu_m \nu_n \sin(2\alpha)}{(-\alpha^2 + \nu_m^2)(-\alpha^2 + \nu_n^2)} \right], \quad (17)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{d\tau^2} \left[\int_{-1}^{+1} \exp(-x |\tau-t|) \cos(\nu_m t) dt \right] \cos(\nu_n \tau) d\tau =$$

$$= -\frac{2x\nu_n^2 \delta_{mn}}{x^2 + \nu_n^2} + \frac{2(-1)^{m+n}\nu_m\nu_n x^2}{(x^2 + \nu_m^2)(x^2 + \nu_n^2)} [1 + \exp(-2x)], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \exp[-i\alpha(\tau - t)] \cos(\nu_m t) \cos(\nu_n \tau) dt d\tau &= -\frac{2(-1)^{m+n}\nu_m\nu_n \alpha^2}{(-\alpha^2 + \nu_m^2)(-\alpha^2 + \nu_n^2)} [1 + \cos(2\alpha)] + \\ &+ i \left[\frac{-2\alpha\nu_n \delta_{mn}}{-\alpha^2 + \nu_n^2} + \frac{2(-1)^{m+n}\nu_m\nu_n \alpha^2 \sin(2\alpha)}{(-\alpha^2 + \nu_m^2)(-\alpha^2 + \nu_n^2)} \right], \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (19) \end{aligned}$$

В формулах (17) и (19) знаменатели обращаются в нуль, когда $\alpha = \nu_n$ и $\alpha = \nu_m$, но это устранимые особенности. Вычисление матричных элементов $K_{mn}^{(1)}$ на отрезке $[0, 1]$ не представляет трудности. Остановимся подробно на вычислении и анализе матричных элементов $K_{mn}^{(2)}$ на бесконечном интервале $[1, +\infty)$.

Из (13), (16) и (18) имеем

$$\begin{aligned} K_{mn}^{(2)} &= \frac{\delta_{mn}}{2\pi} \left[\frac{\nu_n^2}{(kl)^2} - 1 \right] \int_1^{+\infty} \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \nu_n^2/(kl)^2} dx - \\ &- \frac{kl\nu_n\nu_m(-1)^{m+n}}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{x^3 J_0^2(kax)}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1 + \exp(-2\sqrt{x^2 - 1} kl)}{[(x^2 - 1)(kl)^2 + \nu_n^2][(x^2 - 1)(kl)^2 + \nu_m^2]} dx. \quad (20) \end{aligned}$$

Второй интеграл в (20) остаётся абсолютно сходящимся, если a устремить к нулю. Первый интеграл (20), который отличен от нуля только на главной диагонали, при $a = 0$ расходится, однако удаётся его свести к табличному интегралу

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \nu_n^2/(kl)^2} dx &= I_0\left(\frac{\nu_n a}{l}\right) K_0\left(\frac{\nu_n a}{l}\right) + \\ &+ \int_1^{+\infty} \left(\frac{J_0^2(kax)x}{x^2 - 1 + \nu_n^2/(kl)^2} - \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 + \nu_n^2/(kl)^2} \right) dx - \int_0^1 \frac{J_0^2(kax)x}{x^2 + \nu_n^2/(kl)^2} dx. \quad (21) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (21) неограниченно растёт по мере уменьшения радиуса, поскольку

$$I_0(x)K_0(x) \approx \ln(1/x) + 0,115947, \quad x \rightarrow 0.$$

Из этой асимптотики следует, что диагональные элементы матрицы системы (15) растут по мере уменьшения радиуса вибратора по логарифмическому закону.

В заключение отметим, что система (15) решается методом усечения.

4. МОДЕЛЬ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ДАННОЙ МОДЕЛИ

В теории вибраторных антенн часто точное сингулярное ядро заменяется на приближённое ядро, а первичное поле по длине вибратора представляется в виде дельта функции Дирака:

$E_z^0(z) = U_0\delta(z)$, где U_0 — напряжение, z — координата вдоль длины вибратора, $-l \leq z \leq l$. На этих методах основаны многие программы моделирования проволочных антенн, например ММАНА [10], которая позволяет исследовать как линейные антенны, так и антенны сложной конфигурации.

Если решать уравнение (1) с такой правой частью, то ток обратится в бесконечность. Поэтому правую часть обычно представляют в виде

$$E_z^0(z) = U_0 \frac{1}{2\Delta} \begin{cases} 0, & |z| \geq \Delta; \\ 1, & |z| < \Delta. \end{cases} \quad (22)$$

Первичное поле отлично от нуля на участке длины 2Δ . Эта функция уже принадлежит пространству $L_2[-1, 1]$, и она аппроксимирует дельта-функцию $\delta(z)$ в интегральном смысле. Переходя в (22) к безразмерной переменной, получим

$$lE^0(l\tau) = U_0 \frac{1}{2T} \begin{cases} 0, & |\tau| \geq T; \\ 1, & |\tau| < T, \end{cases} \quad \text{где} \quad T = \frac{\Delta}{l}. \quad (23)$$

Наша ближайшая задача — это исследование зависимости входного сопротивления от параметра T . В численно-аналитическом методе [11] решение ищется в виде двух слагаемых, одно из которых находится аналитически, а второе численно. Аналитическая часть определяет зависимость от параметра T . Для изучения этой зависимости рассмотрим уравнение (3) только с первым слагаемым:

$$\frac{1}{4\pi kl ka} (AI_1)(\tau) = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0(l\tau). \quad (24)$$

Используя формулу аналитического обращения [13], получим

$$I_1(0) = i4ka \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \int_{-T}^{+T} f(t) \ln \left| \frac{t}{1 + \sqrt{1 - t^2}} \right| dt \approx \frac{ika}{30\pi} \left(\ln \left| \frac{T}{2} \right| - 1 \right). \quad (25)$$

Приближённая формула (25) получена при условии, что параметр T много меньше единицы.

Формула (25) определяет поведение тока в нуле. Он стремится к бесконечности по логарифмическому закону, когда параметр T стремится к нулю. Однако наличие множителя ka означает, что чем меньше радиус, тем слабее зависимость от параметра T и, как следствие, тем меньше погрешность, которая связана с использованием модели дельта-функции. Далее рассмотрим количественные показатели.

5. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Наиболее чувствительной к изменениям параметров антенны и трудно вычисляемой величиной является входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = U_0/I(0), \quad (26)$$

где $I(0)$ — ток в середине вибратора.

Сравним результаты, полученные на основе метода выделения особенности и применения базиса Мейкснера (раздел 2), с результатами, найденными с помощью тригонометрического базиса

Таблица 1. Относительное отклонение для $l/a = 50$

l/λ	T	базис Мейкснера, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	тригонометрический базис, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	δ , отн. ед.
0,10	0,10	$6,68 - i426,99$	$6,67 - i427,39$	0,0937
	0,005	$6,18 - i410,8$	$6,17 - i410,93$	0,0317
0,25	0,100	$93,56 + i49,93$	$93,42 + i49,62$	0,3210
	0,010	$100,396 + i44,13$	$100,16 + i43,831$	0,3470
	0,005	$102,41 + i42,19$	$102,19 + i41,861$	0,3570
0,45	0,010	$263,11 - i378,96$	$265,58 - i378,21$	0,5590
	0,005	$194,67 - i345,79$	$195,66 - i345,05$	0,311

Таблица 2. Относительное отклонение для $l/a = 100$

l/λ	T	базис Мейкснера, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	тригонометрический базис, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	δ , отн. ед.
0,10	0,10	$7,28 - i552,50$	$7,28 - i553,41$	0,165
	0,005	$6,92 - i538,68$	$6,92 - i539,56$	0,163
0,25	0,100	$88,65 + i50,80$	$88,51 + i50,42$	0,396
	0,010	$92,34 + i48,04$	$92,13 + i47,68$	0,400
	0,005	$93,37 + i47,31$	$93,14 + i46,94$	0,416
0,45	0,010	$620,25 - i551,76$	$629,25 - i547,18$	1,220
	0,005	$491,97 - i551,87$	$499,90 - i549,99$	1,100

Таблица 3. Относительное отклонение для $l/a = 200$

l/λ	T	базис Мейкснера, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	тригонометрический базис, $Z_{вх}, \text{ Ом}$	δ , отн. ед.
0,10	0,10	$7,65 - i677,37$	$7,63 - i677,81$	0,0650
	0,005	$7,41 - i666,71$	$7,40 - i667,32$	0,0915
0,25	0,100	$85,37 + i50,21$	$85,25 + i49,77$	0,4600
	0,010	$87,51 + i48,58$	$87,35 + i48,13$	0,4770
	0,005	$88,00 + i48,27$	$87,84 + i47,82$	0,4760
0,45	0,010	$1187,25 - i579,00$	$1189,89 - i569,31$	0,7600
	0,005	$1038,84 - i668,91$	$1045,73 - i659,96$	0,9140

(раздел 3). Как отмечено выше, эффективность метода выделения особенности и использования базиса Мейкснера падает по мере уменьшения радиуса.

Для расчёта тонких вибраторов оказывается целесообразным применять разложение функции Грина (11) и тригонометрический базис.

Для сравнения входных сопротивлений Z_1 и Z_2 , вычисленных двумя разными методами, введём относительное отклонение (различие):

$$\delta = \frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_1|} \cdot 100\% \tag{27}$$

В табл. 1–3 проведено сравнение двух упомянутых выше методов в широком диапазоне изменения радиуса, точнее величины l/a , и параметра возбуждения T , который определяется формулой (23) и обозначает относительную длину участка антенны, где первичное электрическое поле отлично от нуля. Для полуволнового вибратора относительное отклонение не превышает 0,5%. Для волнового вибратора относительное отклонение менее 1,5%. Таким образом, таблицы демонстрируют весьма удовлетворительное совпадение результатов двух методов.

Исследуем характер зависимости входного сопротивления от параметра возбуждения T . Будем менять его в широком диапазоне от $T = 0,005$ до $0,1$. Как видно из табл. 4, относительное отклонение снижается по мере уменьшения радиуса, и для тонких вибраторов оно становится меньше 2%. Результаты, представленные в табл. 4, вполне согласуются с теоретическими выводами из раздела 4 и выражением (25).

Проведём сравнение с результатами программы MMANA, которая широко применяется при моделировании вибраторных антенн. Эта программа основана на решении интегрального уравнения с приближённым ядром, а правая часть задаётся дельта функцией Дирака.

В табл. 5–7 приведены результаты сравнения с программой MMANA. В данных расчётах относительное отклонение достигало 10% для вибраторов с $l/a = 100$, что объясняется зависимостью входного сопротивления от параметра возбуждения. По мере увеличения отношения l/a , т. е. уменьшения радиуса, относительные отклонения уменьшались до практически приемлемых значений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развиты численные методы решения интегральных уравнений цилиндрической вибраторной антенны на основе базиса Мейкснера и тригонометрического базиса. Проведено сравнение этих методов и получено хорошее совпадение значений входного сопротивления.

Выполнены теоретические и численные исследования зависимости входного сопротивления от вида возбуждающего поля. Впервые в аналитическом виде получена формула, описывающая асимптотическое поведение тока при малых значениях параметра возбуждения.

Проведено сравнение точных методов с программой MMANA, основанной на модели дельта-

Таблица 4. Относительное отклонение входного сопротивления полуволнового вибратора для параметров $T = 0,1$ и $0,005$

l/a	различие $Z_{вх}$, %, базис Мейкснера	различие $Z_{вх}$, %, тригонометрический базис
50	11,09	11,07
100	5,75	5,69
200	3,29	3,28
1000	1,32	1,45

Таблица 5. Сравнения с программой MMANA, $l/a = 100$, $T = 0,01$

l/λ	MMANA, $Z_{вх}$, Ом	базис Мейкснера, $Z_{вх}$, Ом	δ , %
0,10	$8,17 - i596,40$	$7,28 - i552,5$	7,36
0,25	$89,15 + i40,11$	$92,34 + i48,04$	8,74
0,45	$713,50 - i540,42$	$620,25 - i551,776$	10,50

Таблица 6. Сравнения с программой MMANA, $l/a = 200$, $T = 0,01$

l/λ	MMANA, $Z_{вх}$, Ом	базис Мейкснера, $Z_{вх}$, Ом	δ , %
0,10	$8,20 - i711,19$	$7,65 - i677,37$	4,76
0,25	$85,89 + i41,58$	$87,51 + i48,58$	7,53
0,45	$1235,63 - i539,92$	$1187,25 - i579,00$	4,61

Таблица 7. Сравнения с программой MMANA, $l/a = 1000$, $T = 0,01$

l/λ	MMANA, $Z_{вх}$, Ом	тригонометрический базис $Z_{вх}$, Ом	δ , %
0,10	$8,21 - i978,44$	$7,97 - i956,96$	2,19
0,25	$81,32 + i41,21$	$81,88 + i46,63$	5,98
0,45	$2509,83 + i177,39$	$2488,76 + i256,32$	3,25

функции. Показано, что по мере увеличения отношения l/a , т. е. уменьшения радиуса антенны, относительные отклонения значений входного сопротивления снижаются. Полученные результаты также свидетельствуют о практической применимости модели дельта-функции только для тонких вибраторов, а для толстых вибраторов модель возбуждения в виде дельта-функции неприменима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hallen E. // *Nova acta regiae societatis scientiarum upsaliensis*: Ser. 4. 1938. V. 2, No. 4. P. 1.
2. Леонтович М. А., Левин М. Л. // *Журн. техн. физики*. 1944. Т. 14, № 9. С. 481,
3. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 485 с.
4. Тихонов А. Н., Ильинский А. С., Свешников А. Г. // *Проблемы вычислительной математики*. М.: МГУ, 1980. С. 96.
5. Jones D. S. // *IEEE Proc.* 1981. V. 128. No. 2. P. 114.
6. Неганов В. А., Корнев М. Г., Матвеев И. В. // *Письма в ЖТФ*. 2001. Т. 27, № 4. С. 62.
7. Лифанов И. К., Ненашев А. С. // *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41, № 1. С. 121.
8. Ключев Д. С., Соколова Ю. В. // *Радиотехника и электроника*. 2015. Т. 60, № 1. С. 52.
9. Ключев Д. С., Коршунов С. А., Осипов О. В. и др. // *Радиотехника и электроника*. 2018. Т. 63, № 5. С. 429.
10. Гончаренко И. В. Антенны КВ и УКВ: Часть 1. Компьютерное моделирование. ММНА. М.: ИП РадиоСофт, Журнал Радио, 2004. 128 с.
11. Сочилин А. В., Эминов С. И. // *Радиотехника и электроника*. 2008. Т. 53, № 5. С. 553.
12. Эминов С. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2017. Т. 60, № 12. С. 1093.
13. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. *Возбуждение электромагнитных волн*. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.

Поступила в редакцию 7 декабря 2018 г.; принята в печать 25 октября 2019 г.

ESTIMATING AN ERROR OF THE EXCITING-FIELD MODEL IN THE FORM OF A DELTA FUNCTION IN THE THEORY OF DIPOLE ANTENNAS

A. V. Sochilin and S. I. Eminov

We compare the values of the input resistances of a linear dipole antenna, which are obtained on the basis of solving integral equations using the exact and approximate methods. The expansions into the Chebyshev polynomials with weight and trigonometric functions are used for solving the equations with exact kernels. The results obtained by the authors' methods are compared with those obtained using the well-known MMANA code, which is based on solving the integral equation with the approximate kernel and the delta-function model. The dependences of the input resistance on the initial-field distribution are theoretically and numerically studied. The errors resulting from the exact-kernel replacement by the approximate one are determined.