

УДК 533.9.01

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВИХРИ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ С НЕПОДВИЖНЫМИ ИОНАМИ

А. В. Коржуманов^{1,2}, М. А. Лазарева^{1,2}*

¹ Институт прикладной физики РАН;

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

На основе совместного решения системы уравнений Максвелла и уравнений релятивистской гидродинамики для электронной жидкости исследованы стационарные двумерные электронные вихри в холодной плазме с неподвижными ионами. В частности, рассмотрен случай двухпараметрического семейства экспоненциально спадающих профилей концентрации электронов. Исследована зависимость основных свойств вихря от его радиуса и толщины. Найдена область параметров, в которой существенны релятивистские эффекты. В этой области получены зависимости плотности энергии в вихре от его параметров и показано, что в экспериментально реализуемых условиях отношение радиуса вихря к толщине плазменного скин-слоя приблизительно равно отношению полной энергии в плазме, приходящейся на один электрон, к энергии покоя электрона.

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие интенсивного лазерного излучения с веществом приводит к образованию плотной полностью ионизованной плазмы и зачастую сопровождается возникновением когерентных относительно долгоживущих структур, в частности электромагнитных солитонов и электронных вихрей. При интенсивности излучения выше 10^{18} Вт/см² энергия электронов сравнивается с их энергией покоя и становится необходимым учёт релятивистских эффектов [1]. Локализованное в когерентных структурах электромагнитное поле может быть измерено методами электронной или протонной радиографии, что делает их одним из важных источников информации в экспериментах по лазерно-плазменному ускорению частиц [2], инерциальному термоядерному синтезу [3] или лабораторной астрофизике [4].

Одним из характерных сценариев образования когерентных структур в лазерной плазме является развитие модуляционных и филаментационных неустойчивостей при распространении коротких — фемтосекундных и пикосекундных — лазерных импульсов в докритической плазме, приводящих к эффективному поглощению лазерной энергии и её трансформации в энергию ленгмюровских колебаний с дальнейшей турбулизацией плазмы. В ходе численного моделирования такой турбулентной плазмы было предсказано образование в ней электромагнитных солитонов и электронных вихрей [5–7], подтверждённое также данными экспериментов [8]. Образование когерентных структур было также предсказано для поздних стадий развития вейбелевской неустойчивости во взаимопроникающих потоках как электрон-ионной [9], так и электрон-позитронной плазмы [10].

В двумерной геометрии электронные вихри представляют собой локализованные структуры, в которых отличен от нуля полный поток магнитного поля. Это отличает их от электромагнитных солитонов, которые представляют собой локализованные в электронных кавернах электромагнитные волны. В трёхмерной геометрии, однако, эти вихри и солитоны оказываются переплетёнными друг с другом, образуя более сложные структуры [11]. Тем не менее, представляет интерес изучение их свойств в более простой геометрии, т. к. те же свойства могут наблюдаться и в более сложных случаях.

* artem.korzhimanov@ipfran.ru

Ранее исследовался вопрос о динамике релятивистских электронных вихрей на временных масштабах, сопоставимых с обратной ионной частотой, на которых наблюдается кулоновский взрыв вихря [12]. Также было проанализировано взаимодействие двух изолированных вихрей [13]. В работе [12] была также предложена модель двумерного стационарного релятивистского электронного вихря в холодной плазме с неподвижными ионами на основе совместной системы уравнений Максвелла и релятивистских гидродинамических уравнений. Её анализ, однако, был проведён только в нерелятивистском пределе, а релятивистский случай анализировался исключительно численно — путём решения кинетических уравнений методом частиц в ячейках. При этом начальные условия для распределения концентрации и импульсов электронов в вихре в численном моделировании задавались неконтролируемым образом при помощи специальной искусственной процедуры. В данной работе мы проводим для предложенной модели анализ полностью релятивистского случая. Полученные выводы могут быть использованы как при качественном анализе более сложных когерентных структур в релятивистской плазме, так и при задании самосогласованных начальных условий в численном моделировании.

1. МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ВИХРЯ

Рассмотрим полностью ионизованную безграничную плазму с постоянной фоновой концентрацией. Будем рассматривать структуры, существующие на временах меньше обратной ионной плазменной частоты $\omega_{pi} = (4\pi Z^2 e^2 N_i / M_i)^{1/2}$, где N_i , M_i и Z — концентрация, масса и кратность ионизации ионов соответственно, e — элементарный заряд. В этом случае движением ионов можно пренебречь. Будем также считать, что температура электронов пренебрежимо мала. Это может быть оправдано тем, что столкновительные механизмы при релятивистских энергиях электронов и временах взаимодействия с лазерным излучением порядка пикосекунды могут обеспечить нагрев электронов лишь до десятков килоэлектрон-вольт, в то время как энергия их упорядоченного движения может значительно превышать энергию покоя, равную 511 кэВ. Ограничимся также гидродинамическим описанием электронной жидкости, исключив тем самым из анализа многопоточные решения и пренебрегая эффектами, связанными с турбулентностью. В этом случае рассматриваемая система описывается самосогласованной системой уравнений Максвелла и релятивистских гидродинамических уравнений для электронной компоненты плазмы [14].

Ограничиваясь рассмотрением только стационарных вихрей в двумерной геометрии, будем предполагать также их осесимметричность. В этом случае структура релятивистского электронного вихря определяется решением следующей системы уравнений [12]:

$$h' = \frac{np}{\gamma}, \quad (1)$$

$$(rf)' = r(1 - n), \quad (2)$$

$$f + \frac{ph}{\gamma} = \frac{p^2}{\gamma r}, \quad (3)$$

где введены безразмерные величины $h = eB_z / (m_e \omega_{pe} c)$, $f = eE_r / (m_e \omega_{pe} c)$, $n = N_e / (ZN_i)$, $p = P_{e\vartheta} / (m_e c)$, $\gamma = (1 + p^2)^{1/2}$, $r = \omega_{pe} \rho / c$; $\omega_{pe} = (4\pi e^2 N_e / m_e)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, m_e , N_e и P_e — масса, концентрация и импульс электронов, B и E — индукция магнитного и напряжённость электрического полей соответственно, c — скорость света в вакууме, а также введена цилиндрическая система координат (ρ, ϑ, z) , в которой ось z совпадает с осью симметрии электронного вихря; штрих означает дифференцирование по координате r .

Уравнение (1) является следствием теоремы о циркуляции магнитного поля, уравнение (2) — теоремы Гаусса, а уравнение (3) выражает связь силы Лоренца, действующей на электроны, и их

центростремительного ускорения.

Система уравнений (1)–(3) состоит из трёх уравнений, но содержит четыре независимые неизвестные функции. Эта ситуация недоопределённости является типичной для вихрей. Помимо приведённой системы, форма вихря определяется так называемой функцией завихрённости, которая для релятивистской электронной жидкости, помещённой в магнитное поле, даётся формулой

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot} \left(\mathbf{P}_e - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (4)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля.

Для наших целей, однако, введение функции завихрённости в явном виде является излишним. Более того, её задание в произвольном виде, вообще говоря, не гарантирует неотрицательности концентрации электронов в силу пренебрежения кинетическим давлением электронов в приближении холодной плазмы. В этом случае целесообразнее в качестве произвольно задаваемой функции выбрать именно профиль концентрации.

Пусть функция $n(r)$ задана. Тогда можно в явном виде проинтегрировать уравнение (2):

$$f(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r[1 - n(r)] dr, \quad (5)$$

где постоянная интегрирования определена из условия того, что в силу симметрии $f(0) = 0$. Выразим из (3) магнитное поле h и подставим его в (1). После элементарных преобразований получаем следующее уравнение для определения функции $p(r)$:

$$p' = -p \frac{rn(r) - p^2\gamma - (1 + p^2)[r - f(r)]}{p^2\gamma + rf(r)}. \quad (6)$$

Решение этого уравнения при заданном профиле концентрации электронов задаёт структуру вихря: распределение импульса электронов, а также электрического и магнитного полей.

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ ВИХРЬ С ПОЛОСТЬЮ

В дальнейшем ограничимся рассмотрением конкретного семейства профилей концентрации электронных вихрей в следующем виде:

$$n(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ 1 + [R^2/(2br)] \exp[-(r - R)/b], & r \geq R. \end{cases} \quad (7)$$

Такой выбор, во-первых, обеспечивает электрическую нейтральность вихря в целом:

$$\int_0^{\infty} (1 - n)r dr = 0, \quad (8)$$

а во-вторых, отражает основные особенности релятивистских электронных вихрей, наблюдавшиеся в численном моделировании: наличие в их центре полости, полностью лишённой электронов, существование узкого пика концентрации на границе полости и быстрое спадание концентрации до фонового значения за пределами полости.

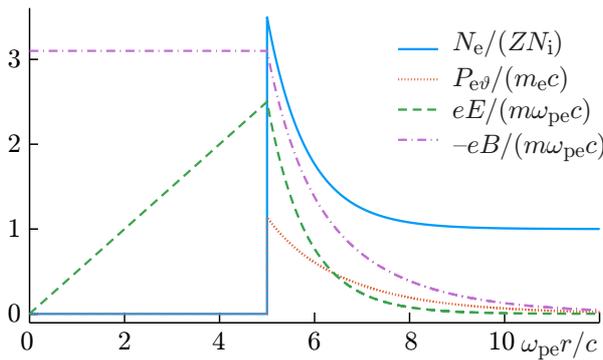


Рис. 1. Пример структуры релятивистского электронного вихря. Решение получено при $R = 5$, $b = 1$

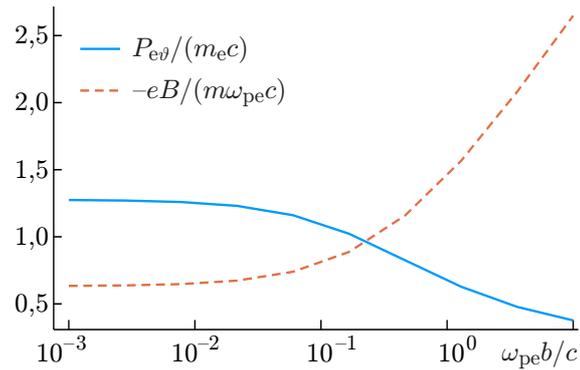


Рис. 2. Зависимость максимальных значений импульса электронов и магнитного поля в вихре от толщины его стенки b при фиксированном радиусе $R = 2$

Из выражения (5) получаем

$$f(r) = \begin{cases} r/2, & r < R; \\ [R^2/(2r)] \exp[-(r - R)/b], & r \geq R, \end{cases} \tag{9}$$

т. е. поле в полости ожидаемо линейно растёт с радиусом, а за её пределами в целом повторяет профиль концентрации.

В области $r < R$ уравнение (6) теряет свой смысл ввиду отсутствия в ней электронов, однако из (1) мы сразу получаем, что магнитное поле в полости постоянно и в силу граничных условий на границе полости равно его значению в точке $r = R$.

В области $r \geq R$ уравнение (6) будем решать численно, подбирая начальное условие $p(R)$ так, чтобы получить локализованное по импульсу решение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = 0. \tag{10}$$

3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

На рис. 1 приведён пример структуры электронного вихря, полученного в рамках предложенной модели. В рассматриваемом семействе профилей концентрации она определяется двумя параметрами: радиусом полости R и толщиной стенки вихря b . Исследуем зависимость основных параметров вихря от второй из этих величин.

Величина максимального электрического поля, как это видно из (9), не зависит от толщины стенки и определяется исключительно радиусом полости. На рис. 2 представлены величины магнитного поля внутри вихря и импульса электронов на его границе в зависимости от толщины стенки при фиксированном радиусе полости. Характерным является значительное снижение скорости движения электронов при $b \gtrsim R$, сопровождающееся существенным увеличением магнитного поля внутри вихря. Это приводит к тому, что практически вся энергия вихря в этом случае сконцентрирована в магнитном поле, как это видно из рис. 3. Такая ситуация, по всей видимости, может реализоваться только в случае возникновения когерентных структур в области с сильным внешним магнитным полем. Поскольку подобные условия нехарактерны для современных лазерно-плазменных экспериментов, мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением только случая тонких вихрей, для которых $b \ll R$.

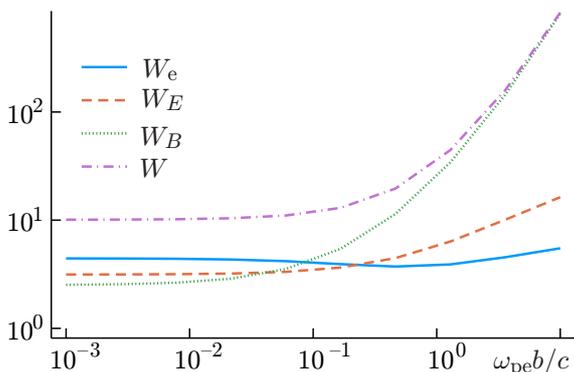


Рис. 3. Полные кинетическая энергия электронов W_e , энергия электрического поля W_E , энергия магнитного поля W_B и суммарная энергия W в единицах $m c^2 N_e (c / \omega_{pe})^2$ на единицу длины в вихре в зависимости от толщины его стенки b при фиксированном радиусе $R = 2$

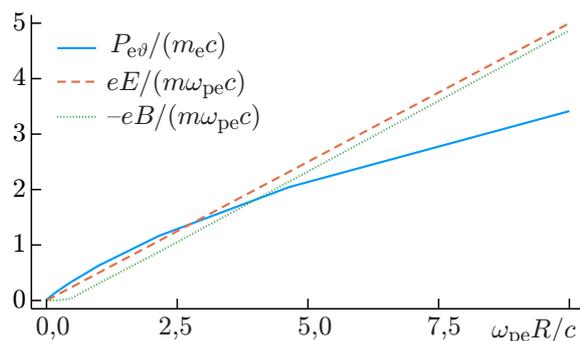


Рис. 4. Зависимость максимальных значений импульса электронов, электрического и магнитного полей в вихре от его радиуса R при фиксированной толщине стенки $b = 10^{-1}$

Исследуем, как в этом случае основные параметры вихря зависят от радиуса полости. Соответствующие графики для тонкого вихря приведены на рис. 4. Из них, в частности, видно, что релятивистский случай достигается при размере полости, сравнимой с толщиной плазменного скин-слоя ($R \gtrsim 1$). Это объясняется тем, что в нерелятивистском приближении магнитная составляющая силы Лоренца пренебрежимо мала, следовательно, $f \approx p^2 / r$. В то же время, на границе полости $f = R / 2$, откуда для импульса электронов на границе полости имеем $p(R) = R / \sqrt{2}$. Нерелятивистское приближение нарушается при $p(R) \sim 1$; отсюда получаем критический радиус полости $R_* \sim \sqrt{2}$.

Отметим также, что для нерелятивистских вихрей ($R \ll 1$) электрическое поле значительно превосходит магнитное, но в релятивистском режиме их значения выравниваются. Безразмерный импульс электронов также близок к ним по своему значению при малых радиусах вихря, однако при больших радиусах наблюдается заметное замедление роста импульса с радиусом.

На рис. 5 изображены зависимости вклада различных составляющих в полную энергию вихря от радиуса полости. Если в нерелятивистской области магнитная часть пренебрежимо мала, то в релятивистской вклад магнитного поля сравнивается с другими компонентами и в конце концов становится наибольшим.

Подобные зависимости могут быть использованы для оценки радиуса вихрей, которые могут образоваться в плазме с известной плотностью электромагнитной энергии. Поскольку условием наступления релятивизма является возможность существования вихрей с радиусом $R_* \sim \sqrt{2}$, а в полости радиуса R на единицу длины приходится энергия электрического поля, равная $\int_0^R [f^2(r) / 2] 2\pi r dr = \pi R^4 / 16$, для получения релятивистских вихрей требуется плотность электрической энергии порядка $(\pi R_*^4 / 16) / (\pi R_*^2) = R_*^2 / 16 = 1 / 8$, или в размерных величинах $m_e c^2 N_e / 8$. Таким образом, необходимо иметь в среднем на один электрон энергию порядка его

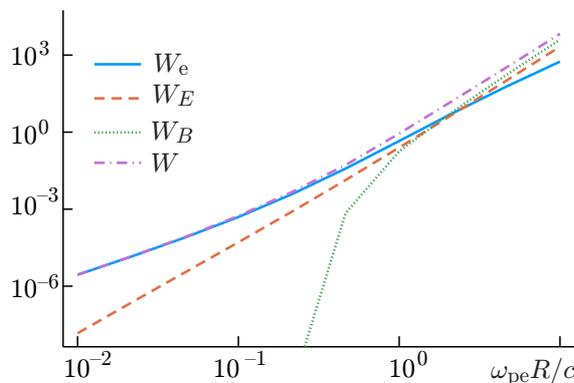


Рис. 5. То же, что на рис. 3, в зависимости от радиуса вихря R при фиксированной толщине стенки $b = 10^{-1}$

энергии покоя. Из рис. 5 видно, что энергия вихря в нашей модели растёт пропорционально кубу радиуса. Поскольку вихрь двумерен, из этого следует, что радиус вихря пропорционален плотности энергии в нём, т. е. в безразмерных величинах составляет величину порядка $w/(m_e c^2 N_e)$, где w — плотность энергии в плазме.

Слабая зависимость плотности энергии вихря от его радиуса означает, что вихрям энергетически разрешено как слияние с образованием вихря большего радиуса, так и распад с образованием более мелких вихрей. Из рис. 5, однако, видно, что это утверждение нарушается при достаточно малых радиусах вихря. В этом случае распад вихря должен сопровождаться ростом плотности энергии, что делает этот процесс подавленным. Отметим, что это позволяет в том числе объяснить результаты численного моделирования, представленные в работе [13]. Действительно, в ней было показано, что при взаимодействии двух вихрей большого радиуса диссипация их энергии в основном идёт через образование более мелких вихрей. Однако при радиусе исходных вихрей $R \lesssim 1$ их распад на более мелкие вихри не наблюдается, и вместо этого основным каналом диссипации становится аннигиляция магнитного поля в месте соприкосновения вихрей.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена модель стационарного плоского осесимметричного релятивистского электронного вихря в холодной плазме с неподвижными ионами. Показано, что основные параметры вихря — величина электрического и магнитного поля в нём и характерная величина импульса электронов — определяются радиусом вихря и толщиной его стенки. Релятивистский случай достигается только в относительно тонких вихрях с радиусом, большим толщины плазменного скин-слоя. Размеры вихря в этом случае определяются плотностью энергии в нём: отношение радиуса вихря к толщине плазменного скин-слоя составляет величину порядка отношения энергии плазмы, приходящейся на один электрон, к энергии покоя электрона. В нерелятивистском случае радиус вихря с уменьшением его энергии падает быстрее и плотность энергии в вихре растёт. Это может качественно объяснить, почему при взаимодействии двух вихрей большого радиуса диссипация их энергии идёт в основном через образование более мелких вихрей, а при взаимодействии вихрей малого радиуса — через аннигиляцию магнитного поля на месте их соприкосновения, как это было показано в численном моделировании в работе [13].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (субсидия 14.607.21.0196, уникальный идентификационный номер проекта RFMEFI60717X0196).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mourou G., Tajima T., Bulanov S. // *Rev. Modern Physics*. 2006. V. 78, No. 2, P. 309.
2. Macchi A., Borghesi M., Passoni M. // *Rev. Modern Physics*. 2013. V. 85, No. 2. P. 58.
3. Betti R., Hurricane O. A. // *Nature Physics*. 2016. V. 12, No. 5. P. 435.
4. Bulanov S. V., Esirkepov T. Z., Kando M., et al. // *Физика плазмы*. Т. 41, № 1. С. 3.
5. Bulanov S. V., Lontano M., Esirkepov T. Z., et al. // *Physical Rev. Lett.* 1996. V. 76, No. 19. P. 3562.
6. Bulanov S. V., Esirkepov T. Zh., Naumova N. M., et al. // *Physical Rev. Lett.* 1999. V. 82, No. 17. P. 3440.
7. Naumova N. M., Koga J., Nakajima K., et al. // *Physics of Plasmas*. 2001. V. 8, No. 9. P. 4149.

8. Romagnani L., Bigongiari A., Kar S., et al. // *Physical Rev. Lett.* 2010. V. 105, No. 17. Art. no. 175002.
9. Naseri N., Bochkarev S. G., Ruan P., et al. // *Physics of Plasmas*. 2018. V. 25, No. 1. Art. no. 012118.
10. Norreys P. A., Beg F. N., Sentoku Y., et al. // *Physics of Plasmas*. 2009. V. 16, No. 4. Art. no. 041002.
11. Esirkeпов Т. Zh., Nishihara K., Bulanov S. V., Pegoraro F. // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. Art. no. 275002.
12. Lezhnin K. V., Kamenets F. F., Esirkeпов Т. Z., et al. // *Physics of Plasmas*. 2016. V. 23, No. 9. Art. no. 093116.
13. Lezhnin K. V., Kamenets F. F., Esirkeпов Т. Z., Bulanov S. V. // *J. Plasma Physics*. 2018. V. 84, No. 6. Art. no. 905840610.
14. Ахиезер А. И., Половин Р. В. // *Журнал эксперим. и теорет. физики*. 1956. Т. 30, № 5. С. 915.

Поступила в редакцию 10 октября 2019 г.; принята в печать 22 ноября 2019 г.

STATIONARY RELATIVISTIC ELECTRON VORTICES IN COLD PLASMAS WITH IMMOBILE IONS

A. V. Korzhimanov and M. A. Lazareva

Based on a joint solution of the system of Maxwell equations and relativistic hydrodynamics equations for an electron liquid we study stationary two-dimensional electron vortices in a cold plasma with immobile ions. In particular, we consider the case of a two-parameter family of exponentially decaying electron density profiles. The main properties of a vortex as functions of its radius and thickness are explored. A parameter range in which relativistic effects are significant has been identified. In that range, dependences of the energy density in a vortex on its parameters are found, and it is shown that in experimentally attainable conditions the ratio of the vortex radius to the thickness of the plasma skin layer is approximately equal to the ratio of the total energy in a plasma per electron to the rest energy of the electron.