

УДК 537.862+517.925.42

КОРРЕЛЯЦИИ СОСТОЯНИЙ НЕСИНХРОНИЗИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В АНСАМБЛЕ КУРАМОТО С ШУМОМ В СРЕДНЕМ ПОЛЕ

А. С. Пиковский^{1,2}, *А. В. Долматова*³, *Д. С. Голдобин*^{3,4*}

¹ Университет Потсдама, Потсдам, Германия

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород;

³ Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь;

⁴ Пермский госуниверситет, г. Пермь, Россия

В работе рассмотрена динамика осцилляторов в ансамбле Курамото, не вошедших в общий синхронизованный кластер, при флуктуациях среднего поля. Флуктуации могут быть связаны как с конечностью размера ансамбля, так и добавляться к среднему полю в виде общего шума из-за конструктивных особенностей системы. Показано, что состояния таких осцилляторов с близкими собственными частотами оказываются скоррелированными между собой вследствие того, что флуктуации среднего поля действуют как общий шум. Численно и аналитически найден индекс синхронизации двух осцилляторов в зависимости от разности их частот и интенсивности шума. Результаты являются строгими для больших ансамблей с дополнительным шумом, накладываемым на среднее поле, и верными качественно для систем, где флуктуации среднего поля связаны с конечностью размера ансамбля. В последнем случае эффект оказывается не зависящим от числа осцилляторов в ансамбле.

ВВЕДЕНИЕ

Множество физических, биологических и даже социальных систем могут быть описаны как сложные ансамбли связанных между собой осцилляторов. Немаловажную роль в поведении таких систем играет явление синхронизации [1]: оно наблюдается в электронных и радиотехнических системах, в коллективном поведении людей и животных, в нейронных структурах мозга и т. д. Это явление достаточно хорошо изучено для систем с разными типами связей при наличии или отсутствии шума.

В ансамблях неидентичных осцилляторов типично явление частичной синхронизации, при котором часть элементов оказывается синхронизированной и формирует синхронный кластер, тогда как остальные элементы ансамбля продолжают вести себя асинхронно с этим кластером. При рассмотрении коллективных явлений первоочередное внимание уделяется динамике синхронизированных элементов, а поведение несинхронизованных элементов анализируется главным образом в контексте их возможного перехода в синхронный кластер и остаётся сравнительно малоизученным. Некоторым исключением в плане внимания к динамике несинхронизованных элементов являются ансамбли конечного размера [2–4]. В таких ансамблях несинхронизованные элементы заметно влияют на коллективную динамику системы и, в частности, на поведение синхронного кластера.

Предметом данной работы является коллективная динамика несинхронизованных элементов безотносительно вопроса об их переходе в синхронный кластер. А именно, для пар несинхронизованных осцилляторов с малой разницей собственных частот флуктуации среднего поля в ансамбле должны действовать как общий шум и индуцировать некоторый уровень скоррелированности состояний [5–8]. Флуктуации могут быть связаны как с внешним шумом, действующим

* Denis.Goldobin@gmail.com

на среднее поле, так и с конечностью размера ансамбля. Рассмотрение проводится в рамках математической модели, адекватной ансамблю Курамото [9, 10] и некоторым другим системам. В работе вычисляется индекс синхронизации $|\langle \exp[i(\varphi_1 - \varphi_2)] \rangle|$ (мера скоррелированности состояний φ_1 и φ_2) для несинхронизированных элементов как функция расстройки их собственных частот и интенсивности шума в среднем поле.

Структура статьи следующая. В разделе 1 описывается исследуемая математическая модель и выводятся усреднённые уравнения эволюции для распределения разности фаз. В разделе 2 аналитически вычисляется индекс синхронизации. В разделе 3 основная исследуемая математическая модель выводится для ансамблей автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля с общим воздействием силового типа и цепочек последовательно соединённых джозефсоновских элементов. В разделе 4 обсуждается вопрос об адекватности исследуемой математической модели ансамблю Курамото. В разделе 5 представлены выводы.

1. ДИНАМИКА ОСЦИЛЛЯТОРОВ В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ С ШУМОМ

Рассмотрим динамику N фазовых осцилляторов, на которые действует постоянная общая сила с небольшими флуктуациями:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + [h + \sigma_0 \xi(t)] \sin \varphi_j, \quad (1)$$

где $j = 1, 2, \dots, N$, точка обозначает производную по времени, h и $\sigma_0 \xi(t)$ — постоянная и флуктуационная составляющие общей силы, σ_0 — амплитуда флуктуаций, $\xi(t)$ будет полагаться нормированным δ -коррелированным гауссовским шумом: $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\delta(t - t')$, угловые скобки обозначают усреднение по реализациям. В разделе 3 обосновывается адекватность уравнений (1) широкому кругу физических систем. Для определённости, в разделах 1 и 2 будем говорить о динамической системе (1) в контексте такой интерпретации, при которой $h + \sigma_0 \xi(t)$ является общей силой. Однако упомянем, что данное уравнение также описывает динамику ансамбля Курамото [9] в термодинамическом пределе большого числа осцилляторов, при этом собственные частоты осцилляторов неидентичны, а к общей силе (среднему полю), действующей на осцилляторы, добавляется шум. В рамках такой интерпретации φ_j является разностью фазы j -го осциллятора и фазы среднего поля, а ω_j — отклонением собственной частоты осциллятора от частоты среднего поля (которая близка к средней собственной частоте осцилляторов в ансамбле, но не равна ей). К обоснованию такой интерпретации уравнения (1) целесообразно вернуться ниже, после изучения его свойств, поскольку понимание последних позволит также обсудить его адекватность ансамблю Курамото с конечным числом элементов, где при частичной синхронизации среднее поле оказывается флуктуирующим.

Будем интересоваться осцилляторами, фаза которых не увлечена силой h и не была бы увлечена ей в отсутствие шума, что в рамках уравнения (1) означает $|\omega_j| > h$. При $h \neq 0$ мгновенные скорости роста фаз φ_j начинают зависеть от времени даже в отсутствие шума, а частоты колебаний изменяются. Введём замену переменных

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\tilde{\varphi}_j - \pi/2}{2} \right) = \sqrt{\frac{\omega_j - h}{\omega_j + h}} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_j - \pi/2}{2} \right).$$

Тогда уравнение (1) в переменных новых фаз $\tilde{\varphi}_j$ приобретает вид

$$\dot{\tilde{\varphi}}_j = \sqrt{\omega_j^2 - h^2} + \sigma_0 \xi(t) \frac{\omega_j \sin \tilde{\varphi}_j - h}{\sqrt{\omega_j^2 - h^2}}. \quad (2)$$

Можно видеть, что при $\sigma_0 = 0$ новые фазы растут с постоянными скоростями

$$\tilde{\omega}_j = \sqrt{\omega_j^2 - h^2},$$

т. е. являются естественными фазовыми переменными при $h \neq 0$. Поскольку при приращении новой фазы $\tilde{\varphi}_j$ на 2π исходная фаза φ_j также вырастает на 2π , скорости $\tilde{\omega}_j$ являются частотами колебаний осцилляторов в отсутствие шума.

Рассмотрим динамику двух осцилляторов с близкими частотами. Обозначим среднюю частоту этих осцилляторов как $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, разность частот — как Δ . Для дальнейшего анализа удобно ввести новую эффективную амплитуду шума $\sigma = 2\omega(\omega^2 - h^2)^{-1/2}\sigma_0$. Тогда, при малой разности частот $\Delta = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$, из уравнения (2) можно получить:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\varphi}}_1 &= \tilde{\omega} + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sigma\xi(t) \left(\sin \tilde{\varphi}_1 - \frac{h}{\omega} \right), \\ \dot{\tilde{\varphi}}_2 &= \tilde{\omega} - \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sigma\xi(t) \left(\sin \tilde{\varphi}_2 - \frac{h}{\omega} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Определим новые переменные $\theta = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$ и $\psi = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$. В этих переменных уравнения (3) приобретают вид

$$\dot{\theta} = \Delta + \sigma \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \xi(t), \quad \dot{\psi} = 2\tilde{\omega} + \sigma \left[\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{h}{\omega} \right] \xi(t).\quad (4)$$

Плотность вероятности состояний $W(\theta, \psi, t)$ для системы (4) определяется следующим уравнением Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\theta, \psi, t) + \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta W + \frac{\partial}{\partial \psi} 2\tilde{\omega} W = \sigma^2 \hat{\mathcal{L}}^2(W),\quad (5)$$

где $\hat{\mathcal{L}}(X)$ — следующий дифференциальный оператор:

$$\hat{\mathcal{L}}(X) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) X \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \left[\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{h}{\omega} \right] X \right\}.$$

С помощью метода многих масштабов [11] может быть строго выполнено усреднение уравнения (5) по быстро меняющейся фазе ψ (подобно тому, как это осуществлено в приложении А работы [12]). Для усреднённой плотности вероятности $w(\theta, t) = \int_0^{2\pi} W(\theta, \psi, t) d\psi$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\theta, t) + \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w(\theta, t) = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [(1 - \cos \theta)w(\theta, t)].\quad (6)$$

Относительная погрешность полученного уравнения для усреднённой плотности вероятности имеет порядок малых параметров $\Delta/\tilde{\omega}$ и $\sigma^2/\tilde{\omega}$.

В случае статистически стационарного состояния системы (плотность вероятности $w(\theta)$ не зависит от времени) уравнение (6) может быть проинтегрировано по θ :

$$\Delta w(t) - \frac{\sigma^2}{4} \frac{d}{d\theta} [(1 - \cos \theta)w(\theta)] = J = \frac{\nu}{2\pi},\quad (7)$$

где J — поток вероятности, ν — разность наблюдаемых средних частот.

Для дальнейшего анализа удобно ввести новые нормированные переменные

$$a = \frac{4\Delta}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - h^2}}{\omega \sigma_0^2} |\omega_1 - \omega_2|, \quad j = \frac{4J}{\sigma^2}.$$

В этих переменных уравнение (7) имеет вид

$$aw(\theta) - \frac{d}{d\theta} [(1 - \cos \theta)w(\theta)] = j. \quad (8)$$

С учётом условия нормировки $\int_0^{2\pi} w(\theta)d\theta = 1$, интегрирование (8) по θ позволяет связать нормированный поток вероятности с единственным существенным параметром задачи a :

$$j = a/(2\pi).$$

Можно заметить, что последнее соотношение соответствует равенству $\nu = \Delta$, т. е. шум не влияет на разность наблюдаемых частот. Подставляя найденное значение в выражение (8), получаем итоговое уравнение для плотности вероятности в стационарном случае:

$$aw(\theta) - \frac{d}{d\theta} [(1 - \cos \theta)w(\theta)] = \frac{a}{2\pi}. \quad (9)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИНДЕКСА СИНХРОНИЗАЦИИ

Для дальнейшего анализа стационарной системы (9) выполним замену переменных

$$x = \operatorname{ctg}(\theta/2). \quad (10)$$

Обозначим плотность вероятности состояний в новых переменных $p(x)$. Поскольку должно выполняться равенство $p(x)|dx| = w(\theta)|d\theta|$, плотности вероятности в старых и новых переменных соотносятся следующим образом:

$$p(x) = w(\theta) \frac{2}{1+x^2}. \quad (11)$$

Для определения граничных условий для функции $p(x)$ рассмотрим предельный случай, при котором $w(\theta)$ сингулярна, т. е. представляет собой дельта-функцию Дирака. Если разность фаз $\theta = \pi$, тогда соответствующее $x = 0$ и сингулярность $w(\theta) = \delta(\theta + \pi)$ соответствует сингулярности $p(x) \propto \delta(x)$. Если же осцилляторы стремятся к состоянию синхронности, то разность фаз $\theta \rightarrow 0$, а $|x| \rightarrow \infty$. Заменяем дельта-функцию её конечным представлением

$$w(\theta) \propto \frac{1}{\epsilon} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{\epsilon} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где ϵ — произвольное малое число. С учётом малости θ ($\theta \rightarrow \sin \theta$), последнее выражение даёт распределение переменной x вида

$$p(x) \propto \frac{2}{\epsilon(1+x^2)} \exp \left\{ - \left[\frac{2x}{(1+x^2)\epsilon} \right]^2 \right\}. \quad (13)$$

При больших $|x| \rightarrow \infty$ выражение (13) можно упростить:

$$p(x) \propto \frac{1}{x^2\epsilon} \exp \left[- \frac{4}{(x\epsilon)^2} \right] \propto \begin{cases} 0, & x < 2/\epsilon; \\ (x^2\epsilon)^{-1}, & x > 2/\epsilon. \end{cases} \quad (14)$$

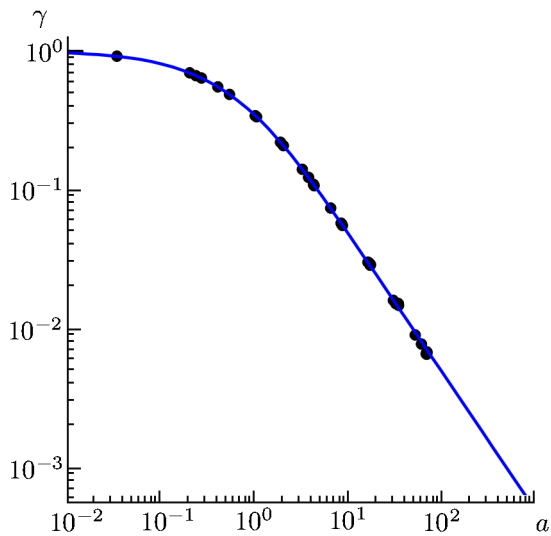


Рис. 1. Индекс синхронизации двух осцилляторов в ансамбле, на который воздействует постоянное общее поле с шумом. Аналитическое решение (17) представлено линией, точки соответствуют результатам прямого численного интегрирования уравнения (1)

Таким образом видно, что даже для сингулярного распределения плотности вероятности $p(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Вернёмся к уравнению Фоккера–Планка для плотности вероятности. С учётом (10) и (11), уравнение (9) для $p(x)$ принимает вид

$$\frac{dp}{dx} + ap = \frac{a}{\pi(1+x^2)}. \tag{15}$$

Решение этого уравнения может быть представлено формулой

$$p(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+y^2} \exp[a(y-x)] dy. \tag{16}$$

Для вычисления индекса синхронизации

$$\gamma = |\langle \exp(i\theta) \rangle| = |\langle \cos \theta \rangle + i \langle \sin \theta \rangle| \tag{17}$$

необходимо найти средние значения $S = \langle \sin \theta \rangle$ и $C = \langle \cos \theta \rangle$. С учётом выражения для плотности вероятности (16), находим

$$S = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^x \frac{\exp[a(y-x)]}{1+y^2} dy = 2a[-\text{ci}(2a) \cos(2a) - \text{si}(2a) \sin(2a)], \tag{18}$$

$$C = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^x \frac{\exp[a(y-x)]}{1+y^2} dy = 1 - 2a[\text{ci}(2a) \sin(2a) - \text{si}(2a) \cos(2a)], \tag{19}$$

где

$$\text{ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \text{Ci}(x), \quad \text{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(x) - \pi/2.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (17), можно вычислить индекс синхронизации двух осцилляторов. Полученная зависимость индекса синхронизации от параметра a представлена на рис. 1. Можно видеть, что аналитическая теория хорошо согласуется с прямыми численными расчётами для уравнения (1), выполненными при $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 2$, $h = 1$, $\sigma_0 = 0,05$; крайней правой точке на графике соответствует $\omega_1 - \omega_2 \approx 0,1$, т. е. разность частот остаётся достаточно малой.

Говоря о корреляции состояний, важно иметь в виду, что средние разности наблюдаемых частот ν в рассматриваемой системе не зависят от шума. Сочетание высокой скоррелированности состояний с отсутствием «увлечения» средних частот возможно только при существенно перемежаемом характере синхронизации: периоды синхронного поведения чередуются с периодами «проскальзывания» фаз так, что средняя набегающая разность фаз за фиксированный интервал времени наблюдения не зависит от интенсивности шума.

3. ОСЦИЛЛЯТОРЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ И ДЖОЗЕФСОНОВСКИЕ КОНТАКТЫ

Покажем, каким образом фазовые уравнения (1) соответствуют некоторым конкретным системам осцилляторов.

В качестве первого примера рассмотрим ансамбль осцилляторов Ван дер Поля в режиме автоколебаний при идентичном воздействии силового типа $f(t)$ на каждый осциллятор:

$$\dot{x}_j = y_j, \quad \dot{y}_j = 2\varepsilon(1 - x_j^2)y_j - \Omega_j^2 x_j + f(t), \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$, Ω_j — частота малых колебаний j -го осциллятора. Поскольку при $\varepsilon \ll 1$ и $f = 0$ в осцилляторе Ван дер Поля устанавливаются гармонические колебания с амплитудой 2, введём следующие переменные амплитуды и фазы: $x_j = 2A_j \sin \phi_j$, $y_j = 2\Omega_j A_j \cos \phi_j$. Прямой подстановкой в уравнения (20) можно получить, что

$$\dot{A}_j = \varepsilon A_j \{1 + \cos 2\phi_j - A_j^2 [1 - \cos(4\phi_j)]\} + \frac{f}{2\Omega_j} \cos \phi_j, \quad (21)$$

$$\dot{\phi}_j = \Omega_j - \varepsilon [(1 - 2A_j^2) \sin 2\phi_j + A_j^2 \sin 4\phi_j] - \frac{f}{2A_j \Omega_j} \sin \phi_j. \quad (22)$$

При малых ε и f метод усреднения Крылова–Боголюбова [11] для системы (21)–(22) в ведущем порядке даёт

$$\dot{A}_j = \varepsilon(A_j - A_j^3),$$

т. е. $A_j \rightarrow 1$, и при $A_j = 1$, с учётом поправок первого порядка малости,

$$\dot{\phi}_j = \Omega_j + \varepsilon [\sin(2\phi_j) - \sin(4\phi_j)] - \frac{f}{2\Omega_j} \sin \phi_j. \quad (23)$$

Преобразование фазовых переменных $\varphi_j = \phi_j + [\varepsilon/(2\Omega_j)] \cos(2\phi_j) - [\varepsilon/(4\Omega_j)] \cos(4\phi_j) + O(\varepsilon^2/\Omega_j^2)$ позволяет привести уравнение (23) к виду

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_j - \frac{f}{2\Omega_j} \left[\sin \varphi_j + O\left(\frac{\varepsilon}{\Omega_j}\right) \right]. \quad (24)$$

При $\varepsilon \ll \Omega_j$, $|f| \ll \Omega_j$ и малой относительной расстройке частот осцилляторов Ω_j уравнение (24) эквивалентно уравнению (1) с $f/(2\Omega_0) = -[h + \sigma_0 \xi(t)]$, где Ω_0 — среднее значение Ω_j . Погрешность соответствия между этими уравнениями имеет второй порядок малости. Таким образом, h и $\sigma_0 \xi(t)$ задают постоянную и переменную составляющие общей силы соответственно.

В качестве второго примера рассмотрим последовательное соединение джозефсоновских контактов. Напряжение на j -ом контакте u_j связано со скачком фазы на этом контакте φ_j : $u_j = \hbar \dot{\varphi}_j / (2e)$, где \hbar — постоянная Планка, e — элементарный заряд. При существенном омическом токе утечки через контакт динамика скачка фазы определяется уравнением [13]

$$\frac{\hbar}{2er_j} \dot{\varphi}_j + I_{0j} \sin \varphi_j = I,$$

где r_j — омическое сопротивление контакта, $I_{0j} \sin \varphi_j$ — джозефсоновский ток, I_{0j} — материальный параметр контакта, I — ток через цепь. Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\dot{\varphi}_j = \frac{2er_j I}{\hbar} - \frac{2er_j}{\hbar} I_{0j} \sin \varphi_j. \quad (25)$$

Для метаматериалов на основе джозефсоновских контактов [14–16] актуальны ситуации, когда I_{0j} меняется одинаковым образом для всех элементов вследствие механической нагрузки или воздействия внешних полей иной природы. Если параметры элементов отличаются слабо (что естественно для метаматериала), а джозефсоновский ток мал по сравнению с омическим, можно пренебречь неидентичностью коэффициента при слагаемом $\sin \varphi_j$ и получить для всех элементов уравнение типа (1).

4. АНСАМБЛЬ КУРАМОТО С ФЛУКТУАЦИЯМИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим ансамбль из N осцилляторов, описываемый моделью Курамото:

$$\dot{\phi}_j = \Omega_j + \frac{\mu}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j). \quad (26)$$

Здесь ϕ_j и Ω_j — фаза и собственная частота j -го осциллятора соответственно, μ — коэффициент глобальной связи в ансамбле.

Все осцилляторы взаимодействуют друг с другом с одинаковой силой, поэтому коллективную динамику ансамбля можно описать с помощью среднего поля с амплитудой R и фазой Φ :

$$Z = R \exp(i\Phi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\phi_j). \quad (27)$$

В этом случае уравнение (26) можно переписать в виде

$$\dot{\phi}_j = \Omega_j + \mu R \sin(\Phi - \phi_j). \quad (28)$$

Введём отклонение фазы $\varphi_j = \phi_j - \Phi$ и получим уравнение его динамики. Будем полагать, что значение коэффициента связи μ превышает порог возбуждения среднего поля Z (или, иными словами, синхронной моды) [9, 10] достаточно сильно, так что существенная часть элементов в ансамбле оказывается синхронизованной, но осцилляторы с большим отклонением собственной частоты от средней остаются несинхронизованными. Продифференцируем среднее поле (27) по времени с учётом выражения (28):

$$\dot{R} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j \sin \varphi_j + \frac{\mu R}{N} \sum_{j=1}^N \sin^2 \varphi_j, \quad (29)$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_0 + \frac{1}{R} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j \cos \varphi_j - \frac{\mu}{2N} \sum_{j=1}^N \sin(2\varphi_j). \quad (30)$$

Здесь введена расстройка собственных частот $\omega_j = \Omega_j - \Omega_0$. Рассмотрим подробнее динамику фазы среднего поля. При большом, но конечном числе элементов ансамбля флуктуации амплитуды и скорости вращения среднего поля Z оказываются малы, порядка $\sqrt{N_a}/N = \sqrt{N_a/N}/\sqrt{N}$, где N_a — количество несинхронизованных осцилляторов. Когда осциллятор входит в синхронный кластер, его влияние на вращение фазы среднего поля становится практически стационарным, поэтому существенный вклад во флуктуирующую часть второго и третьего слагаемых правой части уравнения (30) будут вносить только несинхронизованные осцилляторы. Можно заметить, что если большая часть элементов синхронизовалась, то общее поле будет вращаться с практически постоянной амплитудой $\langle R \rangle$ [4, 9] и циклической частотой, флуктуирующей вблизи среднего значения Ω_0 . В таком случае можно представить фазу общего поля как сумму постоянной

и малой флуктуационной компонент. Оценим величину флуктуирующей компоненты второго и третьего слагаемого в уравнении (30):

$$\frac{1}{R} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j \cos \varphi_j \sim \frac{\delta\omega \sqrt{N_a}}{N}, \quad \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\varphi_j) \sim \frac{\mu \sqrt{N_a}}{N},$$

где $\delta\omega$ — полуширина распределения собственных частот ω_j . Таким образом, можно записать

$$\frac{1}{R} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j \cos \varphi_j \equiv G_{\Phi,\omega} \frac{\gamma \sqrt{N_a}}{N} \xi_{\Phi,\omega}(t), \quad \frac{\mu}{2N} \sum_{j=1}^N \sin 2\varphi_j \equiv G_{\Phi,\varphi} \frac{\mu \sqrt{N_a}}{2N} \xi_{\Phi,\varphi}(t),$$

где $G_{\Phi,\omega}$ и $G_{\Phi,\varphi}$ — множители порядка 1, остающиеся в представленном анализе неопределёнными, и введены псевдостохастические процессы $\xi_{\Phi,\omega}(t)$ и $\xi_{\Phi,\varphi}(t)$, нормированные на 1: $\langle \xi_{\Phi,\omega}^2 \rangle = \langle \xi_{\Phi,\varphi}^2 \rangle = 1$. Данные процессы не могут быть подлинно стохастическими, поскольку возникают в результате динамики детерминированной системы. Вместе с тем, они связаны с наложением и нелинейным взаимодействием N_a колебательных процессов, которые в отсутствие взаимодействия имели бы несоизмеримые частоты $\tilde{\omega}_j$, причём набор $\tilde{\omega}_j$ является нерегулярным. Исходя из (28) и (30), можно записать уравнение для отклонения фазы φ_j :

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \frac{\sqrt{N_a}}{N} \left[G_{\Phi,\omega} \gamma \xi_{\Phi,\omega}(t) + G_{\Phi,\varphi} \frac{\mu}{2} \xi_{\Phi,\varphi}(t) \right] + \mu R \sin \varphi_j. \quad (31)$$

В (31) остаются неописанными флуктуации R относительно $\langle R \rangle$. При наложении N_a колебательных процессов со случайным набором несоизмеримых частот следует ожидать, что $R - \langle R \rangle \sim \sqrt{N_a}/N$. Введём величину $\xi_R(t)$:

$$R - \langle R \rangle \equiv G_R \frac{\sqrt{N_a}}{N} \xi_R(t),$$

где G_R — множитель порядка 1 и $\langle \xi_R^2 \rangle = 1$. Тогда уравнение (31) примет вид

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \frac{\sqrt{N_a}}{N} \left[G_{\Phi,\omega} \gamma \xi_{\Phi,\omega}(t) + G_{\Phi,\varphi} \frac{\mu}{2} \xi_{\Phi,\varphi}(t) \right] + \mu \left[\langle R \rangle + G_R \frac{\sqrt{N_a}}{N} \xi_R(t) \right] \sin \varphi_j. \quad (32)$$

Статистические свойства процессов $\xi_{\Phi,\omega}(t)$, $\xi_{\Phi,\varphi}(t)$ и $\xi_R(t)$, кроме нормировки, остаются здесь неконкретизированными.

Поскольку аддитивный шум в системе рассматриваемого типа способствует синхронизации менее эффективно, чем мультипликативный [12], шумовыми слагаемыми $\xi_{\Phi,\omega}$ и $\xi_{\Phi,\varphi}$ будем пренебрегать. Более того, в уравнениях (3) можно выделить аддитивную компоненту шума (слагаемое пропорциональное h/ω), которая после усреднения по фазе ψ не даёт в ведущем порядке вклада в уравнение (7) для эволюции распределения разности фаз $w(\theta, t)$. Поскольку результаты аналитической теории, строго соответствующей уравнению (7), хорошо согласуются с прямыми численными расчётами для уравнения (1) (см. рис. 1), приближение, в рамках которого вклад аддитивного шума опускается, можно считать справедливым. В итоге, для описания отклонения фазы осцилляторов от фазы среднего поля имеем уравнение вида (1):

$$\dot{\varphi}_j \approx \omega_j + \mu \left[\langle R \rangle + G_R \frac{\sqrt{N_a/N}}{\sqrt{N}} \xi_R(t) \right] \sin \varphi_j. \quad (33)$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ шумовое слагаемое, связанное с динамикой несинхронизированных осцилляторов, пропадает, однако существуют физические системы, где среднее поле может быть возмущено общим шумом по конструктивным причинам. Для таких систем представленный анализ уравнения (1) можно считать строгим, и будут наблюдаться описанные корреляции состояний несинхронизированных осцилляторов с близкими собственными частотами. Механизмом возникновения этих корреляций будет синхронизация общим шумом [5–8, 17].

Как было отмечено выше, для ансамбля Курамото конечного размера флуктуации $\xi_R(t)$ будут не вполне стохастическими и, более того, зависимыми от сигналов $\varphi_j(t)$. Для такой системы без дополнительного анализа можно говорить только о качественной картине возникновения корреляций. Оценим, как величина корреляций зависит от количества осцилляторов. Для автоколебательных систем со слабым общим шумом $\xi_R(t)$ установлено, что синхронизирующее влияние шума, как и его влияние на когерентность колебаний отдельной системы, количественно определяется интегралом от автокорреляционной функции шума $\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi_R(t) \xi_R(t + \tau) \rangle d\tau$ [18, 19] и при фиксированном значении этого интеграла не зависит от прочих статистических свойств шума. Следовательно, сопоставляя уравнения (1) и (33), а также нормировку шумов $\xi(t)$ и $\xi_R(t)$, можно получить эффективное значение σ_0 для уравнения (33): $2\sigma_0^2 = \mu^2 G_R^2 (N_a/N^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi_R(t) \xi_R(t + \tau) \rangle d\tau$. Характерное время затухания автокорреляций флуктуаций параметра порядка R может быть оценено по времени рассогласования фаз, растущих с различными скоростями $\tilde{\omega}_j$: $\tau_{\text{согг},R} \sim \delta\omega^{-1}$, где $\delta\omega$ — полуширина распределения собственных частот. Отсюда $\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi_R(t) \xi_R(t + \tau) \rangle d\tau \approx 2 \langle \xi_R^2 \rangle \tau_{\text{согг},R} \approx 2/\gamma$. Для характерной разности собственных частот имеем $|\omega_1 - \omega_2| \approx \approx 2\delta\omega/(N/2)$. Соответственно, для параметра a , определяющего величину корреляций получаем формулу

$$a \approx \frac{4(\delta\omega)^2}{\mu^2 G_R^2 (N_a/N)} \frac{\sqrt{\omega^2 - \mu^2 \langle R \rangle^2}}{\omega}.$$

Характерная величина a оказывается не зависящей от числа осцилляторов в ансамбле и имеет порядок 1. Таким образом, для большинства осцилляторов в ансамбле эффект возникновения корреляций оказывается не зависящим от размера ансамбля и сравнительно слабым. Вместе с тем, распределение разностей частот является случайным, и могут находиться пары осцилляторов с малой разностью частот, для которых величина a будет мала. Для заданного a_* доля осцилляторов с $a < a_*$ также не зависит от размера ансамбля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена динамика осцилляторов в ансамбле Курамото с шумом в среднем поле. Основное внимание уделено осцилляторам, не увлечённым основным синхронным кластером. Показано, что шум среднего поля индуцирует корреляции состояний осцилляторов с близкими частотами. Механизм возникновения корреляций оказывается связан с явлением синхронизации общим шумом.

Получено аналитическое выражение для индекса синхронизации двух осцилляторов $\gamma = |\langle \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \rangle|$ в зависимости от разности их собственных частот. Оно хорошо согласуется с численными расчётами (см. рис. 1). Рассмотрен вопрос об адекватности исследованной математической модели ансамблем Курамото конечного размера, где непериодические колебания несинхронизированных осцилляторов создают флуктуации среднего поля. Однако зависимость характерных разностей ближайших частот и интенсивности эффективного шума от размера ансамбля такова, что величина корреляций оказывается не зависящей от размера ансамбля.

Результаты, представленные в разделах 1 и 2, получены А. Пиковским при поддержке Российского научного фонда (проект 14–12–0081). Результаты, представленные в разделах 3 и 4, получены А. В. Долматовой и Д. С. Голдобиним при поддержке Российского научного фонда (проект 14–21–00090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиковский А., Розенблум М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Daido H. // *J. Phys. A*. 1987. V. 20, No. 10. P. 1 629.
3. Hong H., Chate H., Tang L. H., Park H. // *Phys. Rev. E*. 2015. V. 92, No. 3. Art. no. 022122.
4. Peter F., Pikovsky A. // *Phys. Rev. E*. 2018. V. 97. Art. no. 032310.
5. Пиковский А. С. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1984. Т. 27, № 5. С. 576.
6. Голдобин Д. С., Пиковский А. С. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. 47, № 10–11. P. 1 013.
7. Teramae J.-N., Tanaka D. // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93, No. 20. Art. no. 204103.
8. Goldobin D. S., Pikovsky A. S. // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71, No. 4. Art. no. 045201(R).
9. Kuramoto Y. *Lecture Notes in Phys.* 39. / Ed. H. Araki. New York: Springer, 1975. P. 420.
10. Crawford J. D. // *J. Stat. Phys.* 1994. V. 74, No. 5–6. P. 1 047.
11. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
12. Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A. // *Phys. Rev. E*. 2017. V. 96, No. 6. Art. no. 062204.
13. Жарков Г. Ф. Альтудов Ю. К. // *ЖЭТФ*. 1978. Т. 74, № 5. С. 1,727.
14. Butz S., Jung P., Filippenko L. V., et al. // *Opt. Express*. 2013. V. 21, No. 19. P. 22 540.
15. Jung P., Butz S., Shitov S. V., Ustinov A. V. // *Appl. Phys. Lett.* 2013. V. 102, No. 6. Art. no. 062601.
16. Pierro V., Filatrella G. // *Physica. C*. 2015. V. 517. P. 37.
17. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Rosenblum M., Pikovsky A. // *Sci. Rep.* 2016. V. 6. Art. no. 38518.
18. Nakao H., Teramae J.-N., Goldobin D. S., Kuramoto Y. // *Chaos*. 2010. V. 20, No. 3. Art. no. 033126.
19. Goldobin D. S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G.-B. // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105, No. 15. Art. no. 154101.

Поступила в редакцию 8 мая 2018 г.; принята в печать 26 сентября 2018 г.

CORRELATIONS OF THE STATES OF NON-ENTRAINED OSCILLATORS IN THE KURAMOTO ENSEMBLE WITH NOISE IN THE MEAN FIELD

A. S. Pikovsky, A. V. Dolmatova, and D. S. Goldobin

We consider the dynamics of the Kuramoto ensemble oscillators not included in a common synchronized cluster, where the mean field is subject to fluctuations. The fluctuations can be either related to the finite size of the ensemble or superimposed on the mean field in the form of common noise due to the constructive features of the system. It is shown that the states of such oscillators with close natural frequencies appear correlated with each other, since the mean-field fluctuations act as common noise. We quantify the effect with the synchronization index of two oscillators, which is calculated numerically and analytically as a function of the frequency difference and noise intensity. The results are rigorous for large ensembles with additional noise superimposed on the mean field and is qualitatively true for the systems where the mean-field fluctuations are due to the finite size of the ensemble. In the latter case, the effect is found to be independent of the number of oscillators in the ensemble.

A. С. Пиковский, А. В. Долматова, Д. С. Голдобин