УДК 517.9+621.372

ХИМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В АНСАМБЛЯХ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В. С. Анищенко, Г. И. Стрелкова*

Саратовский национальный исследовательский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского,
г. Саратов, Россия

Исследуются структура и свойства химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов с нелокальной связью. Показано, что фазовые и амплитудные химерные состояния в ансамблях хаотических осцилляторов с негиперболическим и гиперболическим типами аттракторов могут быть получены с помощью моделей в виде двумерных отображений Эно и Лози. Исследуются механизмы рождения, структура и время жизни фазовых, амплитудных химер и режима уединённых состояний. Рассматриваются химерные состояния в двух связанных ансамблях хаотических отображений. Иллюстрируется возможность реализации в таких ансамблях нового типа химерной структуры — химеры, состоящей из уединённых состояний. Описываются эффекты внешней и взаимной синхронизации химерных структур на примере двух связанных ансамблей из логистических отображений с нелокальной связью. Обсуждается качественная аналогия полученных результатов с классическим эффектом синхронизации периодических автоколебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Уже несколько десятков лет исследования коллективной динамики ансамблей различной природы и образования в них диссипативных структур находятся в центре внимания специалистов по нелинейной динамике сложных систем взаимодействующих осцилляторов [1, 2]. Установлено, что в нелинейных ансамблях характерно возникновение кластеров синхронизации, пространственной перемежаемости, регулярных и хаотических пространственно-временны́х структур. Как правило, во многих работах исследовались ансамбли идентичных осцилляторов с локальной или глобальной связью. Недавно были открыты новые типы структур, названные химерами [3–5]. Во многом их возникновение обусловлено введением нелокальной связи между осцилляторами ансамбля. В исследованиях химерных состояний рассматриваются три типа связи между осцилляторами ансамбля: локальный, глобальный и нелокальный. В случае локальной связи каждый элемент ансамбля связан симметрично с P соседними осцилляторами справа и слева (в одномерном ансамбле $P = 1$). При глобальной связи каждый осциллятор связан со всеми осцилляторами ансамбля справа и слева ($P = N/2$, где N — число осцилляторов ансамбля). При нелокальном типе связи индивидуальный осциллятор связан с конечным числом P соседних осцилляторов ансамбля справа и слева ($1 < P < N/2$). Впервые химерные структуры были обнаружены в одномерном ансамбле нелокально связанных фазовых осцилляторов [3], затем этот эффект был описан подробнее в работе [4], где и предложен термин «химерные состояния». Химерными структурами называют кластеры из конечного числа осцилляторов с некогерентной (несинхронной) динамикой, которые сосуществуют вместе с кластерами с когерентной (синхронной) динамикой. Химерные пространственно-временны́е структуры характеризуются чёткими границами в ансамбле и являются достаточно грубыми образованиями, т. е. не исчезают при малых возмущениях параметров ансамбля и начальных условий.

Химерные структуры в последние годы привлекли внимание многих исследователей. Опубликовано большое количество статей, в которых представлены численные, теоретические [6–32]

* wadim@info.sgu.ru

и экспериментальные [33–38] результаты по изучению химер. Химерные структуры обнаружены в ансамблях, содержащих различные типы идентичных дискретных и дифференциальных нелинейных осцилляторов [11, 12, 17, 29, 39]. Анализ различных пространственно-временны́х структур, включая химерные состояния, в сложных ансамблях имеет не только фундаментальное, но и большое практическое значение. Он важен в исследованиях массивов джозефсоновских переходов [40], больших массивов связанных лазеров [41], нейронных сетей [42], динамики мозга [43], электросетей [44, 45] и других систем.

В данной работе рассматриваются химерные структуры в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов с дискретным временем. Наши исследования показали, что выбор ансамблей из относительно простых одномерных и двумерных отображений позволяет изучать фазовые и амплитудные химерные структуры, которые реализуются и в более сложных ансамблях из дифференциальных систем. Однако при этом математическое моделирование динамики ансамблей во многом упрощается. Работа представляет краткий обзор результатов, полученных в последние годы на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского университета.

1. БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ И НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ АТТРАКТОРАМИ

Детальные исследования пространственно-временных структур в ансамблях нелокально связанных хаотических систем, как дискретных, так и дифференциальных, показали принципиальную зависимость типа реализуемых структур от вида хаотического аттрактора индивидуальных осцилляторов в ансамбле. Было установлено, что в ансамблях, составленных из хаотических осцилляторов с негиперболическим типом хаотических аттракторов, рождаются определённые пространственно-временны́е структуры, включая химерные. При этом вид и характеристики реализуемых структур для многих исследованных систем оказываются схожими. В ансамблях, составленных из осцилляторов с гиперболическим (или, точнее, с квазигиперболическим) аттрактором, реализуются структуры иного типа и, самое главное, в таких ансамблях химерные структуры, как правило, не возникают [27]. Основываясь на опыте многочисленных компьютерных экспериментов, нами были введены в качестве базовых моделей двумерные отображения Эно и Лози [17, 46]. Показано, что с их помощью можно описать формирование пространственно-временны́х структур, включая химерные, в широком классе ансамблей нелокально связанных осцилляторов. Отображение Эно описывается дискретными уравнениями (1), а отображение Лози — уравнениями (2):

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \qquad y_{n+1} = \beta x_n, \tag{1}$$

$$x_{n+1} = 1 - \alpha |x_n| + y_n, \qquad y_{n+1} = \beta x_n, \tag{2}$$

где n — дискретное время. Оба отображения являются двумерными и содержат по два управляющих параметра: α и β. Параметр α управляет нелинейностью, а параметр β характеризует степень сжатия элемента фазового пространства на плоскости фазовых переменных (x, y).

Система Эно (1) реализует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в соответствии с универсальностью Фейгенбаума. Рождающийся через удвоения хаотический аттрактор является негиперболическим. Он включает теоретически бесконечное число устойчивых и неустойчивых неподвижных точек. Причиной этого являются эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых точек. Такой тип хаотического аттрактора по терминологии Афраймовича—Шильникова называется квазиаттрактором и характеризуется мультистабильностью. Отображение Эно качественно описывает динамику весьма широкого класса хаотических систем. Так, при условии сильного сжатия ($\beta \ll 1$) мы получаем одномерное логистическое отображение. Для спиральных аттракторов в трёхмерных дифференциальных системах отображение Пуанкаре на двумерной секущей оказывается топологически эквивалентным отображению Эно [47]. Как показали исследования, ансамбли из генераторов Ресслера, генераторов Анищенко—Астахова, из логистических и кубических отображений реализуют пространственно-временны́е структуры, аналогичные наблюдаемым в ансамбле нелокально связанных отображений Эно [12, 29].

Отображение Лози (2) демонстрирует жёсткий переход к почти гиперболическому хаотическому аттрактору, который является единственным в фазовом пространстве системы и не включает устойчивых точек. Мультистабильность в системе Лози исключается. Отображение Лози при $\beta = 0$ переходит в гиперболическое одномерное отображение «палатка», а в секущей Пуанкаре моделирует динамику дифференциальных трёхмерных систем с гиперболическим аттрактором типа Лоренца. Таким образом, используя в качестве индивидуальных осцилляторов ансамблей отображения Эно и Лози, мы получаем возможность описать пространственно-временны́е структуры в достаточно широком классе хаотических систем. Рассмотрим динамические и статистические характеристики пространственно-временны́х структур, которые могут быть реализованы в ансамблях нелокально связанных отображений Эно и Лози.

2. АНСАМБЛЬ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЭНО

Рассмотрим одномерный ансамбль из N нелокально связанных отображений Эно или Лози с периодическими граничными условиями, т. е. замкнутых в кольцо, описываемый следующими уравнениями:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} \left[f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t) \right], \qquad y_i^{t+1} = \beta x_i^t. \tag{3}$$

Здесь x^t и y^t — действительные значения фазовых переменных, t — дискретное время, σ — коэффициент нелокальной связи, P — число соседних элементов ансамбля справа и слева от элемента с номером i; $i = 1, 2, \ldots, N$ — порядковый номер элемента в ансамбле, $N = 1\,000$. Функции $f(x_i, y_i)$ и $f(x_j, y_j)$ соответствуют правой части первого уравнения отображения Эно (1) или Лози (2). Параметры обоих отображений имеют фиксированные значения: $\alpha = 1{,}4$; $\beta = 0{,}3$. Начальные условия для элементов ансамбля выбирались распределёнными случайным образом в единичном квадрате.

На рис. 1 представлены бифуркационные диаграммы для ансамблей отображений Эно (рис. 1*а*) и отображений Лози (рис. 1*б*) на плоскости параметров σ и $r = P/N$ (радиус связи). На рис. 1*а* области A, C, D и E отвечают областям когерентной динамики ансамбля отображений Эно, область B характеризует режим пространственно-временно́го хаоса. Градиентное изменение цвета в области B отражает плавный переход от режима частичной синхронизации (белая область на рис. 1*а*) и режима бегущих волн (белая область на рис. 1*б*) к пространственно-временно́му хаосу. В области A когерентному режиму соответствует режим полной хаотической синхронизации. Если зафиксировать радиус связи на уровне $r = 0{,}16$, то для значений коэффициента связи в интервале $0{,}20 \le \sigma \le 0{,}35$ в ансамбле возникают химерные структуры. Исследования показали, что реализуются два типичных режима: режимы фазовой и амплитудной химер [29, 39].

На рис. 2*а* представлены результаты расчётов профиля мгновенных амплитуд для ансамбля связанных отображений Эно, иллюстрирующего фазовые и амплитудные химеры.

Фазовые химеры представляют собой некогерентные кластеры (области *1* на рис. 2*а*) и сосуществуют одновременно с двумя некогерентными кластерами амплитудной химеры (области *2*)

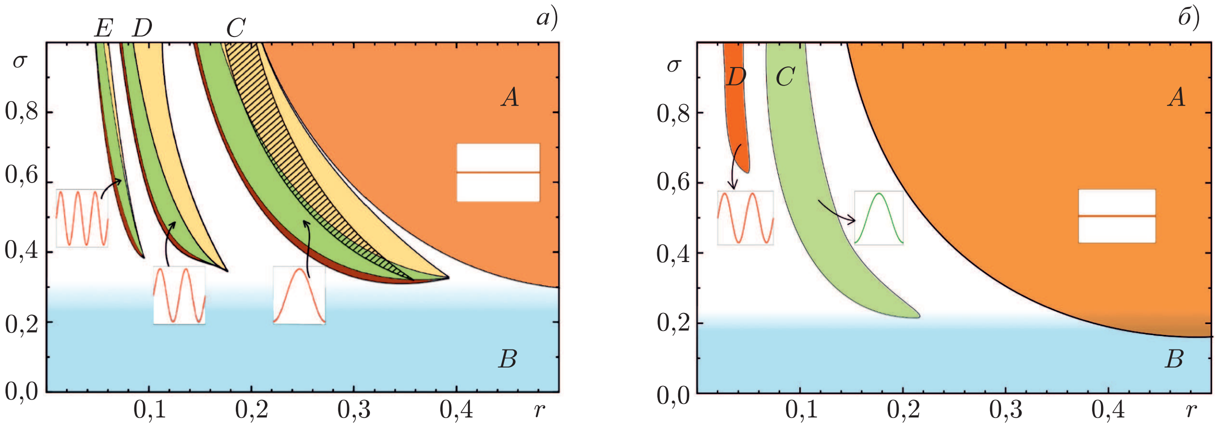

Рис. 1. Бифуркационные диаграммы для ансамблей нелокально связанных отображений Эно (*а*) и Лози (*б*). Вставки на рисунках показывают мгновенные профили амплитуд: однородный профиль (прямая линия) в области полной синхронизации A и профили амплитуд с одним, двумя и тремя максимумами, реализующиеся с уменьшением радиуса связи r. Внутри областей C, D и E с уменьшением силы связи σ имеют место бифуркации удвоения периода циклов

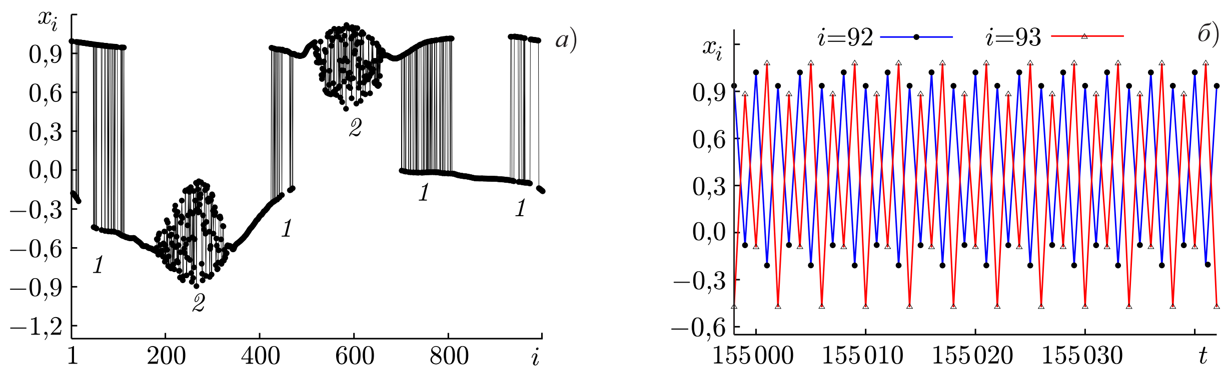

Рис. 2. Панель *а*: профиль мгновенных значений амплитуд в кольце отображений Эно (3). Фазовые химеры отмечены цифрой *1*, амплитудные — цифрой *2*. Панель *б*: временны́е реализации колебаний двух соседних осцилляторов из кластера фазовой химеры (синие и красные цвета соответствуют значениям $i = 92$ и 93). Параметры связи $\sigma = 0{,}258$, $r = 0{,}16$

и несколькими когерентными кластерами (области гладких профилей на рис. 2*а*). Некогерентность кластеров фазовой химеры проявляется в том, что осцилляторы внутри них характеризуются периодическими колебаниями, но имеют нерегулярный вдоль кластера сдвиг по «фазе». Чаще всего этот сдвиг равен половине периода колебаний (сдвиг по времени на одну итерацию). Рисунок 2*б* иллюстрирует сказанное.

Наличие фазового сдвига между осцилляторами внутри кластеров фазовой химеры подтверждается расчётами нормированного коэффициента взаимной корреляции, который для кластера фазовой химеры меняется нерегулярно, принимая значения либо +1, либо −1 [20, 48]. Иная картина имеет место для амплитудной химеры. Осцилляторы кластера амплитудной химеры функционируют в режиме хаотических колебаний, которые не являются коррелированными. Поэтому амплитудная химера в полной мере отвечает некоррелированному (несинхронному) кластеру в ансамбле. Осцилляторы, входящие в кластер амплитудной химеры, демонстрируют нерегулярность колебаний во времени, которая проявляется в эффекте перемежаемости между несколькими типами колебаний [28]. Данный эффект представляет собой нерегулярные во времени переключения между хаотическими колебаниями, отражающими динамику амплитудной химеры, и периодическими колебаниями, характерными для режима фазовой химеры. Наши исследования показали, что процесс перемежаемости наблюдается достаточно долгое, но конечное время, которое определяет время жизни амплитудной химеры. После завершения данного процесса все осцилляторы, принадлежащие кластеру амплитудной химеры, переключаются в долгоживущий режим фазовой химеры [28]. Тот факт, что амплитудная химера характеризуется нерегулярными переключениями с одного режима на другой (перемежаемостью) и реализуется на конечном интервале времени, относит этот вид химеры к так называемым переходным химерам [21].

Исследования показали, что с помощью внешнего шумового воздействия можно управлять временем жизни амплитудной химеры, в частности существенно увеличивать время её жизни [28].

3. АНСАМБЛЬ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЛОЗИ

Рассмотрим динамику ансамбля (3), используя в нём в качестве индивидуального осциллятора отображение Лози. Исследования [27, 46] показали, что в этом ансамбле с изменением интенсивности нелокальной связи σ также имеет место переход от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временнóго хаоса. Однако этот переход, во-первых, осуществляется через режим так называемых уединённых состояний, и, во-вторых, режимы химерных состояний при этом не наблюдаются. Рассмотрим бифуркационную диаграмму режимов для кольца Лози, представленную на рис. 1*б*.

Данная бифуркационная диаграмма качественно напоминает диаграмму для кольца отображений Эно (см. рис. 1*а*) по наличию областей когерентности A, C, D и области пространственно-временнóго хаоса B. Но переход из области хаотической синхронизации A в область B осуществляется через режим уединённых состояний, а в областях, окрашенных в белый цвет, наблюдаются режимы бегущих волн, как и в ансамбле нелокально связанных осцилляторов Лоренца [49]. Рассмотрим режим уединённых состояний. Если осуществить переход из области A в область B путём вариации параметра связи, то реализуется картина, представленная на рис. 3. При $\sigma = 0{,}226$ в мгновенном профиле появляется резкий выброс амплитуды для одного осциллятора (см. рис. 3*а*). Дальнейшее уменьшение параметра связи ведёт к увеличению числа осцилляторов в режиме выбросов амплитуды (см. рис. 3*б* и *в*) и завершается переходом в режим пространственно-временнóго хаоса. Важно отметить, что химерные структуры при этом переходе не реализуются. Механизм рождения режима уединённых состояний обусловлен изменением свойств индивидуальных осцилляторов ансамбля под действием сигналов от соседних осцилляторов за счёт нелокальной связи. Как показали наши исследования, динамика индивидуального осциллятора Лози в ансамбле под действием P соседних слева и справа осцилляторов существенно видоизменяется. Система Лози под внешним воздействием теряет свойство гиперболичности и становится бистабильной. Скачки амплитуд на рис. 3 как раз отвечают «перескоку» фазовых траекторий

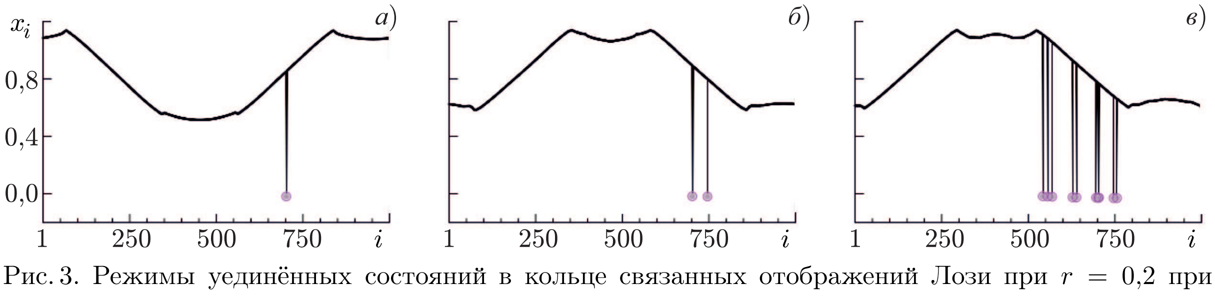

Рис. 3. Режимы уединённых состояний в кольце связанных отображений Лози при $r = 0{,}2$ при уменьшении параметра связи σ: $\sigma = 0{,}226$ (*а*), 0,225 (*б*) и 0,223 (*в*). В случае *а* появляется один выброс амплитуды, далее два (*б*) и более (*в*)

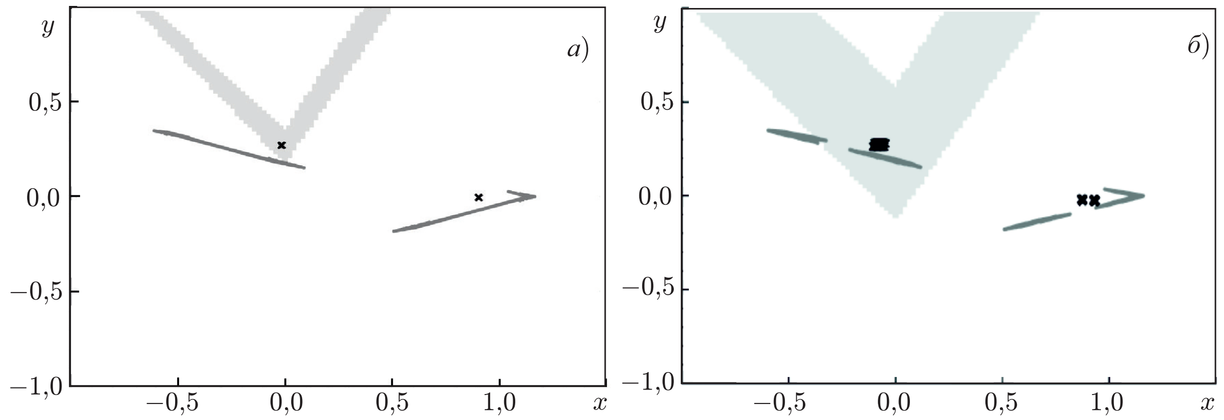

Рис. 4. Аттракторы системы (4) для различных значений силы связи σ: $\sigma = 0{,}226$ (*а*) и 0,200 (*б*). Светло-серым цветом выделены бассейны притяжения аттракторов уединённых состояний, рассчитанные для выбранного осциллятора ансамбля

на второй аттрактор за счёт случайных начальных условий. С уменьшением коэффициента связи σ область притяжения второго аттрактора увеличивается. Следствием является рост числа уединённых состояний, который отражает рис. 3.

Остановимся на этом вопросе детальнее. Путём простых преобразований уравнения кольца (3) можно привести к следующему виду:

$$x_i^{t+1} = (1-\sigma) f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} f(x_j^t, y_j^t), \qquad y_i^{t+1} = \beta x_i^t. \tag{4}$$

Из полученной системы (4) следует, что влияние нелокальной связи приводит к тому, что коэффициент связи меняет вид индивидуального осциллятора: появляется множитель $(1-\sigma)$ перед уравнением осциллятора (первое слагаемое в (4)), и этот осциллятор работает в неавтономном режиме, испытывая воздействие соседних P осцилляторов (второе слагаемое) за счёт нелокальной связи. В результате этих изменений индивидуальные осцилляторы в ансамбле приобретают принципиально иные свойства. Специальные исследования для кольца отображений Лози показали, что за счёт воздействия (4) индивидуальные осцилляторы в ансамбле приобретают свойства бистабильности: рядом с аттрактором Лози появляется другой аттрактор, причём область притяжения нового аттрактора достаточно мала и увеличивается с уменьшением коэффициента связи. Результаты расчётов представлены на рис. 4.

В силу случайного характера задания начальных условий один из осцилляторов ансамбля попадает в узкий бассейн притяжения (см. рис. 4*а*) и переходит в режим уединённого состояния. С уменьшением коэффициента связи бассейны притяжения увеличиваются (см. рис. 4*б*) и всё большее число осцилляторов переходит в режим уединённых состояний. Число таких осцилляторов с уменьшением коэффициента связи растёт по линейному закону и при стремлении его значения к нулю становится практически равным N. В предельном случае $\sigma = 0$, как следует из уравнения (4), система будет состоять из изолированных осцилляторов Лози, каждый из которых обладает только исходным аттрактором. Новый аттрактор, отвечающий режиму уединённых состояний, исчезает, и ансамбль переходит в режим пространственно-временнóго хаоса.

4. ХИМЕРА УЕДИНЁННЫХ СОСТОЯНИЙ В СВЯЗАННЫХ АНСАМБЛЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЭНО И ЛОЗИ

Рассмотрим систему двух взаимосвязанных ансамблей с нелокальной связью, состоящую из одномерных колец осцилляторов Эно и Лози. Уравнения ансамблей запишем в виде

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{j+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)] + \gamma F_i^t, \qquad y_i^{t+1} = \beta x_i^t, \tag{5а}$$

$$u_i^{t+1} = g(u_i^t, v_i^t) + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{j+R} [g(u_j^t, v_j^t) - g(u_i^t, v_i^t)] - \gamma F_i^t, \qquad v_i^{t+1} = \beta u_i^t, \tag{5б}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$; $N = 1\,000$. Система уравнений в (5а) описывает кольцо нелокально связанных отображений Эно ($f(x, y) = 1 - \alpha x^2 + y$), система (5б) — кольцо нелокально связанных отображений Лози ($g(u, v) = 1 - \alpha\,|u| + v$). Два кольца связаны через функцию связи F, которая в случаях диссипативной и инерционной связей между кольцами имеет соответственно вид

$$F_i^t = g(u_i^t, v_i^t) - f(x_i^t, y_i^t), \qquad F_i^t = u_i^t - x_i^t. \tag{6}$$

Коэффициент γ характеризует силу симметричной связи между i-ми осцилляторами колец Эно и Лози.

В результате численных исследований установлено, что в рассматриваемой системе (5а) и (5б) при вариации параметров могут быть реализованы все пространственно-временны́е структуры, которые к настоящему времени найдены в индивидуальных (не связанных) ансамблях Эно и Лози. Так, например, при вариации параметра симметричной связи γ в кольце Лози можно реализовать режимы фазовой и амплитудной химер, а в кольце Эно — режимы уединённых состояний и режимы бегущих волн в пространстве ансамбля. Кроме указанных структур, в системе (5а) и (5б) как при диссипативном, так и инерционном типах связи можно реализовать новый тип химерных состояний, названный нами химера уединённых состояний (УС-химера) и представляющий собой химерную структуру, включающую уединённые состояния [50]. Новая структура возникает в ансамбле осцилляторов Эно при малом коэффициенте связи γ, и её вид представлен на рис. 5.

Некогерентный кластер УС-химеры включает группу осцилляторов ($300 < i < 500$ на рис. 5) в режиме уединённых состояний, которые, в отличие от фазовой химеры, функционируют в хаотическом режиме. Новая структура нечувствительна к малым изменениям начальных условий и реализуется в конечной области изменения управляющих параметров системы (5а) и (5б). Исследования свойств амплитудной химеры в системе связанных ансамблей (5а) и (5б) показали полное соответствие её свойств характеристикам амплитудной химеры, описанные выше для одиночного кольца отображений Эно. Амплитудная химера также характеризуется нестационарностью колебаний во времени для всех осцилляторов кластера и, как правило, конечностью времени жизни. Однако в системе двух связанных колец временем жизни амплитудной химеры в широких пределах можно управлять путём вариации коэффициента связи γ. Зависимость времени жизни от параметра связи γ при этом оказывается принципиально нелинейной.

5. ВНЕШНЯЯ И ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ХИМЕРНЫХ СТРУКТУР

Эффекты синхронизации химерных структур исследовались нами на примерах систем связанных ансамблей, составленных из различных осцилляторов с хаотической динамикой [50, 51].

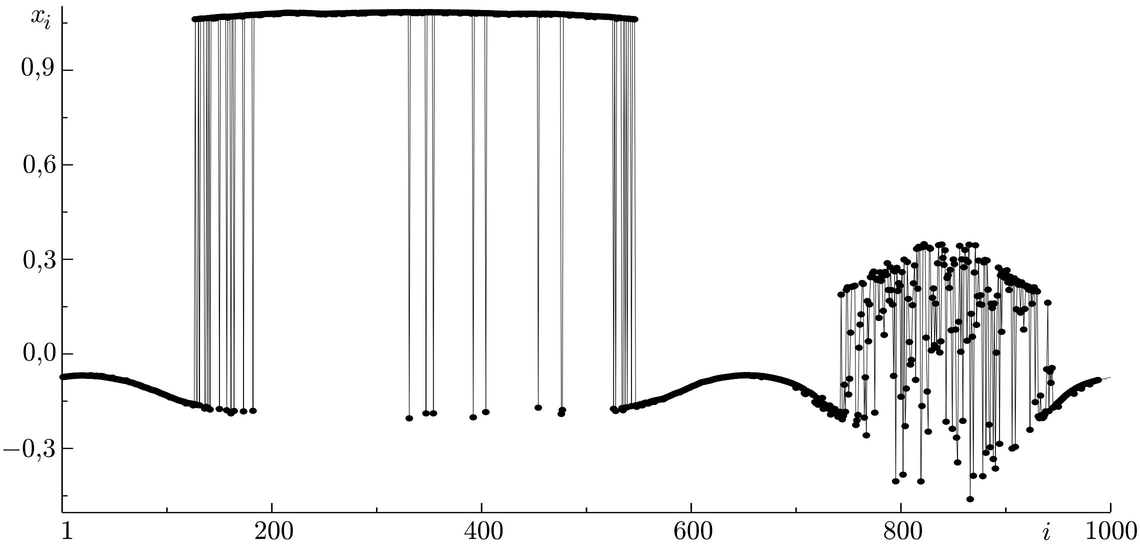

Рис. 5. Мгновенный профиль динамики ансамбля отображений Эно в связанной системе (5а) и (5б), иллюстрирующий сосуществование УС-химеры и амплитудной химеры при малой силе связи $\gamma = 0{,}005$

С целью наглядности рассмотрим пример синхронизации химерных структур в системе двух наиболее простых связанных ансамблей из колец логистических отображений с нелокальной связью с введением расстройки по параметрам. Уравнения системы имеют вид

$$x_i^{t+1} = f_i^t + \frac{\sigma_1}{2P}\sum_{j=i-P}^{i+P}\left(f_j^t - f_i^t\right) + \gamma_{2\,1}F_i^t, \qquad y_i^{t+1} = g_i^t + \frac{\sigma_2}{2R}\sum_{j=i-R}^{i+R}\left(g_j^t - g_i^t\right) - \gamma_{1\,2}F_i^t,$$
$$f_i^t = \alpha_1 x_i^t\,(1 - x_i^t), \qquad g_i^t = \alpha_2 y_i^t(1 - y_i^t). \tag{7}$$

Здесь α_1 и α_2 — параметры нелинейности логистических отображений, σ_1 и σ_2 — коэффициенты нелокальной связи, $P = R = 320$, $N = 1\,000$, $F_i^t = g_i^t - f_i^t$ — функция диссипативной связи между кольцами, $\gamma_{2\,1}$ и $\gamma_{1\,2}$ — коэффициенты связи между кольцами. В случае внешней синхронизации $\gamma_{2\,1} = 0$, $\gamma_{1\,2} = \gamma$, а для режима взаимной синхронизации $\gamma_{2\,1} = \gamma_{1\,2} = \gamma$.

Установим параметры первого и второго колец так, чтобы в них в отсутствие связи реализовывались различные пространственно-временны́е структуры. Зафиксируем параметры, одинаковые для первого и второго кольца ($R = P = 320$ и $N = 1\,000$), и выберем значения $\alpha_1 = 3{,}7$; $\sigma_1 = 0{,}23$ и $\alpha_2 = 3{,}85$; $\sigma_2 = 0{,}15$. При этом в отсутствие связи между кольцами в первом кольце реализуется режим фазовой и амплитудной химер, а во втором при указанных выше параметрах в отсутствие связи устанавливается режим, близкий к пространственно-временно́му хаосу. Выбор конкретных значений параметров, указанных выше, не является принципиальным. Главное требование, необходимое для исследования эффекта синхронизации, состоит в том, чтобы выбранные значения параметров обеспечивали различия в пространственно-временны́х структурах колец в отсутствие связи.

Будем теперь наблюдать за эволюцией структур во втором кольце при введении однонаправленной связи. Расчёты показали, что с введением связи и ростом величины γ пространственные структуры во втором кольце видоизменяются, постепенно приближаясь к виду первоначальной структуры управляющего кольца. При достижении величины коэффициента связи $\gamma = 0{,}40$ и более структура в управляемом кольце становится идентичной по виду со структурой в управляющем кольце. Рисунок 6 иллюстрирует сказанное. Отметим, что на данных рисунках

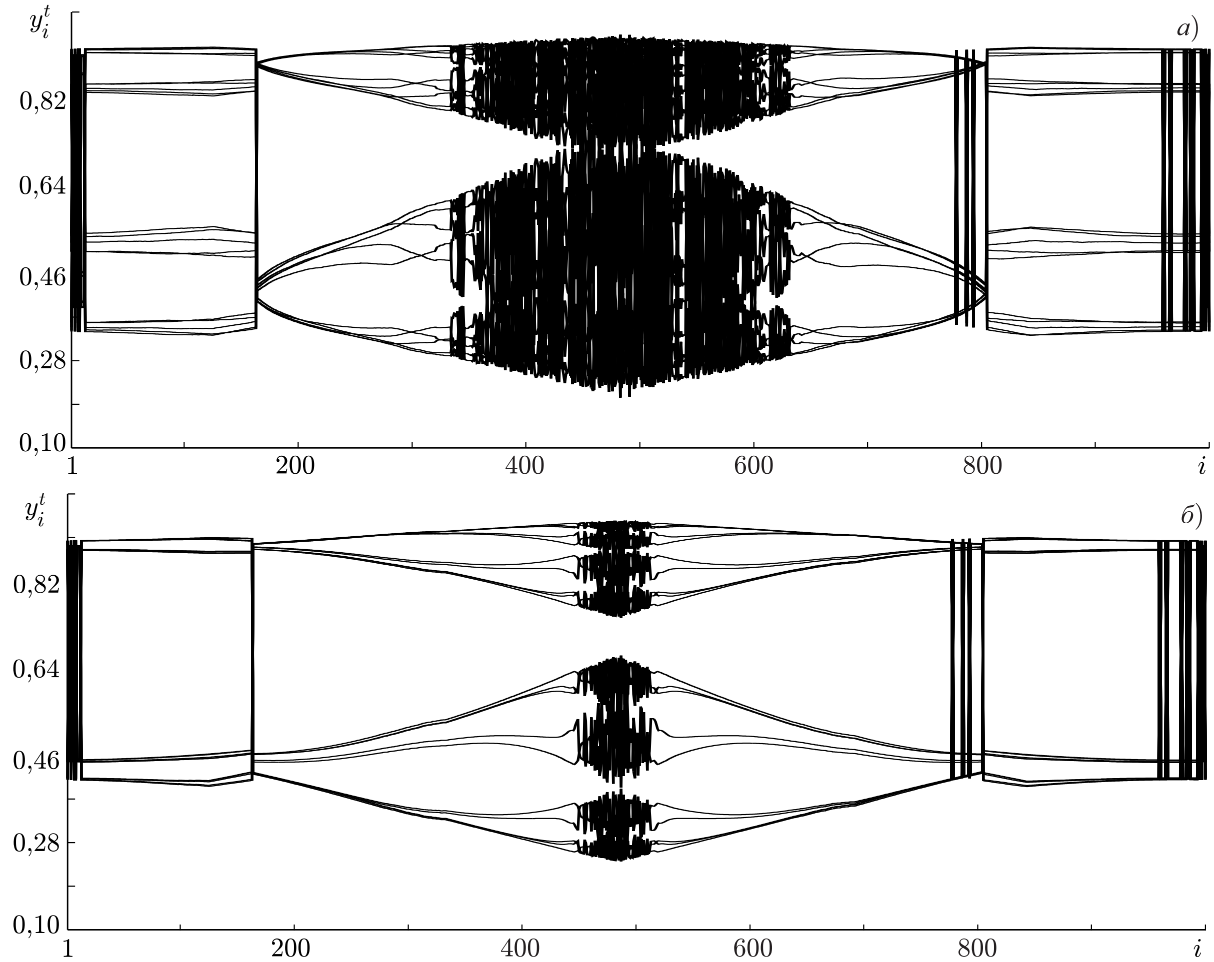

Рис. 6. Пространственно-временны́е профили амплитуд y_i^t во втором кольце для режима отсутствия ($\gamma = 0{,}15$; *а*) и наличия ($\gamma = 0{,}45$; *б*) эффекта внешней синхронизации

динамика элементов связанных колец иллюстрируется с помощью пространственно-временны́х профилей, которые представляют собой набор 100 последних мгновенных профилей состояний ансамблей [29].

Для констатации эффекта синхронизации химерных структур результатов, представленных на рис. 6, строго говоря, недостаточно. Необходимо количественно обосновать идентичность синхронных структур и показать существование конечной области синхронизации в пространстве параметров системы. Одной из возможных количественных характеристик синхронной динамики двух осцилляторов может служить коэффициент взаимной корреляции

$$R_i = \frac{\langle \tilde{x}_i(t)\, \tilde{y}_i(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_i^2(t) \rangle\, \langle \tilde{y}_i^2(t) \rangle}}\,, \tag{8}$$

где $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle$, $\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - \langle y_i(t) \rangle$, x_i и y_i — амплитуды колебаний в первом и втором связанных ансамблях, угловые скобки означают усреднение по времени, $i = 1, 2, \ldots, N$ — номера соответствующих элементов взаимодействующих ансамблей. Синхронной динамике осцилляторов будет отвечать равенство $R_i = 1{,}0$, а при отсутствии синхронизации коэффициент R_i будет меньше единицы. Проведённые расчёты показали, что структура, показанная рис. 6*б*, действительно является идентичной, а значит, синхронной первоначальной структуре, которая наблюдается в управляющем кольце в отсутствие связи между кольцами. В этом случае коэффициент взаимной корреляции $R_i > 0{,}99$ и это условие выполняется в конечной области изменения управляющих параметров. Таким образом, можно говорить, что при однонаправленной связи химерная структура первого (управляющего) кольца синхронизует структуру во втором (управляемом) кольце и реализуется эффект внешней синхронизации химерных структур.

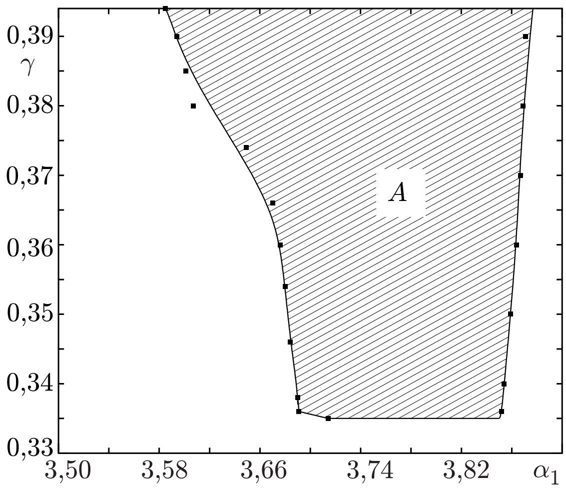

Рис. 7. Область внешней синхронизации пространственно-временны́х структур в системе (7) на плоскости параметров (α_1, γ) при $\alpha_2 = 3{,}85$; $\sigma_1 = 0{,}23$, $\sigma_2 = 0{,}15$. В заштрихованной области A коэффициент взаимной корреляции колебаний осцилляторов x_i^t и y_i^t равен $R_i > 0{,}99$

Более показательным является эксперимент, результаты которого представлены на рис. 7. Зафиксируем $\alpha_2 = 3{,}85$ в управляемом кольце и построим область синхронизации на плоскости двух параметров: коэффициента связи γ и параметра нелинейности управляющего кольца α_1. Вариации параметра α_1 вызовут изменение вида пространственно-временны́х структур в управляющем кольце. Как показали расчёты, структуры в управляющем кольце, которые реализуются при вариации параметра α_1, синхронизуют подобные же структуры в управляемом кольце при увеличении коэффициента связи γ. Далее, изменяя коэффициент связи, проведём расчёты коэффициента взаимной корреляции R_i и построим область синхронизации, представленную на рис. 7. В заштрихованной области A коэффициент $R_i > 0{,}99$. Это означает, что в области A реализуются структуры, полностью синхронные структурам в управляющем кольце. При этом необходимо отметить, что при вариации параметров α_1 и γ внутри области A на рис. 7 будут наблюдаться различные структуры в силу изменения параметра α_1 в управляющем кольце. Однако всюду в области A структуры в первом и втором кольцах будут идентичны и синхронны.

С целью исследования взаимной синхронизации химерных структур введём в уравнения связанных колец (7) симметричную двустороннюю связь, положив $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$. Вводя небольшую расстройку по параметрам α_1 и α_2 в ансамблях логистических отображений, получим в отсутствие связи отличающиеся химерные структуры в первом и втором кольцах (см. рис. 8*а*). С введением связи, как следует из расчётов, структуры начинают сближаться и при значениях $\gamma > 0{,}07$ они синхронизуются (см. рис. 8*б* и *в*).

Расчёты коэффициента взаимной корреляции показали, что в режиме синхронизации $R_i > 0{,}99$ и это условие выполняется в конечной области изменения коэффициента связи. Таким образом, можно говорить о реализации эффекта взаимной синхронизации химерных структур в связанных ансамблях (7). Отметим, что синхронные структуры не совпадают с видом структур в первом и втором ансамблях при отсутствии связи, что хорошо видно из рис. 8.

Описанный эффект синхронизации качественно можно сравнить с классическим эффектом синхронизации периодических автоколебаний. Действительно, при внешней и взаимной синхронизации предельного цикла в качестве простейшей структуры можно рассматривать спектральную линию колебаний на частоте ω. Тогда при внешней синхронизации поведение внешнего (управляющего) генератора будет характеризоваться спектральной линией на частоте ω_1, а структура управляемого генератора — спектральной линией на частоте ω_0. В области синхронизации реализуется эффект захвата частоты, при котором эти частоты совпадают. В случае взаимной синхронизации генераторов с близкими частотами ω_1 и ω_0 наблюдается аналогичное явление

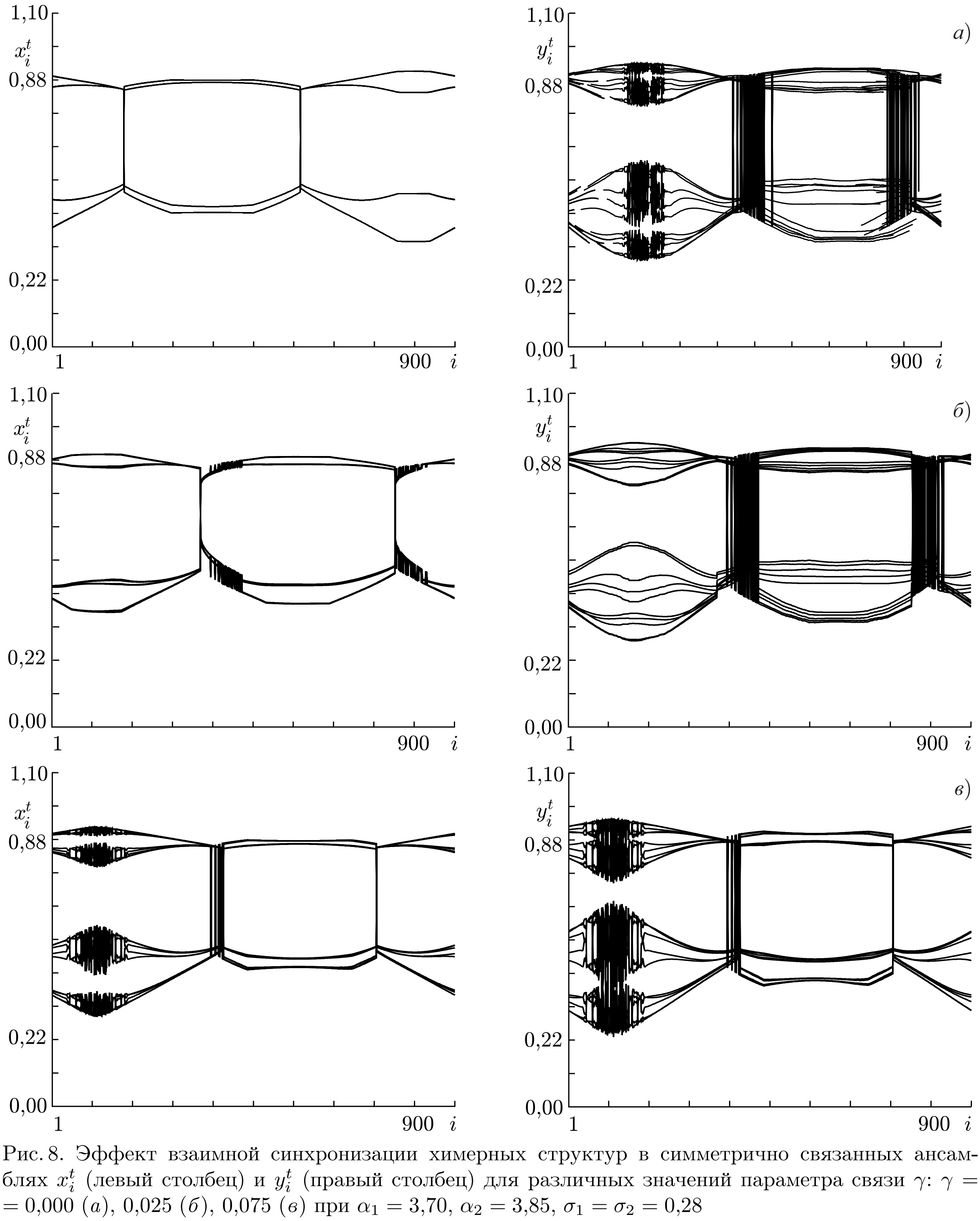

Рис. 8. Эффект взаимной синхронизации химерных структур в симметрично связанных ансамблях x_i^t (левый столбец) и y_i^t (правый столбец) для различных значений параметра связи γ: $\gamma = 0{,}000$ (*а*), 0,025 (*б*), 0,075 (*в*) при $\alpha_1 = 3{,}70$, $\alpha_2 = 3{,}85$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}28$

с той лишь разницей, что в области синхронизации могут устанавливаться либо частота ω_1, либо ω_0, либо некоторое промежуточное значение частоты $\omega_1 < \omega < \omega_0$. Как следует из результатов, представленных в разделе 4, в случае взаимодействия двух ансамблей из нелинейных осцилляторов реализуется качественно сходная картина. При внешней синхронизации пространственно-временна́я структура управляющего ансамбля «захватывает» структуру управляемого ансамбля и идентичность синхронных структур сохраняется в области синхронизации. При взаимной синхронизации осуществляется взаимозахват структур в связанных ансамблях. При этом синхронизованные структуры отличаются от исходных структур в ансамблях в отсутствие связи (см. рис. 8), что наблюдается и при взаимной синхронизации связанных периодических генераторов.

В пользу возможности сравнения эффекта синхронизации пространственно-временны́х структур с классическим эффектом синхронизации предельного цикла говорят и результаты, представленные на рис. 7. Область внешней синхронизации на рис. 7 качественно напоминает область внешней синхронизации предельного цикла на плоскости амплитуда внешнего воздействия—расстройка частот. В случае взаимосвязанных ансамблей роль амплитуды воздействия играет коэффициент связи γ, а роль расстройки частот — параметр α_1 при фиксированном параметре α_2. В отличие от синхронизации предельного цикла, в случае синхронизации ансамблей имеет место порог синхронизации по параметру связи γ (см. рис. 7). Наличие порога обусловлено неидентичностью взаимодействующих ансамблей, а его уровень зависит от радиуса нелокальной связи (чисел R и P в выражении (7)).

Проведённое сопоставление позволяет рассматривать результаты по синхронизации химерных состояний как обобщение представлений классической теории синхронизации периодических автоколебаний на случай синхронизации пространственно-временны́х структур в системах связанных ансамблей нелинейных осцилляторов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе установлено, что отображения Эно и Лози могут служить базовыми моделями для описания динамических свойств одномерных ансамблей хаотических систем с нелокальной связью. Приведены результаты анализа динамики ансамблей, составленных из отображений Эно и Лози. Показано, что в ансамблях Эно в режиме негиперболического хаоса реализуются фазовые и амплитудные химерные состояния [29, 39]. Кратко описаны структура, свойства и корреляционные характеристики фазовых и амплитудных химер. В работе [28] было показано, что амплитудная химера в одиночном ансамбле характеризуется конечным временем жизни, которым можно управлять с помощью шумового воздействия. В ансамблях из отображений Лози реализуются режимы бегущих волн и режимы уединённых состояний, но не возникают режимы химерных состояний [27, 46]. Обсуждается механизм рождения режима уединённых состояний, обусловленный бистабильной динамикой элементов ансамбля за счёт влияния нелокальной связи.

Приведённые результаты полностью соответствуют имеющимся в литературе данным. Так, в одномерных ансамблях из нелокально связанных генераторовРесслера, генераторов Анищенко—Астахова, логистических и кубических отображений реализуются все аналогичные возникающим в ансамбле Эно пространственно-временны́е структуры [12, 29]. Результаты исследований динамики одномерного ансамбля из нелокально связанных осцилляторов Лоренца в режиме почти гиперболического хаоса [17] также полностью соответствуют результатам, описанным нами для ансамбля осцилляторов Лози. Таким образом, базовые модели хаотических осцилляторов Эно и Лози действительно позволяют анализировать широкий класс ансамблей из нелокально связанных хаотических осцилляторов.

В работе также рассмотрен случай двух взаимосвязанных одномерных ансамблей, составленных из нелокально связанных хаотических отображений разного типа. При этом описан новый тип химерной структуры (химера уединённых состояний), которая включает в качестве некогерентного кластера конечное число осцилляторов в режиме уединённых состояний.

В разделе 5 рассмотрены эффекты внешней и взаимной синхронизации химерных структур на примере двух связанных ансамблей логистических отображений. Проведено сопоставление и показана аналогия полученных результатов с выводами классической теории синхронизации периодических автоколебаний.

Работа выполнена при поддержке Немецкого физического общества (проект SFB 910) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект 3.8616.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D. Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore: World Scientific, 1995. 260 p.
2. Osipov G. V., Kurths J., Zhou Ch. Synchronization in oscillatory networks. Berlin: Springer, 2007. 250 p.
3. Kuramoto Y., Battogtokh D. // Nonlin. Phen. Complex Sys. 2002. V. 5, No. 4. P. 380.
4. Abrams D. M., Strogatz S. H. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93, No. 17. Art. no. 174102.
5. Panaggio M. J., Abrams D. M. // Nonlinearity. 2015. V. 28. P. R67.
6. Abrams D. M., Mirollo R. E., Strogatz S. H., Wiley D. A. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. Art. no. 084103.
7. Laing C. R. // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. Art. no. 066221.
8. Martens E. A., Laing C. R., Strogatz S. H. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. Art. no. 044101.
9. Motter A. E. // Nature Phys. 2010. V. 6. P. 164.
10. Wolfrum M., Omel'chenko O. E. // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. Art. no. 015201.
11. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. Art. no. 234102.
12. Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. Art. no. 026212.
13. Maistrenko Y., Vasylenko A., Sudakov O., et al. // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. V. 24. Art. no. 1440014.
14. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. Art. no. 154101.
15. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. Art. no. 144103.
16. Dudkowski D., Maistrenko Y., Kapitaniak T. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. Art. no. 032920.
17. Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. // Europhys. Lett. 2015. V. 112. Art. no. 40002.
18. Olmi S., Martens E. A., Thutupalli S., Torcini A. // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. Art. no. 030901(R).
19. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., et. al. // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. Art. no. 012915.
20. Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. // Chaos. 2016. V. 26. Art. no. 093108.
21. Kemeth F. P., Haugland S. W., Schmidt L., et al. // Chaos. 2016. V. 26. Art. no. 094815.
22. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. // Chaos. 2016. V. 26. Art. no. 094825.
23. Semenova N. I., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. Art. no. 01410.
24. Schöll E. // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2016. V. 225. P. 891.
25. Semenov V., Zakharova A., Maistrenko Y., Schöll E. // Europhys. Lett. 2016. V. 115. Art. no. 10 005.
26. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2017. V. 226. P. 1 883.
27. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2017. V. 226. P. 1 857.

28. Semenova N. I., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. // Chaos. 2017. V. 27. Art. no. 061102.
29. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., et al. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. V. 43. P. 25.
30. Santos M. S., Szezezh Jr. J. D., Batista A. M., et al. // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 2 188.
31. Zakharova A., Semenova N., Anishchenko V., Schöll E. // Chaos. 2017. V. 27. Art. no. 114320.
32. Shepelev I. A., Bukh A. V., Vadivasova T. E., et al. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2018. V. 54. P. 50.
33. Hagerstrom A. M., Murphy T. E., Roy R., et al. // Nature Physics. 2012. V. 8. P. 658.
34. Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K. // Nature Physics. 2012. V. 8. P. 662.
35. Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Y. L. // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. Art. no. 054103.
36. Martens E. A., Thutupalli S., Fourriere A., Hallatschek O. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2013. V. 110. P. 10 563.
37. Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., et al. // Sci. Rep. 2014. V. 4. P. 6 379.
38. Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Y. // Nature Commun. 2015. V. 6. P. 7 752.
39. Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С. // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. С. 103.
40. Watanabe S., Strogatz S. H., van der Zant H. S. J., Orlando T. P. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 379.
41. Li R. D., Erneux T. // Phys. Rev. A. 1993. V. 49. P. 1 301.
42. Hizanidis J., Kouvaris N.E., Zamora-López G., et al. // Sci. Rep. 2016. V. 6. Art. no. 19845.
43. Rattenborg N. C., Amlaner C. J., Lima S. L. // Neurosci. Biobehav. Rev. 2000. V. 24. P. 817.
44. Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T. // Nature Phys. 2013. V. 9. P. 191.
45. Nishikawa T., Motter A. E. // New J. Phys. 2015. V. 17. Art. no. 015012.
46. Semenova N. I., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. // Reg. Chaot. Dyn. 2017. V. 22. P. 148.
47. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
48. Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И., Богомолов С. А., Анищенко В. С. // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. С. 68.
49. Dziubak V., Maistrenko Y., Schöll E. // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. Art. no. 032907.
50. Bukh A., Semenova N., Rybalova E., et al. // Chaos. 2017. V. 27. Art. no. 111102.
51. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. // arXiv. 2018. Art. no. 1802.02771v1 .

Поступила в редакцию 8 мая 2018 г.; принята в печать 21 сентября 2018 г.

CHIMERA STRUCTURES IN THE ENSEMBLES OF NONLOCALLY COUPLED CHAOTIC OSCILLATORS

V. S. Anishchenko and G. I. Strelkova

We study the structure and properties of the chimera states in the ensembles of chaotic oscillators with nonlocal coupling. It is shown that the phase and amplitude chimera states in the ensembles of chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors can be obtained using the models in the forms of the two-dimensional Henon and Lozi maps. The mechanisms of birth, the structure, and the lifetime of the phase and amplitude chimeras and the regime of the solitary states are studied. The chimera states in two coupled ensembles of chaotic maps are considered. The possibility of realizing a new type of the chimera structure, i.e., the chimera consisting of the solitary states is demonstrated.

The effects of the external and mutual synchronizations of the chimera states are described by an example of two coupled ensembles of nonlocally coupled logistic maps. A qualitative analogy of the obtained results with the classical effect of synchronization of periodic self-sustained oscillations is discussed.