

УДК 517.925+517.93

О ВОЗНИКНОВЕНИИ СМЕШАННОЙ ДИНАМИКИ В РЕЗУЛЬТАТЕ СТОЛКНОВЕНИЯ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ И РЕПЕЛЛЕРОВ В ОБРАТИМЫХ СИСТЕМАХ

А. О. Казаков*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Нижний Новгород, Россия

В работе предложен сценарий возникновения смешанной динамики в обратимых двумерных диффеоморфизмах. Ключевым моментом сценария является скачкообразное увеличение размеров странного аттрактора и странного репеллера, возникающее за счёт гетероклинических пересечений инвариантных многообразий седловых точек, принадлежащих аттрактору и репеллеру. Такие гетероклинические пересечения возникают сразу после того, как сталкиваются с границей своей области притяжения, а странный репеллер — с границей своей области отталкивания, после чего возникает пересечение аттрактора и репеллера. После этого диссипативная хаотическая динамика, связанная с существованием отдельных друг от друга странного аттрактора и странного репеллера, мгновенно становится смешанной, когда аттрактор и репеллер принципиально не отделимы. Возможность реализации предлагаемого сценария продемонстрирована на одной из известных задач динамики твёрдого тела, а именно на неголономной модели волчка Сулова.

ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени общепринятым было представление, что хаос в конечномерных гладких динамических системах бывает двух типов: консервативный (например, гамильтоновы) и диссипативный (странные аттракторы). Консервативный хаос возникает в неинтегрируемых системах, обладающих свойством сохранения фазового объёма, а диссипативный хаос наблюдается в системах, фазовый объём в которых сжимается и/или растягивается в процессе эволюции системы. Из известной теоремы Конли [1] следует, что в любой динамической системе, заданной на компактном многообразии, существуют аттрактор и репеллер. Известно много различных определений аттрактора. В данной работе под аттрактором системы мы будем понимать устойчивое (относительно постоянно действующих возмущений) замкнутое инвариантное множество, а под репеллером — аттрактор для системы в обратном времени. Данное определение аттрактора восходит к работам Конли [1], Рюэля [2] и Харли [3], а также подробно обсуждалось в недавней работе [4] (см. определение полного аттрактора в разделе 1.3.).

Важно отметить, что данные определения аттрактора и репеллера наилучшим образом согласуются с результатами численных экспериментов и позволяют определить третий тип динамического хаоса: смешанную динамику. Так, если обозначить аттрактор через \mathcal{A} , а репеллер через \mathcal{R} , то для консервативного хаоса будет выполняться условие $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, тогда как для диссипативного хаоса — условие $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Для смешанной динамики аттрактор всегда пересекается с репеллером, однако не совпадает с ним, т. е. выполняются соотношения $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ [4].

Впервые возможность пересечения аттрактора и репеллера была обнаружена в работе [5], в которой было доказано следующее. Вблизи негрубого гетероклинического контура любого двумерного диффеоморфизма, имеющего две седловые точки с якобианами больше и меньше еди-

* kazakovdz@yandex.ru

ницы¹, существуют открытые области (так называемые области Ньюхауса), в которых плотны диффеоморфизмы со счётным множеством асимптотически устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических орбит, замыкания которых имеют непустые пересечения, что фактически означает неотделимость аттракторов от репеллеров. Позднее, в работе [6], аналогичная теорема была доказана для случая, когда диффеоморфизм f с описанным гетероклиническим контуром является обратимым, т. е. когда f и f^{-1} сопряжены с помощью некоторой инволюции h , для которой $h \circ h = \text{id}$. Однако в отличие от общего случая здесь, помимо периодических источников и стоков, также возникают симметричные периодические орбиты консервативного типа (с якобианом $J = 1$), такие как эллиптические и седловые периодические орбиты с мультипликаторами μ и $1/\mu$.

Отметим, что симметричными периодическими орбитами, следуя работе [7], мы называем периодические орбиты, которые пересекают множество $\text{Fix}(h) \cup \text{Fix}(f \circ h)$ ровно в двух точках. Здесь $\text{Fix}(h)$ и $\text{Fix}(f \circ h)$ — множества неподвижных точек инволюции h и инволюции $f \circ h$ соответственно. Симметричные периодические точки нечётного периода имеют одну точку пересечения с множеством $\text{Fix}(h)$ и одну точку пересечения с множеством $\text{Fix}(f \circ h)$, тогда как симметричные периодические точки чётного периода могут не пересекать множество $\text{Fix}(h)$.

Заметим, что сосуществование диссипативной динамики с консервативной было ранее обнаружено в работах [8–10], где было замечено, что для обратимых двумерных диффеоморфизмов фазовое пространство может разбиваться на инвариантные области с консервативной динамикой, когда вся область является цепно-транзитивным множеством (см. определение цепной транзитивности, например, в работе [11])², и инвариантные области, содержащие пары аттрактор–репеллер. Что касается пересечения аттрактора и репеллера в физических системах, то в численных экспериментах такая возможность (по-видимому, впервые) была обнаружена в работе [12], где для модели четырёх связанных ротаторов было замечено, что аттрактор и репеллер могут перекрываться. Позднее, в работе [13], такое поведение в указанной модели было объяснено возникновением в системе смешанной динамики. Среди исследований смешанной динамики в моделях, возникающих в различных приложениях, отметим работы, посвящённые изучению неголономных моделей кельтского камня [14], резинового волчка Чаплыгина [15], волчка Суслова [16] и сапей Чаплыгина [17, 18], а также работу [19], в которой смешанная динамика была обнаружена в модели двух вихрей, находящихся под воздействием волнового возмущения.

Как показано в работе [13] на примере модели двух связанных ротаторов, смешанная динамика в обратимых системах может возникать «мягким» образом из консервативной динамики, а также «жёстким» образом из диссипативной динамики. В первом случае переход от консервативной динамики сопровождается последовательностью локальных [7] и глобальных [6, 20] бифуркаций разрушения симметрии. Во втором случае смешанная динамика возникает взрывом, после исчезновения (кризиса) аттрактора (устойчивой неподвижной точки) и репеллера (вполне неустойчивой неподвижной точки).

В данной работе мы предлагаем новый сценарий возникновения смешанной динамики в однопараметрических семействах двумерных обратимых диффеоморфизмов. Ключевым моментом в этом сценарии является разрушение (кризис) хаотического аттрактора Эно и хаотического репеллера Эно, возникающее в результате гетероклинических бифуркаций. При этом, переход

¹ Напомним, что под негрубым гетероклиническим контуром имеется в виду сепаратрисный контур, содержащий две седловые точки, в котором одна пара сепаратрис пересекается трансверсально, а другая пара образует гетероклиническое негрубое касание.

² Вероятно, что внутри таких инвариантных областей сосуществуют неотделимые множества устойчивых и вполне неустойчивых периодических орбит. Однако из-за того, что якобианы таких орбит очень близки к единице, при численном моделировании динамика в таких областях выглядит как консервативная.

к смешанной динамике в рамках указанного сценария осуществляется по цепочке: консервативный хаос → странный аттрактор + странный репеллер → смешанная динамика. Предлагаемый сценарий является развитием сценария, предложенного в нашей работе [19]. В качестве примера задачи, в которой смешанная динамика реализуется по указанному сценарию, будет рассмотрена неголономная модель Сулова [21].

Данная работа построена следующим образом. В разделе 1 на примере известного двумерного отображения Эно [22] приводится краткое описание сценария возникновения и кризиса аттрактора Эно, а также рассматриваются его свойства. В разделе 2 описывается предлагаемый сценарий возникновения смешанной динамики в однопараметрических семействах двумерных обратимых отображений. В разделе 3 показывается реализация предложенного сценария на примере неголономной модели Сулова.

1. ОБ АТТРАКТОРАХ ЭНО И ИХ КРИЗИСЕ

Для лучшего понимания бифуркаций, приводящих к столкновению аттрактора и репеллера, рассмотрим сценарий возникновения и разрушения (кризиса) аттрактора в отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M - bx - y^2, \quad (1)$$

здесь x и y — переменные отображения, M и b — параметры. В работе [22] численно было показано, что при некоторых параметрах в указанном отображении может возникать странный аттрактор. Далее зафиксируем параметр $b = 0,4$ и опишем сценарий возникновения и разрушения этого аттрактора в рассматриваемом отображении, увеличивая параметр M .

При $M \approx -0,485$ в системе происходит седло-узловая бифуркация, после которой рождается седловая точка O_1 и устойчивая точка O_2 . При увеличении параметра M , начиная с $M \approx 1,47$, устойчивая точка O_2 претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого, при $M \approx 2,1825$, рождается странный аттрактор типа аттрактора Фейгенбаума [23].

Как показывают результаты численных исследований, сразу после возникновения хаотической динамики через каскад бифуркаций удвоения периода аттрактор фейгенбаумского типа состоит из набора кусков (компонент). С дальнейшим увеличением параметра M компоненты аттрактора попарно сливаются (в результате возникновения гетероклинических пересечений между многообразиями седловых периодических точек, принадлежащих компонентам аттрактора, и многообразиями седловых точек, лежащих между этими компонентами). В последнюю очередь сливаются две компоненты, разделённые седловой неподвижной точкой, возникшей из устойчивой точки O_2 после первой бифуркации удвоения периода, и образуется гомоклинический аттрактор Эно. Мы называем такой аттрактор гомоклиническим, т.к. после слияния двух последних компонент этот аттрактор принадлежит замыканию неустойчивого многообразия W_2^u седловой точки O_2 , т.е. содержит эту седловую точку. В этом случае также можно сказать, что аттрактор Эно образован неустойчивым многообразием W_2^u точки O_2 .

Устойчивое и неустойчивое многообразия разбиваются седловой точкой на две связанные компоненты, которые для удобства мы далее будем называть сепаратрисами. Далее обозначим через W_1^s и W_2^s устойчивые сепаратрисы седловой точки O_1 .

Заметим, что область притяжения аттрактора в отображении Эно ограничена устойчивой сепаратрисой W_1^s седловой точки O_1 (см. рис. 1а). При дальнейшем росте параметра M аттрактор Эно увеличивается, подходит к сепаратрисе W_1^s и при $M \approx 2,27$ разрушается за счёт возникновения гетероклинического пересечения между W_2^u и W_1^s (см. рис. 1б). При этом практически все траектории из его окрестности уходят на бесконечность.

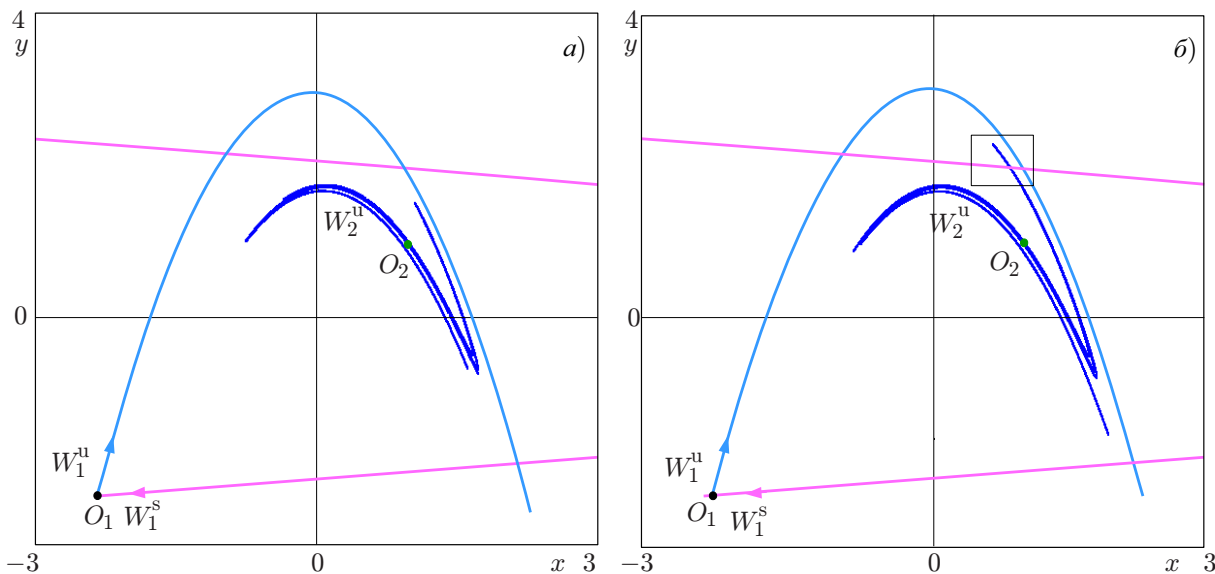


Рис. 1. Столкновение аттрактора Эно в отображении (1) с границей области притяжения при $b = 0,4$ и $M = 2,25$ (а) и $M = 2,27$ (б)

Важно отметить, что описанный сценарий возникновения и разрушения странного аттрактора является одним из основных сценариев перехода к хаосу в диссипативных системах. Аттракторы, возникающие согласно этому сценарию, будем называть аттракторами типа Эно. Как будет показано ниже, реализация описанного сценария в обратимых системах может приводить к возникновению другого типа хаоса – смешанной динамики.

2. СЦЕНАРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СМЕШАННОЙ ДИНАМИКИ В ОБРАТИМЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных обратимых диффеоморфизмов $\bar{X} = F(X, \varepsilon)$, заданных на компактном многообразии. Пусть при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ одна из неподвижных точек O обратимого диффеоморфизма лежит на линии неподвижных точек $\text{Fix}(h)$ и является эллиптической (см. рис. 2а). Далее предположим, что при $\varepsilon = \varepsilon_1$ точка O претерпевает бифуркацию разрушения симметрии [7], в результате которой при $\varepsilon > \varepsilon_1$ эта точка становится симметричной седловой, а в её окрестности рождаются асимптотически устойчивая точка O_a и вполне неустойчивая точка O_r с такими же периодами, как у точки O . При этом одна неустойчивая сепаратриса седловой точки O идёт в сток O_a , одна устойчивая сепаратриса выходит из источника O_r , а ещё одна пара сепаратрис, $W^u(O)$ и $W^s(O)$, образует трансверсальное пересечение (см. рис. 2б). При дальнейшем увеличении параметра ε , конкретно при $\varepsilon = \varepsilon_2$, из устойчивой точки O_a , в результате описанного в разделе 1 сценария, возникает аттрактор типа Эно АН. Таким же образом, из вполне неустойчивой точки O_r рождается репеллер типа Эно РН.

Заметим, что область притяжения аттрактора АН, как и в случае аттрактора в двумерном отображении Эно, ограничена устойчивым многообразием $W^s(O)$ симметричной седловой точки O . По инволюции область «отталкивания» репеллера РН ограничена неустойчивым многообразием $W^u(O)$. При дальнейшем увеличении параметра ε аттрактор АН подходит к границе своей области притяжения. Аналогично репеллер РН подходит к многообразию $W^u(O)$ (см. рис. 2в).

Далее полагаем, что при $\varepsilon > \varepsilon_3$ неустойчивое многообразие $W^u(O_a)$, образующее аттрактор АН, пересекается с устойчивым многообразием $W^s(O)$, т. е. аттрактор типа Эно сталкивается

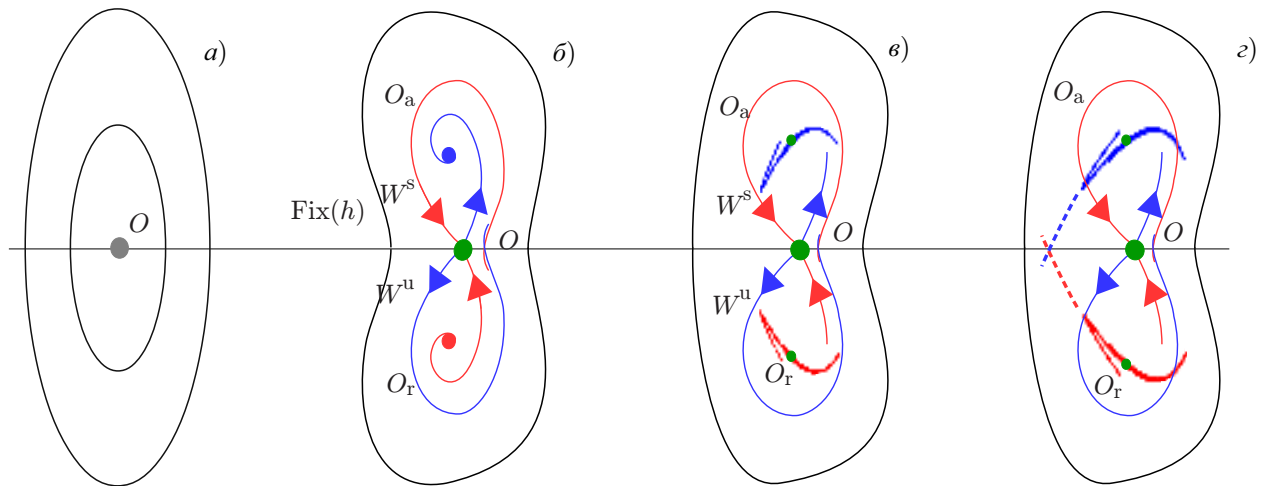


Рис. 2. Сценарий возникновения смешанной динамики в результате разрушения аттрактора типа Эно и репеллера типа Эно

с границей своей области притяжения и разрушается. В этот же момент, в результате пересечения многообразий $W^s(O_r)$ и $W^u(O)$, разрушается репеллер Эно RH. Важно отметить, что при этом сепаратрисы $W^u(O)$ и $W^s(O)$ по-прежнему пересекаются трансверсально. А значит, при $\varepsilon > \varepsilon_3$ возникает трансверсальное пересечение между многообразиями $W^u(O_a)$ и $W^s(O_r)$ (см. рис. 2г). Таким образом, в результате кризиса АН и RH аттрактор и репеллер системы существенно увеличиваются в размерах и пересекаются друг с другом, т. е. возникает смешанная динамика³.

3. СТОЛКНОВЕНИЕ АТТРАКТОРА И РЕПЕЛЛЕРА В НЕГОЛОНОМНОЙ МОДЕЛИ СУСЛОВА

В качестве примера модели, в которой реализуется приведённый выше сценарий, рассмотрим систему, описывающую движение волчка Сулова — тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой, подчинённого неголономной связи, задаваемой равенством нулю скалярного произведения $(\omega \cdot e)$ [21]. Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости волчка, а e — единичный вектор, являющийся неподвижным в теле. Таким образом, при движении волчка Сулова проекция его угловой скорости на некоторую неподвижную ось в теле равна нулю. Такая связь была введена в книге [24]. В качестве наглядного примера модели, в которой описанная связь реализуется естественным образом, укажем конструкцию, предложенную в работе [25], в которой твёрдое тело с неподвижной точкой катается на острых колесиках внутри неподвижной сферы (см. рис. 3). Острые края колесиков запрещают дви-

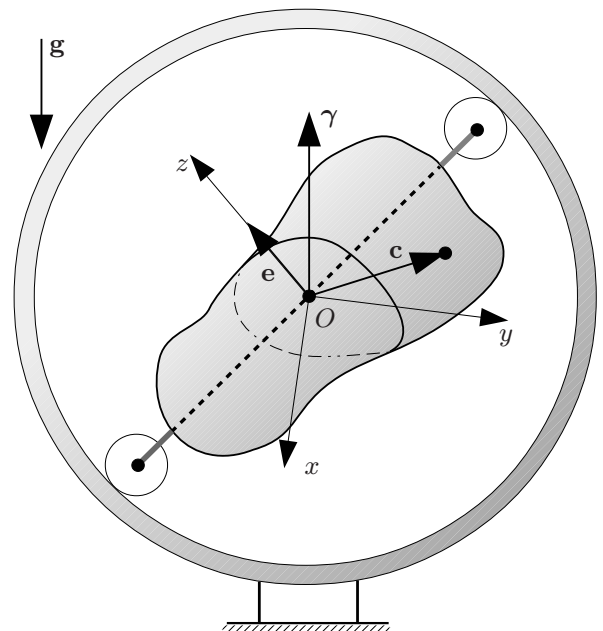


Рис. 3. Реализация связи Сулова [25]

³ Аналогичным образом происходит кризис (разрушение) аттрактора в отображении Эно [22]. Однако в этом случае, после пересечения аттрактора с устойчивой сепаратрисой, ограничивающей его область притяжения, практически все траектории уходят на бесконечность.

жение тела в направлении, перпендикулярном их плоскости.

Выберем систему координат $Oxyz$, жёстко связанную с телом, следующим образом. Начало координат O поместим в неподвижную точку тела, ось Oz зададим коллинеарной неподвижному в теле вектору \mathbf{e} , а оси Ox и Oz направим таким образом, чтобы занулить компоненты тензора инерции I_{12} и, соответственно, I_{21} (см. рис. 3). В таком случае неголономная связь $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0$ принимает простой вид $\omega_3 = 0$. При этом система уравнений, определяющая угловую скорость $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$ и ориентацию волчка $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где γ_1, γ_2 и γ_3 — проекции вертикального вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно, определяется следующим образом [21]:

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - mgc_3\gamma_2 + mgc_2\gamma_3, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - mgc_1\gamma_3 + mgc_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь I_{11}, I_{22}, I_{13} и I_{23} — ненулевые компоненты тензора инерции тела, m — масса волчка, g — ускорение свободного падения, а вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ задаёт смещение центра масс волчка относительно центра сферы O (см. рис. 3), точкой обозначена производная по времени.

Приведённая система уравнений обладает интегралом энергии и геометрическим интегралом:

$$E = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) - mg(\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}, \quad G = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}. \quad (3)$$

Значения геометрического интеграла всегда будем фиксировать $G = 1$, а значение интеграла энергии $E = h$ будем рассматривать как ещё один параметр в системе. Уравнения (2) с учётом интегралов (3) задают трёхмерный поток на некотором компактном трёхмерном многообразии. Для параметризации этого потока, как и в работе [21], будем использовать переменные γ_2, ω_1 и γ_1 , выражая ω_2 и γ_3 через интегралы (3). Далее, выбрав $\gamma_1 = \text{const}$ в качестве секущей, получим двумерное отображение Пуанкаре

$$(\bar{\gamma}_2, \bar{\omega}_1) = P(\gamma_2, \omega_1). \quad (4)$$

Везде далее, при проведении численных экспериментов, зафиксируем параметры

$$h = 101, \quad m = 1, \quad g = 10, \quad I_{11} = 3, \quad I_{22} = 4, \quad I_{13} = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 10 \quad (5)$$

и будем варьировать параметр I_{23} .

Заметим, что при указанных параметрах система (2) является обратимой относительно инволюции

$$H : \{\omega_1 \rightarrow -\omega_1, \quad \gamma_1 \rightarrow -\gamma_1, \quad t \rightarrow -t\}.$$

При этом, если в качестве секущей плоскости выбрать $\gamma_1 = 0$, то эта инволюция даст инволюцию

$$h : \{\omega_1 \rightarrow -\omega_1\}$$

на двумерном отображении Пуанкаре (4), множество неподвижных точек $\text{Fix}(h)$ которой задаётся прямой

$$\text{Fix}(h) = \{\omega_1 = 0\}.$$

3.1. Результаты численных исследований

Далее будем варьировать параметр I_{23} , считая остальные параметры заданными в соответствии с условиями (5). При $I_{23} = I_{13} = 0$, как было показано в работе [26], в системе существует гладкая инвариантная мера, т. е. хаос, наблюдаемый при численных экспериментах (см.

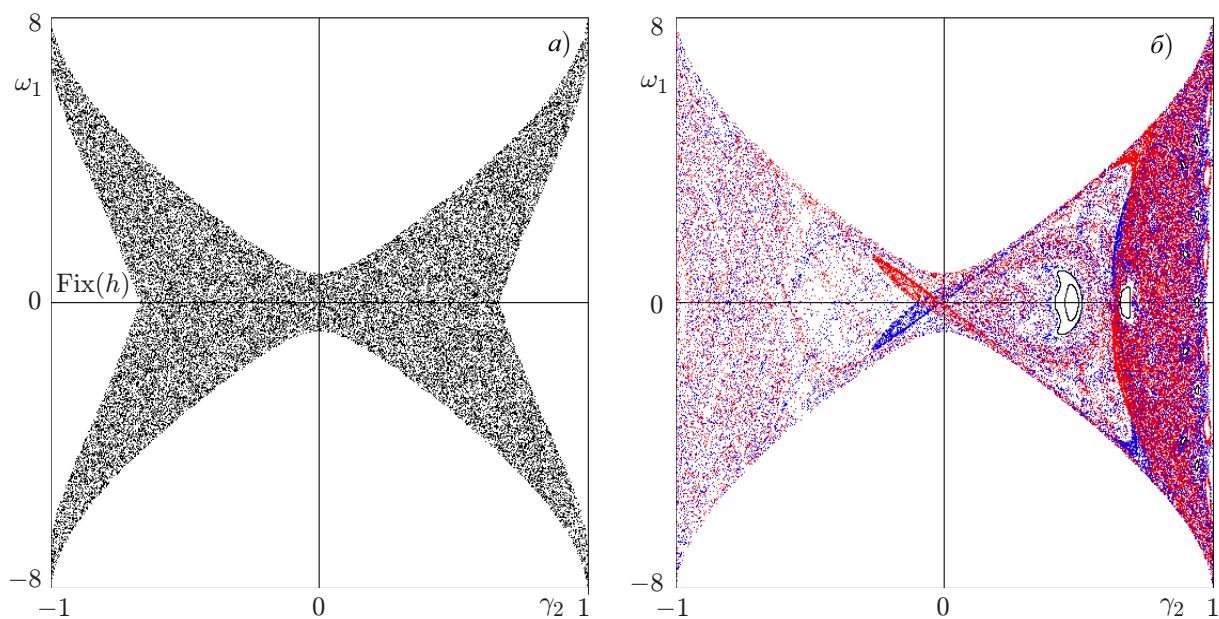


Рис. 4. Консервативный хаос при $I_{23} = 0$ (а), смешанная динамика при $I_{23} = 0,908$ (б). Синие точки соответствуют аттрактору, красные — репеллеру

рис. 4а), является консервативным (в том смысле, что все фазовое пространство является цепно-транзитивным множеством).

Случай $I_{23} > 0$ был подробно исследован в работе [21]. В частности, там было замечено, что в этом случае возникает асимметрия между аттрактором и репеллером (см. рис. 4б). В работе [16] такая асимметрия была связана с возникновением в системе смешанной динамики. Далее мы подробно опишем сценарий, в результате которого происходит переход от консервативного хаоса к смешанной динамике при увеличении параметра I_{23} .

При $I_{23} = 0,692$ в системе возникает симметричная эллиптическая точка периода 3 (см. рис. 5а). Далее, при $I_{23} = 0,7835$, эта эллиптическая точка претерпевает бифуркацию разрушения симметрии, в результате которой она становится седловой (S_0), а в её окрестности рождаются асимптотически устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 3 (см. рис. 5б). При дальнейшем увеличении параметра I_{23} из устойчивой периодической точки рождается аттрактор типа Эно, а из вполне неустойчивой — репеллер типа Эно (см. рис. 5в).

Важно отметить, что на рассматриваемом диапазоне параметров исследуемая система является моностабильной, т.е. аттрактор типа Эно является глобальным аттрактором в системе, а репеллер типа Эно — глобальным репеллером. Далее, при $I_{23} = 0,9079$, в соответствии со сценарием, описанным в разделе 2, аттрактор и репеллер разрушаются. Возникший после этого аттрактор пересекается с репеллером, и возникает смешанная динамика, изображённая на рис. 5г.

Опишем подробнее гомоклинические бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в рассматриваемой системе. На рис. 6 изображено расположение устойчивой W_0^s и неустойчивой W_0^u сепаратрис симметричной седловой точки S_0 , возникающей после бифуркации разрушения симметрии, а также неустойчивая сепаратриса W_a^u , образующая аттрактор Эно и устойчивая сепаратриса W_r^s , образующая репеллер Эно. При $I_{23} < 0,9079$ устойчивая сепаратриса W_0^s ограничивает область притяжения аттрактора Эно, а сепаратриса W_0^u — область отталкивания репеллера (см. рис. 6а). При $I_{23} > 0,9079$ неустойчивое многообразие W_a^u , образующее аттрактор, пересекается с сепаратрисой W_0^s , тогда как многообразие W_r^s , образующее репеллер, пересекается с W_0^u . При этом, т.к. вторая пара сепаратрис седловой точки S_0 уже пере-

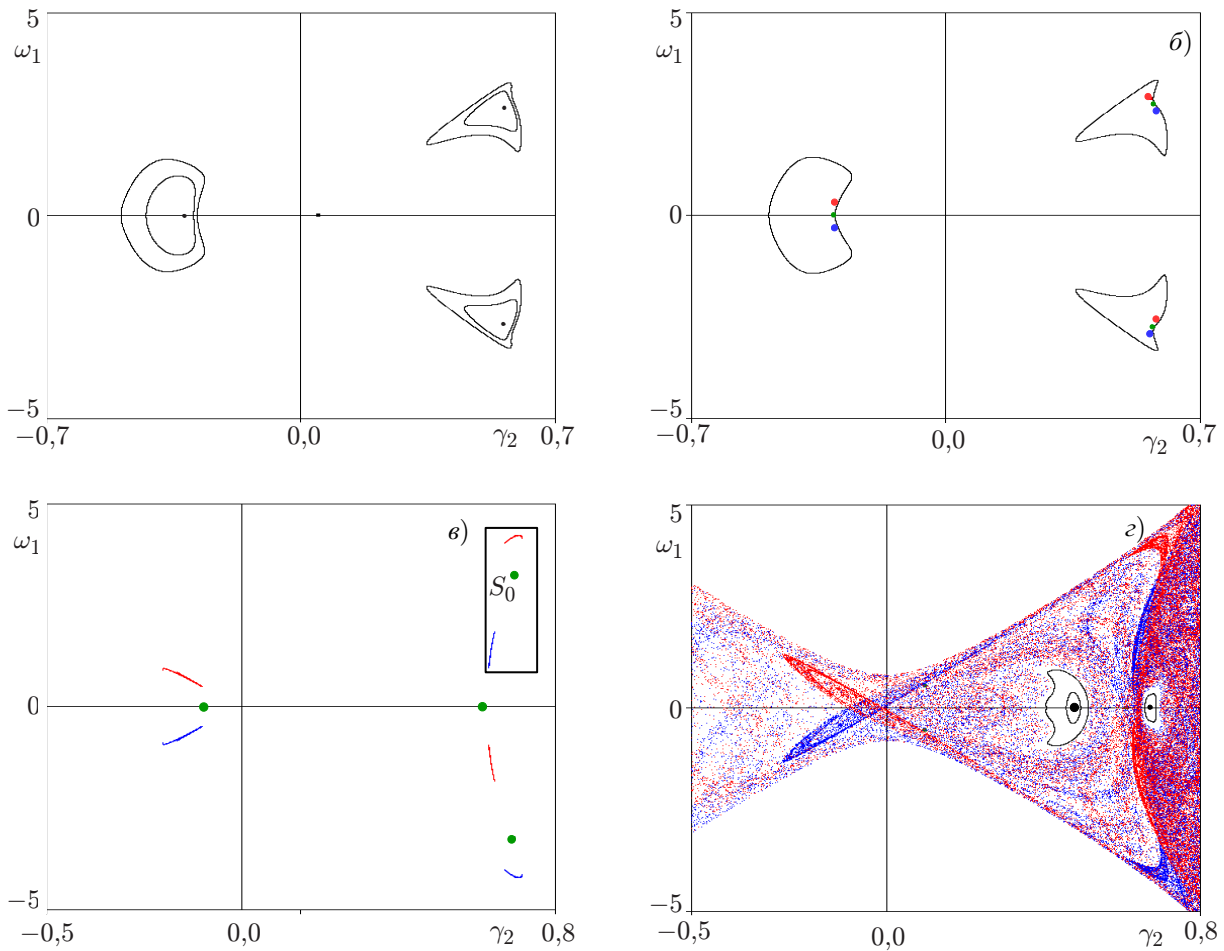


Рис. 5. Сценарий возникновения смешанной динамики в неголономной модели Суслова при $I_{23} = 0,7800$ (а); $0,7840$ (б); $0,9078$ (в) и $0,9080$ (з)

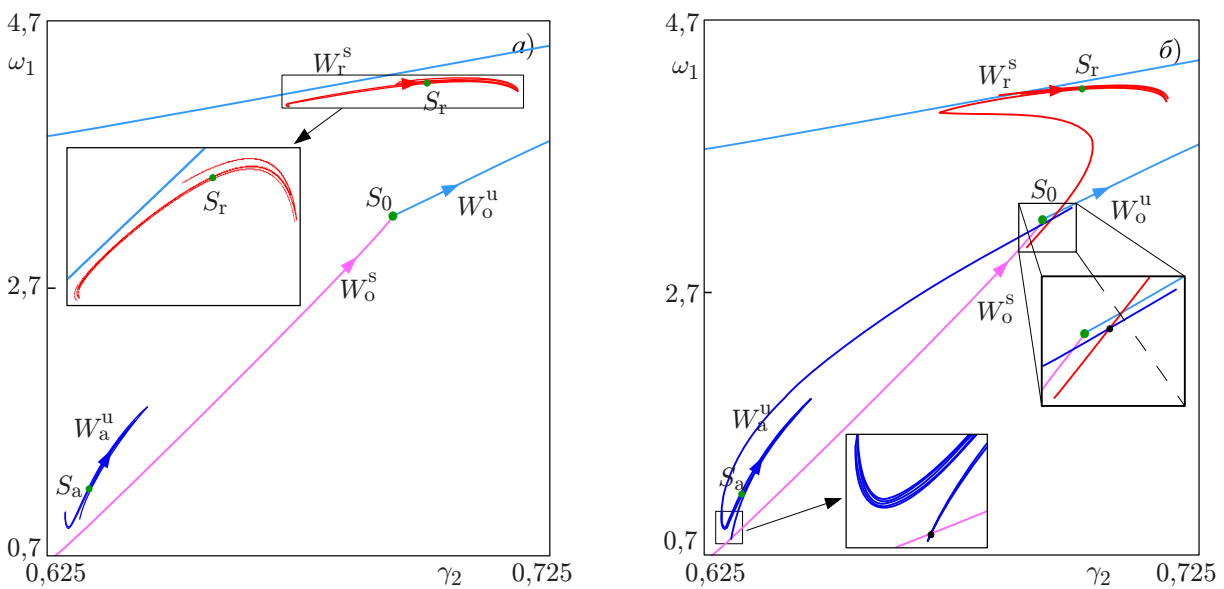


Рис. 6. Гомоклинические бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики, при $I_{23} = 0,9078$ (а) и $I_{23} = 0,9080$ (б)

секается трансверсально (не приведено на рисунке), то мгновенно возникает пересечение между сепаратрисами W_a^u и W_r^s (см. рис. 6б). Таким образом, аттрактор системы, возникающий после разрушения аттрактора Эно, пересекается с репеллером и образуется смешанная динамика, приведённая на рис. 5г.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый бифуркационный сценарий возникновения смешанной динамики взрывным образом. В рамках рассмотренного сценария отделившиеся друг от друга аттрактор и репеллер типа Эно претерпевают кризис, после которого странный аттрактор системы сразу же пересекается со странным репеллером.

Показано, что смешанная динамика в неголомомной модели волчка Суслова возникает в полном соответствии с предложенным сценарием. Более того, мы полагаем, что такой сценарий также будет наблюдаться и во многих других обратимых системах, демонстрирующих смешанную динамику.

Разделы 2 и 3 работы выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01041). Раздел 1 выполнен в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году, а также при поддержке РФФИ (проект 18–31–20052).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conley C. // CBMS Regional Conf. Series in Mathematics. V. 38. Providence, RI: American Mathematical Society, 1978. 89 p.
2. Ruelle D. // Communications in Mathematical Physics. 1981. V. 82, No. 1. P. 137.
3. Hurley M. // Transactions of the American Mathematical Society. 1982. V. 269, No. 1. P. 247.
4. Гонченко С.В., Тураев Д.В. // Тр. Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2017. Т. 297. С. 133.
5. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. // Тр. Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 1997. Т. 216. С. 76.
6. Lamb J. S. W., Stenkin O. V. // Nonlinearity. 2004. V. 17, No. 4. P. 1217.
7. Lerman L. M., Turaev D. // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17, No. 3–4. P. 318.
8. Politi A., Oppo G. L., Badii R. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33, No. 6. P. 4055.
9. Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. // Phys. Reports. 1992. V. 216, No. 2–3. P. 63.
10. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. V. 112, No. 1. P. 1.
11. Аносов Д. В., Бронштейн И. У. Гладкие динамические системы. Гл. 3. Топологическая динамика // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1985. Т. 1. С. 204.
12. Toraj D., Pikovsky A. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2002. V. 170, No. 2. P. 118.
13. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017. V. 350. P. 45.
14. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18, No. 5. P. 521.
15. Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18, No. 5. P. 508.
16. Kazakov A. // Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015 (DBC II): Extended Abstract of Intern. Conf. and School. N. Novgorod, 20–24 July 2015. P. 21.
17. Kuznetsov S. P. // Europhys. Lett. 2017. V. 118, No. 1. P. 10007.

18. Kuznetsov S. P. // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23, No. 2. P. 178.
19. Kazakov A. O. // arXiv:1801.00150 [math.DS]. 2017.
20. Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., et al. // Nonlinearity. 2012. V. 26, No. 1. P. 1.
21. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20, No. 5. P. 605.
22. Henon M. The theory of chaotic attractors. New York: Springer, 1976. 94 p.
23. Feigenbaum M. J. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 7, No. 1–3. P. 16.
24. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.
25. Вагнер В. В. // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. № 5. P. 301.
26. Козлов В. В. // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 3. С. 85.

Поступила в редакцию 31 мая 2018 г.; принята в печать 21 сентября 2018 г.

ON THE APPEARANCE OF MIXED DYNAMICS AS A RESULT OF COLLISION OF STRANGE ATTRACTORS AND REPELLERS IN REVERSIBLE SYSTEMS

A. O. Kazakov

In this work, we propose a scenario of appearance of mixed dynamics in reversible two-dimensional diffeomorphisms. A jump-like increase in the sizes of the strange attractor and repeller, which is due to the heteroclinic intersections of the invariant manifolds of the saddle points belonging to the attractor and repeller, is the scenario key feature. Such heteroclinic intersections emerge immediately after the strange-attractor and the strange-repeller collisions with the boundaries of their attraction and repulsion domains, respectively, after which the attractor and the repeller intersect. Then the dissipative chaotic dynamics related to the existence of the mutually separable strange attractor and repeller immediately becomes mixed when the attractor and repeller are theoretically inseparable. The possibility of realizing the proposed scenario is demonstrated using a well-known problem of the rigid-body dynamics, i.e., the nonholonomic model of Suslov's top.