

УДК 537.86+001.891.57+621.37

## ДВУХГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИКИ АНСАМБЛЕЙ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ ТИПА ОТТА–АНТОНСЕНА

*И. В. Тюлькина*<sup>1\*</sup>, *Д. С. Голдобин*<sup>1,2</sup>, *Л. С. Клименко*<sup>1,2</sup>, *А. С. Пиковский*<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Пермский государственный университет;

<sup>2</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия,

<sup>3</sup> Университет Потсдама, Германия

<sup>4</sup> Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Разработан метод получения замкнутых систем уравнений для динамики параметров порядка в ансамблях фазовых элементов. Уравнение Отта–Антонсена для комплексного параметра порядка является частным случаем таких уравнений. Обнаружено, что простейшее нетривиальное расширение уравнения Отта–Антонсена соответствует двухгрупповым состояниям ансамбля. На базе полученных уравнений исследуется динамика многогрупповых состояний-химер в связанных ансамблях Курамото–Сакагучи. Показывается повышение размерности динамики для двухгрупповых химер в случае идентичных систем и переход к одnogрупповым «химерам Абрамса» при неидеальной идентичности (в последнем случае одnogрупповые химеры становятся притягивающими).

### ВВЕДЕНИЕ

Динамика связанных автоколебательных систем представляет интерес для многих приложений в физике, биологии и технике [1, 2]. В случае слабой связи можно развить универсальный подход, основанный на фазовом приближении, в котором рассматривается только динамика фаз осцилляторов, а их амплитуды считаются алгебраически связанными с фазами. Знаменитая модель Курамото описывает систему фазовых осцилляторов, связанных через среднее поле, и позволяет аналитически рассмотреть переход к синхронизации. Для определённого класса фазовых систем в общем поле (см. более конкретное определение в следующем разделе, а также недавний обзор [2]) Ватанабэ и Строгац [3, 4] и Отт и Антонсен развили аналитические подходы, позволяющие получить замкнутые уравнения для комплексных параметров порядка фазовых ансамблей.

В теории Ватанабэ–Строгаца показывается частичная интегрируемость ансамблей идентичных элементов. В частности, в термодинамическом пределе бесконечного ансамбля можно ввести константы движения, распределение которых, определяемое начальными условиями, сохраняется в процессе эволюции. При произвольных распределениях этих констант законы движения довольно сложны, при этом в частном случае равномерного распределения они существенно упрощаются. Именно для этого достаточно простого случая было найдено решение в работе [5]. Как следует из сказанного выше, решение Отта–Антонсена, ввиду частичной интегрируемости по Ватанабэ–Строгацу, для идентичных ансамблей может быть только нейтрально устойчивым. В то же время, решение Отта–Антонсена, по-видимому, устойчиво при введении неидентичности. До сих пор, однако, отсутствовало описание ситуаций в окрестности решения Отта–Антонсена, которое позволяло бы проследить указанные свойства.

В данной работе мы предлагаем такое описание на базе так называемых круговых кумулянтов. Эти величины можно считать специальными комплексными параметрами порядка для фазовых ансамблей. Для решения Отта–Антонсена только первый кумулянт не равен нулю. Мы покажем

---

\* irinatiulkina95@gmail.com

существование другого инвариантного решения, которое можно полностью задать первым и вторым кумулянтom, и проанализируем, как в рамках этого подхода можно описать приближение решения к многообразию Отта—Антонсена в случае неидентичных ансамблей.

Статья состоит из пяти разделов. В разделе 1 приводятся существенные для данной работы элементы теории Отта—Антонсена; в разделе 2 вводится формализм круговых кумулянтов и общие уравнения динамики в терминах кумулянтов; в разделе 3 показана возможность получить более общее решение, чем решение Отта—Антонсена, и установлена двухгрупповая природа нового решения; в разделе 4 полученные результаты используются для исследования многогрупповых состояний-химер в системе Абрамса [7]; заключительные выводы приведены в разделе 5.

## 1. ТЕОРИЯ ОТТА—АНТОНСЕНА ДЛЯ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

В этом разделе мы изложим необходимые для дальнейшего элементы теории Отта—Антонсена для фазовых осцилляторов. Она применима к системам идентичных элементов, описываемым уравнениями

$$\dot{\varphi}_k = \omega(t) + \text{Im}[2h(t) \exp(-i\varphi_k)], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $\omega(t)$  и  $h(t)$  — произвольные действительная и комплексная функции времени соответственно, точкой обозначена производная по времени. Теория справедлива в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ , где естественно описывать эволюцию системы в терминах плотности вероятности распределения фаз  $w(\varphi, t)$ . В этих терминах система обладает свойствами интегрируемости Ватанабе—Строгаца, однако эти свойства непросто описать в терминах плотности  $w(\varphi, t)$  или в терминах комплексных мод  $a_n(t)$ , где  $a_n(t)$  — коэффициенты фурье-разложения

$$w(\varphi, t) = (2\pi)^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \exp(-in\varphi) + a_n^*(t) \exp(in\varphi)] \right\}.$$

Здесь \* обозначает комплексное сопряжение. Следующее из динамического уравнения (1) уравнение для  $w(\varphi, t)$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ [\omega(t) - ih(t) \exp(-i\varphi) + ih^*(t) \exp(i\varphi)] w \right\} = 0,$$

в фурье-пространстве принимает вид бесконечной системы

$$\dot{a}_n = in\omega a_n + n h a_{n-1} - n h^* a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где следует полагать  $a_0 = 1$ . Отт и Антонсен заметили, что цепь уравнений (2) допускает решение вида  $a_n(t) = [a_1(t)]^n$ , для которого можно получить замкнутое уравнение динамики:

$$\dot{a}_1 = i\omega a_1 + h - h^* a_1^2. \quad (3)$$

При этом переменная  $a_1 = \langle \exp(i\varphi_k) \rangle$  является параметром порядка системы (угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю). Множество решений, для которых  $a_n = (a_1)^n$ , называют многообразием Отта—Антонсена [5]. Ему соответствует распределение плотности вероятности вполне определённого вида, который можно найти, подставляя  $a_n = a_1^n$  в фурье-разложение  $w(\varphi)$ :

$$w_{\text{OA}}(\varphi) = \frac{1 - |a_1|^2}{2\pi |1 - a_1 \exp(-i\varphi)|^2}.$$

В переменных Ватанабэ—Строгаца данное многообразие соответствует равномерному распределению констант в преобразовании Мёбиуса, лежащем в основе теории Ватанабэ—Строгаца [4]. Отметим, что и иные распределения констант остаются инвариантными, но их непросто выразить через моды  $a_n$ . Из теории Ватанабэ—Строгаца следует нейтральная устойчивость многообразия Отта—Антонсена. Однако в реалистичных ситуациях неидеальной идентичности, т.е. разброса собственных частот, оно становится притягивающим [5, 6], что и определяет важность данного частного решения  $a_n = (a_1)^n$  и оправдывает в ряде задач сведение описания к уравнению динамики типа (3) [5, 7–11].

Распространение теории Отта—Антонсена на случай ансамбля осцилляторов с неидентичными собственными частотами  $\omega$  проводится следующим образом. Осцилляторы могут быть сгруппированы по собственным частотам, и уравнения (2) следует записывать для каждой группы осцилляторов с одинаковыми частотами  $\omega$ :

$$\dot{a}_{\omega,n} = in\omega a_{\omega,n} + n h a_{\omega,n-1} - n h^* a_{\omega,n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Распределение для полного ансамбля  $w(\varphi, t) = \int w_\omega(\varphi, t) g(\omega) d\omega$ , где  $g(\omega)$  — распределение частот  $\omega$ , и, соответственно,  $a_n = \int a_{\omega,n} g(\omega) d\omega$ . Если предположить, что в какой-то момент времени  $a_{\omega,n}$  являются гладкими функциями  $\omega$ , аналитическими в верхней полуплоскости комплексного  $\omega$ , то описываемые уравнениями (4) приращения  $da_{\omega,n}$  также будут аналитическими функциями  $\omega$  в верхней полуплоскости, и аналитичность  $a_{\omega,n}$  будет сохраняться. В случае аналитичности  $a_{\omega,n}$  интегралы  $\int a_{\omega,n} g(\omega) d\omega$  для некоторых конкретных распределений  $g(\omega)$  могут быть вычислены методами теории вычетов. В частности, для лоренцевского распределения частот со средней частотой  $\Omega$  и полушириной  $\gamma$ , определяемого выражением

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi[(\omega - \Omega)^2 + \gamma^2]},$$

замыкая контур через верхнюю комплексную полуплоскость, можно вычислить

$$a_n = \int a_{\omega,n} g(\omega) d\omega = a_{\Omega+i\gamma,n}$$

и использовать уравнение (4) для комплексного  $\omega = \Omega + i\gamma$ :

$$\dot{a}_n = n(i\Omega - \gamma)a_n + n h a_{n-1} - n h^* a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Далее будем работать с этой системой уравнений, имея в виду, что случай идентичных частот соответствует  $\gamma = 0$ .

## 2. КРУГОВЫЕ КУМУЛЯНТЫ

Описание динамики системы в окрестности множества Отта—Антонсена в терминах  $a_n$  оказывается проблематичным для состояний с высокой степенью синхронности, когда  $|a_1|$  близко к 1 и ряд  $a_n \approx (a_1)^n$  обладает медленной сходимостью. В связи с этим может оказаться продуктивным переход от рассмотрения моментов  $a_n = \langle [\exp(i\varphi)]^n \rangle$  к формально соответствующим им кумулянтам

$$K_1 = a_1, \quad K_2 = a_2 - a_1^2, \quad K_3 = a_3 - 3a_2 a_1 + 2a_1^3, \quad \dots$$

Строгая связь между величинами  $a_n$  и  $K_n$  определяется посредством генерирующих функций:

$$F(\zeta) \equiv \langle \exp[\zeta \exp(i\varphi)] \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\zeta^n}{n!}, \quad \Phi(\zeta) \equiv \ln[F(\zeta)] \equiv \sum_{m=1}^{\infty} K_m \frac{\zeta^m}{m!}. \tag{6}$$

В терминах  $K_n$  уравнения (2) принимают вид

$$\dot{K}_n = n(i\Omega - \gamma)K_n + h\delta_{1n} - nh^* \left[ K_{n+1} + \sum_{m=1}^n \frac{(n-1)!}{(m-1)!(m-n)!} K_{n-m+1} K_m \right],$$

где при  $n = 1$  имеем  $\delta_{1n} = 1$ , а при  $n \neq 1$  величина  $\delta_{1n} = 0$ . Строгий вывод уравнений для  $K_n$  из уравнений (2) представлен в [12], а в данной работе будем полагаться на него как на факт, достоверность которого может быть проверена для первых нескольких  $n$  с использованием явных соотношений между  $a_n$  и  $K_n$ . Для  $\varkappa_n \equiv K_n/(n-1)!$  уравнения динамики несколько упрощаются:

$$\dot{\varkappa}_n = n(i\Omega - \gamma)\varkappa_n + h\delta_{1n} - nh^* \left( n\varkappa_{n+1} + \sum_{m=1}^n \varkappa_{n-m+1} \varkappa_m \right). \quad (7)$$

Как следует из последнего уравнения, динамика  $\varkappa_n$  определяется значениями  $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{n+1}$ , и  $\varkappa_{n+1}$  входит в (7) через слагаемое  $-n^2 h^* \varkappa_{n+1}$ . Таким образом, в общем случае выделить замкнутую систему конечного числа уравнений не представляется возможным.

Далее величины  $\varkappa_n$  будем называть круговыми кумулянтами. Поскольку  $a_n$  являются не моментами фазы, а моментами величины  $\exp(i\varphi)$ ,  $K_n$  не являются подлинными кумулянтами распределения фазы, с чем и связан допустимый произвол в выборе (между переменными  $K_n$  и  $\varkappa_n$ ) круговых кумулянтов.

### 3. ДВУХГРУППОВОЕ ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

#### 3.1. Расширение многообразия Отта—Антонсена

В терминах круговых кумулянтов решение Отта—Антонсена ( $a_n = (a_1)^n$ ) принимает очень простой вид:

$$\varkappa_1 = a_1, \quad \varkappa_{n \geq 2} = 0. \quad (8)$$

Данное обстоятельство служит существенным аргументом в пользу кумулянтного представления: во-первых, оказывается, что старшие кумулянты описывают отклонение от многообразия Отта—Антонсена, и, во-вторых, появляется возможность обойти проблему медленной сходимости ряда  $a_n$  при  $|a_1| \rightarrow 1$ .

Для решения (8) из цепочки уравнений (7) остаётся только первое уравнение, которое совпадает с уравнением (3), а все последующие уравнения удовлетворены тождественно. Однако возможны и более широкие частные случаи, позволяющие получить замкнутые уравнения вместо бесконечной системы (7). В общем случае, если старшие кумулянты не равны нулю, уравнение для  $n = 1$  имеет вид

$$\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h - h^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2). \quad (9)$$

В типичных задачах  $h = h(\varkappa_1, t)$  и отклонение динамики параметра порядка  $\varkappa_1$  от решения Отта—Антонсена требует ненулевого значения  $\varkappa_2$ . Поэтому представляют интерес частные решения с  $\varkappa_2 \neq 0$ . Система уравнений (7) замыкается, если для некоторых существенных кумулянтов  $\varkappa_n$  будут обращаться в ноль кумулянты  $\varkappa_{n+1}$ . При  $\varkappa_2 \neq 0$  простейшим вариантом для рассмотрения являются решения, для которых равны нулю все нечётные  $\varkappa_n$ , кроме первого.

Рассмотрим случай  $\varkappa_{2j+1} = 0$ , где  $j = 1, 2, \dots$ . Для  $n = 1$  имеем уравнение (9). Для  $n = 2j + 1$  уравнения (7) дают

$$0 = -nh^* [n\varkappa_{n+1} + (\varkappa_n \varkappa_1 + \varkappa_{n-1} \varkappa_2 + \dots + \varkappa_1 \varkappa_n)],$$

или

$$0 = (2j + 1) \varkappa_{2j+2} + \varkappa_{2j} \varkappa_2 + \varkappa_{2j-2} \varkappa_4 + \dots + \varkappa_2 \varkappa_{2j}. \quad (10)$$

Для  $n = 2j$ :

$$\dot{\varkappa}_n = n(i\Omega - \gamma) \varkappa_n - nh^*(\varkappa_n \varkappa_1 + \varkappa_{n-1} \varkappa_2 + \varkappa_{n-2} \varkappa_3 + \dots + \varkappa_1 \varkappa_n),$$

или

$$\dot{\varkappa}_{2j} = 2j(i\Omega - \gamma - 2h^* \varkappa_1) \varkappa_{2j}. \quad (11)$$

Из последнего уравнения можно видеть, что динамика всех чётных круговых кумулянтов подобна динамике второго: для некоторого решения  $\varkappa_2(t)$  имеем

$$\varkappa_{2j}(t) = C_j [\varkappa_2(t)]^j. \quad (12)$$

Здесь  $C_j$  — константы интегрирования, задаваемые начальными условиями; по определению,  $C_1 = 1$ . Вместе с тем, следует помнить, что уравнения (11) справедливы только при выполнении соотношений (10), которые являются условием того, что нечётные кумулянты старше первого остаются нулевыми. Решение (12) удовлетворяет соотношению (10) при надлежащем выборе констант  $C_j$ : уравнение (10) может быть переписано в виде рекуррентного соотношения

$$C_{j+1} = -\frac{1}{2j+1} \sum_{m=1}^j C_m C_{j+1-m}, \quad (13)$$

которое выражает  $C_{j+1}$  через  $C_1, C_2, \dots, C_j$  и при фиксированном  $C_1 = 1$  даёт однозначно определённый набор коэффициентов  $\{C_j\} = \{1, -1/3, 2/15, -17/315, \dots\}$ .

Таким образом, в системе можно выделить инвариантное многообразие

$$\varkappa_{2j-1} = \varkappa_1 \delta_{1j}, \quad \varkappa_{2j} = C_j \varkappa_2^j, \quad (14)$$

являющееся расширением многообразия Отта—Антонсена (оно соответствует  $\varkappa_2 = 0$ ). Динамика системы на этом многообразии определяется замкнутой системой двух комплексных уравнений

$$\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma) \varkappa_1 + h - h^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2), \quad (15)$$

$$\dot{\varkappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma - 2h^* \varkappa_1) \varkappa_2. \quad (16)$$

Если  $h$  зависит не только от первых кумулянтов  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ , то система остаётся замкнутой, поскольку на этом множестве старшие кумулянты выражаются через второй (либо равны нулю).

### 3.2. Двухгрупповой характер состояний вида (14)

Покажем, что построенное инвариантное многообразие можно интерпретировать как двухгрупповое состояние: многообразие состоит из двух подансамблей, в каждом из которых распределение осцилляторов соответствует решению Отта—Антонсена. Вычислим для такого состояния кумулянты  $\varkappa_n$ . Для каждого подансамбля имеем параметр порядка  $\varkappa_1^{\{p\}}$  и нулевые старшие круговые кумулянты  $\varkappa_{n \geq 2}^{\{p\}}$ , где  $p = 1, 2$  — номер подансамбля. Распределение осцилляторов в полном ансамбле является суперпозицией распределений в подансамблях:  $w(\varphi, t) = q_1 w_1(\varphi, t) + q_2 w_2(\varphi, t)$ , где  $q_p$  — доля элементов в подансамбле  $p$ . В силу линейности связи между генерирующей функцией моментов  $F(\zeta)$  и распределением  $w(\varphi)$ , можно получить  $F(\zeta) = q_1 F_1(\zeta) + q_2 F_2(\zeta) = q_1 \exp[\Phi_1(\zeta)] + q_2 \exp[\Phi_2(\zeta)]$  (см. уравнения (6)). Поскольку для решения

Отта—Антонсена генерирующая функция кумулянтов имеет вид  $\Phi_p(\zeta) = \varkappa_1^{\{p\}} \zeta$ , окончательно находим

$$\Phi(\zeta) = \ln \left[ q_1 \exp(\varkappa_1^{\{1\}} \zeta) + q_2 \exp(\varkappa_1^{\{2\}} \zeta) \right].$$

Разложение последнего выражения в ряд Тейлора даёт величины  $K_n$  и  $\varkappa_n$ . В случае равного распределения элементов между группами  $q_1 = q_2 = 1/2$ , вычисления показывают, что все нечётные кумулянты выше первого равны нулю, а для чётных имеет место соотношение (12); при этом

$$\varkappa_1 = (\varkappa_1^{\{1\}} + \varkappa_1^{\{2\}})/2, \quad \varkappa_{2j} = C_j \left[ (\varkappa_1^{\{1\}} - \varkappa_1^{\{2\}})^2 / 4 \right]^j. \quad (17)$$

При неравном распределении между группами разложение имеет гораздо более сложный вид и нечётные кумулянты отличны от нуля.

Таким образом, состояния с равным распределением элементов между двумя группами вида, соответствующего решению Отта—Антонсена, отвечают найденному инвариантному многообразию. Поскольку полный набор кумулянтов однозначно определяет распределение плотности вероятности, то найденное соответствие между двухгрупповыми состояниями и частными решениями вида (14) является взаимнооднозначным. Само решение Отта—Антонсена является частным случаем совпадения групп:  $\varkappa_1^{\{1\}} = \varkappa_1^{\{2\}}$ .

#### 4. ДИНАМИКА МНОГОГРУППОВЫХ «ХИМЕР» В СВЯЗАННЫХ АНСАМБЛЯХ КУРАМОТО—САКАГУЧИ

Рассмотрим в качестве примера динамику двух симметричных связанных ансамблей осцилляторов Курамото—Сакагучи (обобщение модели Курамото):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \varphi_k - \alpha), \\ \dot{\psi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \psi_k - \alpha). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\varphi$  and  $\psi$  — фазы в ансамблях, имеющих размер  $N$ ,  $\mu$  и  $\nu = 1 - \mu$  — параметры связи внутри ансамбля и с другим ансамблем соответственно,  $\alpha$  — фазовый сдвиг связи (при  $\cos \alpha > 0$  связь является притягивающей, при  $\cos \alpha < 0$  — отталкивающей, при  $\cos \alpha = 0$  — консервативной; для модели Курамото  $\alpha = 0$ ). В работе [7] динамика этой системы была исследована для случая идентичных частот  $\omega_k = \Omega$  в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Были найдены состояния-химеры, в которых первый ансамбль оказывается полностью синхронизирован, а осцилляторы второго ансамбля формируют группу, ширина которой периодически меняется со временем (см. рис. 1а). Данная группа отвечает решению Отта—Антонсена, и на соответствующем многообразии описанный режим является притягивающим. Впоследствии в [13] было замечено, что данный режим должен быть не единственным притягивающим режимом, поскольку при идентичных частотах многообразие Отта—Антонсена, на котором задавались начальные условия, не является трансверсально притягивающим. В частности, было продемонстрировано, что если начальное состояние системы задавать отличным от распределения Отта—Антонсена, то система не переходит в режимы, представленные в работе [7], а динамика параметров порядка имеет более высокую размерность вложения (см. рис. 1б).

Воспользуемся результатом (15) и (16) для аналитического исследования динамики системы (18) вне многообразия Отта—Антонсена и установления влияния расстройки собственных

частот  $\gamma$  на коллективную динамику системы. Для упрощения записи уравнений будем сразу предполагать, что первый ансамбль (фазы  $\varphi$ ) представляет из себя одну группу с первым кумулянтном  $\kappa$ , а первый и второй кумулянтны в ансамбле фаз  $\psi$ , состоящем из двух групп, обозначим  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ .

На основе уравнений (15) и (16) для системы (18) можно записать:

$$\dot{\kappa} = (i\Omega - \gamma)\kappa + h_1 - h_1^*\kappa^2; \quad (19)$$

$$\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h_2 - h_2^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2); \quad (20)$$

$$\dot{\varkappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma - 2h_2^*\varkappa_1)\varkappa_2, \quad (21)$$

где  $h_1 = (\mu\kappa + \nu\varkappa_1)\exp(-i\alpha)/2$ ,  $h_2 = (\mu\varkappa_1 + \nu\kappa)\exp(-i\alpha)/2$ .

#### 4.1. Устойчивость одногруппового режима по отношению к возбуждению второй группы

Рассмотрим устойчивость второго ансамбля к возбуждению  $\varkappa_2$ , т. е. поведение системы (20) и (21) при малом  $\varkappa_2$ . Уравнение (21) даёт

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} \ln \varkappa_2\right) = -2\gamma - 2\left\{\mu|\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}[\kappa^* \varkappa_1 \exp(i\alpha)]\right\}. \quad (22)$$

Из уравнения (20) при  $|\varkappa_2| \ll |\varkappa_1|$  можно получить

$$\frac{d}{dt} |\varkappa_1|^2 = -2\gamma |\varkappa_1|^2 + (1 - |\varkappa_1|^2) \left\{ \mu |\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}[\kappa^* \varkappa_1 \exp(i\alpha)] \right\}. \quad (23)$$

Для анализа свойств устойчивости, описываемых уравнением (22), удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2} = -\frac{2\gamma |\varkappa_1|^2}{1 - |\varkappa_1|^2} + \left\{ \mu |\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}[\kappa^* \varkappa_1 \exp(i\alpha)] \right\}.$$

Сравнивая правые части этого уравнения и уравнения (22) и выполняя усреднение по времени, можно получить, что

$$\overline{\operatorname{Re} \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2} = -2\gamma \overline{\frac{1 + |\varkappa_1|^2}{1 - |\varkappa_1|^2}} - 2 \overline{\frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2}}, \quad (24)$$

где черта сверху обозначает усреднение по времени. Величина  $\overline{\operatorname{Re} \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2}$  определяет инкремент  $|\varkappa_2|$  и, таким образом, характеризует устойчивость системы к возмущениям, уводящим её от многообразия Отта–Антонсена.

Из уравнения (24) можно видеть, что на многообразии Отта–Антонсена возможны два типа траекторий, для которых свойства устойчивости к возбуждению  $\varkappa_2$  могут отличаться: ограниченная траектория с неидеальной синхронностью ( $|\varkappa_1| < 1$ ) и траектории, для которых  $|\varkappa_1| \rightarrow 1$ . В первом случае второе слагаемое в правой части уравнений (24) равно нулю и устойчивость определяется первым слагаемым, в котором выражение при  $\gamma$  знакоопределено. При  $\gamma = 0$  отклонения от множества Отта–Антонсена не затухают со временем, при  $\gamma \neq 0$  они начинают затухать. Во втором случае, при  $|\varkappa_1| \rightarrow 1$ , аргумент логарифма  $(1 - |\varkappa_1|^2)^{-1}$  стремится к  $+\infty$  и

$$\overline{\frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2}} > 0.$$

Таким образом, при переходе к полной синхронизации траектории сходятся к многообразию Отта—Антонсена:  $\varkappa_2$  затухает независимо от наличия расстройки частот  $\gamma$ . При расстройке частот ( $\gamma \neq 0$ ), состояние полной синхронизации становится невозможным, что следует из уравнения (23), которое допускает решение  $|\varkappa_1| = 1$  только при  $\gamma = 0$ . Усредняя уравнение (23) по времени, можно видеть, что при малом  $\gamma$  режим с  $|\varkappa_1| = 1$  сменяется некоторым новым режимом, для которого  $1 - |\varkappa_1|^2 \approx \gamma$ . Таким образом, устойчивость «наследника» состояния полной синхронизации является высокой даже при малом  $\gamma$ , поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2 \approx -\frac{\gamma}{1 - |\varkappa_1|^2} \approx -1.$$

#### 4.2. Динамика двухгрупповых химер

Проведём детальное описание динамики двухгрупповых химер в рассматриваемой системе (19)–(21). Как уже отмечалось, для первого ансамбля второй кумулянт затухает либо из-за полной синхронизации, либо из-за влияния  $\gamma$ . Скорость этого затухания порядка 1 даже при  $\gamma \rightarrow 0$ , поэтому имеет смысл ограничиться случаем, когда не равен нулю только первый кумулянт. Поскольку уравнения (19)–(21) обладают симметрией относительно поворотов комплексных амплитуд  $\kappa \rightarrow \kappa \exp(i\beta)$ ,  $\varkappa_n \rightarrow \varkappa_n \exp(in\beta)$ , нетривиальная часть динамики связана не с полными фазами кумулянтов, а с их разностями. Введём для ансамбля 1 переменные  $\rho \equiv |\kappa|$  и  $\xi \equiv \kappa/|\kappa|$ :  $\kappa = \rho\xi$ . Динамику ансамбля 2 будем описывать в системе отсчёта, вращающейся вместе с  $\kappa$ , в терминах переменных  $\chi_1 = \varkappa_1 \xi^*$  и  $\chi_2 = \varkappa_2 (\xi^*)^2$ . Тогда из системы (19)–(21) можно получить, что

$$\dot{\rho} = -\gamma\rho + \frac{1 - \rho^2}{2} \{ \mu\rho \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \}; \quad (25)$$

$$\dot{\xi} = i \left( \Omega - \frac{1 + \rho^2}{2\rho} \{ \mu\rho \sin \alpha + \nu \operatorname{Im}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \} \right) \xi; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 = & -\gamma\chi_1 + \frac{\mu}{2} \left[ \chi_1 \exp(-i\alpha) - \chi_1^* \exp(i\alpha)(\chi_1^2 + \chi_2) + i(1 + \rho^2)\chi_1 \sin \alpha \right] + \\ & + \frac{\nu}{2} \left\{ \rho \exp(-i\alpha) - \rho \exp(i\alpha)(\chi_1^2 + \chi_2) + i \frac{1 + \rho^2}{\rho} \chi_1 \operatorname{Im}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \right\}; \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2 = & 2 \left( -\gamma + \mu \left[ -|\chi_1|^2 \exp(i\alpha) + i \frac{1 + \rho^2}{2} \sin \alpha \right] + \right. \\ & \left. + \nu \left\{ -\rho\chi_1 \exp(i\alpha) + i \frac{1 + \rho^2}{2\rho} \operatorname{Im}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \right\} \right) \chi_2. \quad (28) \end{aligned}$$

При  $\gamma = 0$  первый ансамбль может быть полностью синхронизованным ( $\rho = 1$ ) и тогда уравнения (27) и (28) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 = & \mu \left[ \frac{\chi_1 \exp(-i\alpha) - \chi_1 |\chi_1|^2 \exp(i\alpha) - \chi_1^* \chi_2 \exp(i\alpha)}{2} + i\chi_1 \sin \alpha \right] + \\ & + \nu \left\{ \frac{\exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha)(\chi_1^2 + \chi_2)}{2} + i\chi_1 \operatorname{Im}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\dot{\chi}_2 = 2 \left( \mu \left[ -|\chi_1|^2 \exp(i\alpha) + i \sin \alpha \right] + \nu \left\{ -\chi_1 \exp(i\alpha) + i \operatorname{Im}[\chi_1 \exp(-i\alpha)] \right\} \right) \chi_2. \quad (30)$$

Система уравнений (29) и (30) задаёт автономную динамическую систему в четырёхмерном фазовом пространстве. Как было показано, при  $\gamma = 0$  малые значения кумулянта  $\chi_2$  в среднем по



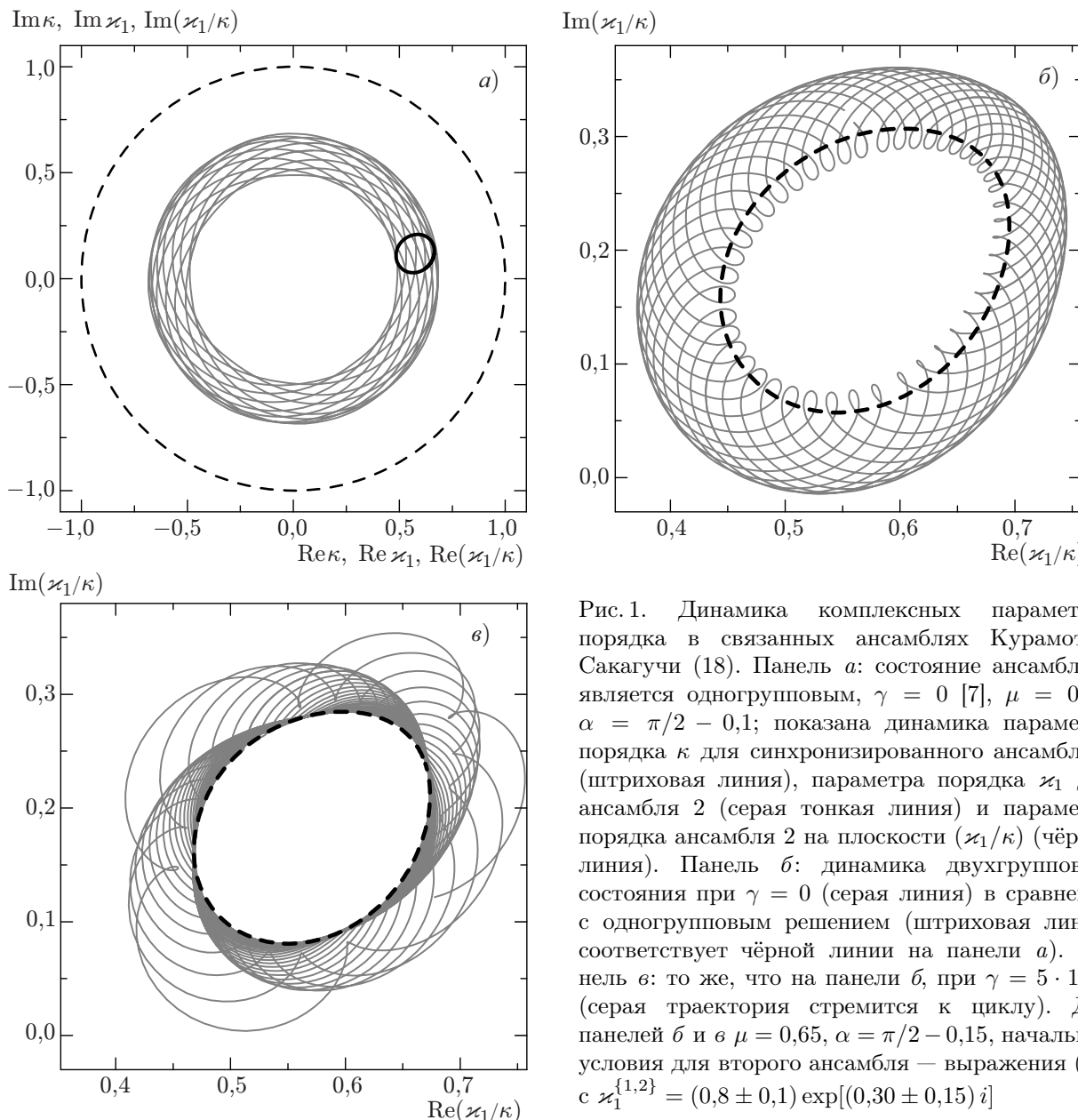


Рис. 1. Динамика комплексных параметров порядка в связанных ансамблях Курамото—Сакагучи (18). Панель а: состояние ансамбля 2 является одногрупповым,  $\gamma = 0$  [7],  $\mu = 0,64$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0,1$ ; показана динамика параметра порядка  $\kappa$  для синхронизированного ансамбля 1 (штриховая линия), параметра порядка  $\chi_1$  для ансамбля 2 (серая тонкая линия) и параметра порядка ансамбля 2 на плоскости  $(\chi_1/\kappa)$  (чёрная линия). Панель б: динамика двухгруппового состояния при  $\gamma = 0$  (серая линия) в сравнении с одногрупповым решением (штриховая линия, соответствует чёрной линии на панели а). Панель в: то же, что на панели б, при  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$  (серая траектория стремится к циклу). Для панелей б и в  $\mu = 0,65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0,15$ , начальные условия для второго ансамбля — выражения (17) с  $\chi_1^{\{1,2\}} = (0,8 \pm 0,1) \exp[(0,30 \pm 0,15) i]$

времени не затухают и не нарастают (в рамках линейной теории). Таким образом, при тех значениях параметров, где одногрупповая динамика демонстрировала стремление к устойчивому предельному циклу на плоскости  $\chi_1$ , для двухгрупповых состояний будет наблюдаться притяжение к семейству торов, параметризуемых характерной амплитудой колебаний  $\chi_2$  (качественно,  $|\chi_2|$  определяет «толщину» тора, см. рис. 1б).

В соответствии с полученными аналитическими результатами, в численном счёте наблюдается квазипериодическая динамика на плоскости  $(\chi_1/\kappa)$  при  $\gamma = 0$  (рис. 1б) и притяжение траекторий к предельному циклу, соответствующему одногрупповым состояниям, при  $\gamma \neq 0$  (рис. 1в).

В итоге, на основании уравнений (20) и (21) оказывается возможным явное аналитическое описание динамики системы за пределами многообразия Отта—Антонсена и аналитическое доказательство того, что в важной парадигматической задаче [7] это многообразие является ней-

трально устойчивым (т. е. становится притягивающим только при введении расстройки частот  $\gamma$ ). Численные расчёты в рамках кумулянтного представления позволяют избежать проблем с медленной сходимостью ряда  $a_n$  при  $|a_1| \rightarrow 1$ : численное интегрирование с несколькими первыми кумулянтами обеспечивает тот же уровень точности, что аналогичное интегрирование уравнения (2) с сотнями гармоник  $a_n$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана возможность и перспективность использования формализма круговых кумулянтов для альтернативного описания динамики ансамблей фазовых элементов в термодинамическом пределе (т. е. для большого размера ансамбля). Для систем типа Отта—Антонсена данный формализм позволяет получать точные уравнения для динамики параметров порядка. Найдено более общее частное решение, чем решение Отта—Антонсена; новое решение позволяет описывать динамику двухгрупповых состояний ансамбля в конечной окрестности решения Отта—Антонсена, являющегося одногрупповым. В «задаче Абрамса» [7, 13] это решение позволяет наблюдать консервативную динамику многогрупповых состояний для ансамблей идентичных элементов и описывать переход многогрупповых состояний к одногрупповым, которые становятся притягивающими при неидеальной идентичности.

Результаты, представленные в разделах 2 и 3, получены А. Пиковским при поддержке Российского научного фонда (грант 14–12–00811). Результаты, представленные в разделах 1 и 4, получены при поддержке грантов Президента Российской Федерации МК-1447.2017.5 и G-RICS M-2017b-5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., et al. // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77, No. 1. P. 137.
2. Pikovsky A., Rosenblum M. // *Chaos*. 2015. V. 25, No. 9. Art. no. 097616.
3. Watanabe S., Strogatz S. H. // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70, No. 6. P. 2391.
4. Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. // *Chaos*. 2009. V. 19, No. 4. Art. no. 043104.
5. Ott E., Antonsen T. M. // *Chaos*. 2008. V. 18, No. 3. Art. no. 037113.
6. Pietras B., Daffertshofer A. // *Chaos*. 2016. V. 26, No. 10. Art. no. 103101.
7. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101, No. 8. Art. no. 084103.
8. Braun W., Pikovsky A., Matias M. A., Colet P. // *Europhysics Lett.* 2012. V. 99, No. 2. Art. no. 20006.
9. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Rosenblum M., Pikovsky A. // *Scientific Reports*. 2016. V. 6. Art. no. 38518.
10. Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A. // *Phys. Rev. E*. 2017. V. 96, No. 6. Art. no. 062204.
11. Голдобин Д. С., Долматова А. В., Розенблум М., Пиковский А. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2017. Т. 25, № 6. С. 5.
12. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 120, No. 26. Art. no. 264101.
13. Pikovsky A., Rosenblum M. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101, No. 26. Art. no. 264103.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.; принята в печать 21 сентября 2018 г.

**TWO-BUNCH SOLUTIONS FOR THE DYNAMICS OF OTT–ANTONSEN  
PHASE ENSEMBLES**

*I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, L. S. Klimenko, and A. S. Pikovsky*

We have developed a method for deriving systems of closed equations for the dynamics of order parameters in the ensembles of phase oscillators. The Ott–Antonsen equation for the complex order parameter is a particular case of such equations. The simplest nontrivial extension of the Ott–Antonsen equation corresponds to two-bunch states of the ensemble. Based on the equations obtained, we study the dynamics of multi-bunch chimera states in coupled Kuramoto–Sakaguchi ensembles. We show an increase in the dimensionality of the system dynamics for two-bunch chimeras in the case of identical phase elements and a transition to one-bunch “Abrams chimeras” for imperfect identity (in the latter case, the one-bunch chimeras become attractive).