УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А. А. Кащенко, *С. А. Кащенко*

Ярославский госуниверситет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Россия

Рассматривается динамическая система, состоящая из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью. Модели такого типа встречаются в прикладных задачах радиофизики и оптики. Предполагается, что нелинейная функция, отвечающая за обратную связь, является финитной и содержит большой параметр. Это открывает возможность применения специального аналитического метода исследования релаксационных колебаний. Показано, что при асимптотически слабой связи между двумя такими генераторами их динамика описывается специальным конечномерным отображением и может быть довольно сложной.

ВВЕДЕНИЕ

Генератор с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка описывается следующей математической моделью [1–3]:

$$\nu\dot{u} + u = \tilde{F}[u(t-\tau)].$$

Здесь u — сигнал, точкой обозначена производная по времени, $\nu > 0$ — постоянная времени RC-фильтра, а запаздывающая обратная связь определяется параметром запаздывания в линии задержки $\tau > 0$ и нелинейностью $\tilde{F}(u)$. Мы предполагаем, что нелинейная функция $\tilde{F}(u)$ является ограниченной, кусочно-гладкой и финитной, т. е. для некоторого положительного числа p выполняется

$$\tilde{F}(u) = \begin{cases} f(u), & |u| < p; \\ 0, & |u| \geq p. \end{cases}$$

Такие генераторы могут применяться при изготовлении усилителей класса D и гидролокаторов, а также для управления ультразвуковой сваркой [2]. Также динамика таких генераторов представляет общенаучный интерес [3–6].

Заметим, что с помощью замены времени данную модель можно привести к виду

$$\dot{u} + u = \lambda F[u(t-T)]. \tag{1}$$

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из двух связанных генераторов вида (1):

$$\begin{aligned} \dot{u_1} + u_1 &= \lambda F[u_1(t-T)] + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u_2} + u_2 &= \lambda F[u_2(t-T)] + \gamma(u_1 - u_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Динамические свойства системы (2) существенно зависят от соотношения между параметрами λ и γ. В работах [7–10] данная модель исследовалась при различных соотношениях между этими параметрами: были найдены её устойчивые релаксационные периодические решения и доказано наличие в ней мультистабильности.

* sa-ahr@yandex.ru

Ключевое предположение данной работы состоит в том, что параметр λ является достаточно большим:

$$\lambda \gg 1. \tag{3}$$

Будем изучать ситуацию слабой связи между генераторами:

$$\gamma = \gamma_1/\lambda, \qquad \gamma_1 > 0. \tag{4}$$

Для простоты вычислений предположим, что при $0 < |u| < p$ выполняется неравенство $uf(u) > 0$.

В данной работе изучается нелокальная динамика системы (2) при условиях (3) и (4). В этом случае с помощью специального аналитического метода [11–15] удаётся свести исследование динамики исходной системы с запаздыванием и больши́м параметром к изучению динамики более простого конечномерного отображения без больши́х и малых параметров.

Структура работы следующая. В разделе 1 изучается асимптотика всех решений системы (2) с начальными условиями из некоторого подмножества S её фазового пространства. В разделе 2 по асимптотике решений конструируется оператор последования, который отображает множество S в множество того же типа. Показано, что структура оператора последования определяется некоторым конечномерным отображением, причём грубым циклам такого отображения отвечают релаксационные периодические решения исходной задачи с такой же устойчивостью. В разделе 3 изучается динамика построенного отображения и приводятся примеры сосуществующих режимов исходной системы.

1. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ

Будем изучать асимптотику при $\lambda \to +\infty$ всех таких решений системы (2), начальные условия которых непрерывны на отрезке $t \in [-T, 0]$ и удовлетворяют соотношениям

$$u_1|_{t=0} = kp, \quad |u_1| > p, \quad t \in [-T, 0), \qquad u_2|_{t=0} = xp, \quad |u_2| > p, \quad t \in [-T, 0].$$

Здесь $k = 1$ или $k = -1$ (параметр k определяет знак начальных условий), $|x| > 1$ и $kx > 0$ (это условие гарантирует, что обе компоненты начальных условий имеют один знак).

В дальнейшем особую роль будут играть такие моменты времени t_i, что на полуинтервале $[t_i - T, t_i)$ обе функции u_1 и u_2 по модулю больше p, а при $t = t_i$ одна из них равняется по модулю p, а модуль второй функции больше p. В качестве одной из характеристик рассматриваемых решений введём параметр m, который будет определять, модуль какой из функций в момент t_i равен p. Параметр m может принимать лишь два значения: 1 или -1. Если при некоторых $t = t_i$ выполнены условия $|u_1|_{t=t_i} = p$ и $|u_2|_{t=t_i} > p$, то величине t_i присваивается индекс $m = 1$, а если $|u_2|_{t=t_i} = p$ и $|u_1|_{t=t_i} > p$, то величине t_i присваивается индекс $m = -1$. Согласно введённым выше обозначениям, точке $t = 0$ присваивается индекс $m = 1$. Рассматриваемые решения будем обозначать через $(u_1(t, x, m), u_2(t, x, m))$.

Пусть $t \in [0, T]$. Тогда в силу выбора начальных условий на данном отрезке для решения системы (2) верны асимптотические формулы

$$u_1(t, x, 1) = kp \exp(-t)[1 + o(1)], \quad u_2(t, x, 1) = xp \exp(-t)[1 + o(1)].$$

Фиксируем произвольную постоянную $c > 2T$. Тогда при $t > T$ выполняется асимптотическое равенство

$$u_1(t, x, 1) = \lambda[g(t) + o(1)],$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \int\limits_T^t F[kp\exp(T-s)]\exp(s-t)\,\mathrm{d}s, & t \in [T, 2T]; \\ g(2T)\exp(2T-t), & t \in (2T, c). \end{cases}$$

Далее, введём в рассмотрение функцию $R(t,x)$:

$$R(t,x) = \begin{cases} xp\exp(-t), & t \in [0, T]; \\ \Big[xp + \gamma_1 \int\limits_T^t g(s)\exp(s)\,\mathrm{d}s\Big]\exp(-t), & t \in (T, 2T]; \\ \Big[xp + \gamma_1 \int\limits_T^{2T} g(s)\exp(s)\,\mathrm{d}s + \gamma_1 e^{2T} g(2T)(t-2T)\Big]\exp(-t), & t \in (2T, c]. \end{cases}$$

Обозначим через $\tau(x)$ первый положительный корень уравнения $|R(t,x)| = p$. Будем предполагать, что выполнено условие общности положения, состоящее в требовании простоты корня $\tau(x)$. Тогда при $t \in [0, \tau(x) + T]$ верно равенство

$$u_2(t,x,1) = R(t,x) + o(1),$$

а при $t \in (\tau(x) + T, \tau(x) + 2T]$ имеем

$$u_2(t,x,1) = \lambda[M(t,x) + o(1)],$$

где $M(t,x) = \int_{\tau(x)+T}^t F[R(s-T,x)]\exp(s-t)\,\mathrm{d}s$. В частности,

$$u_1[\tau(x)+2T,x,1] = \lambda\big\{g(2T)\exp[-\tau(x)] + o(1)\big\}, \quad u_2[\tau(x)+2T,x,1] = \lambda\big\{M[\tau(x)+2T,x] + o(1)\big\}.$$

Заметим, что в силу выбора начальных условий и ограничений на функцию F выполнены условия невырожденности

$$M[\tau(x)+2T,x] \neq 0, \quad g(2T) \neq 0.$$

На отрезке $t \in [\tau(x)+2T, \tau(x)+3T]$ главная часть асимптотики решения $(u_1(t,x,1), u_2(t,x,1))$ системы (2) будет совпадать с решением системы (2) при $F \equiv 0$. При $t > \tau(x)+3T$ до тех пор, пока $|u_1|$ и $|u_2|$ будут больше p, главная часть асимптотики решения (2) будет задаваться формулой

$$u_1(t,x,1) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\tilde{t})\big\{g(2T)\exp[-\tau(x)]\big[1+\exp(-2\gamma_1\tilde{t}/\lambda)\big] + M[\tau(x)+2T,x]\big[1-\exp(-2\gamma_1\tilde{t}/\lambda)\big]\big\},$$
$$u_2(t,x,1) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\tilde{t})\big\{g(2T)\exp[-\tau(x)]\big[1-\exp(-2\gamma_1\tilde{t}/\lambda)\big] + M[\tau(x)+2T,x]\big[1+\exp(-2\gamma_1\tilde{t}/\lambda)\big]\big\},$$

где $\tilde{t} = t - 2T - \tau(x)$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Обозначим через t_1 первое значение t, превышающее $\tau(x)+2T$, для которого одна из функций $|u_1(t,x,1)|$ или $|u_2(t,x,1)|$ обращается в p.

Из приведённых выше формул следует, что по значению величины

$$N(x) = g(2T)\exp[-\tau(x)]\,\big\{M[\tau(x)+2T,x]\big\}^{-1}$$

можно однозначно определить, какая из функций, $|u_1(t,x,1)|$ или $|u_2(t,x,1)|$, при $t = t_1$ равняется p. Если выполнено неравенство $N(x) > 1$, то этой функцией является $|u_2(t,x,1)|$, и точке t_1 присваивается индекс $m = -1$. Если же $N(x) < 1$, то такой функцией является $|u_1(t,x,1)|$, и $m = 1$.

Для t_1, очевидно, выполняется асимптотическое равенство

$$t_1 = [1 + o(1)] \ln \lambda.$$

Таким образом, при $t = t_1$ ситуация «вернулась» к исходной при $t = 0$ с заменой x и m на x и m, соответствующие следующей итерации. Тем самым построен итерационный процесс, динамика которого определяет (в главном) поведение рассматриваемых решений системы (2):

$$m_{n+1} = m_n \operatorname{sign}[1 - N(x_n)], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{5}$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} kN(x_n), & N(x_n) > 1; \\ k/N(x_n), & N(x_n) < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что, в силу ограничений на функцию F и начальные условия, верно равенство $k_{n+1} = k_n$. Также отметим, что значения m_n из выражения (5) не входят в выражение (6). Эти значения используются при построении асимптотики решений системы (2) в случае периодической последовательности $N(x_n)$ и на динамику на влияют.

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1. Пусть отображение (6) имеет грубо устойчивую (неустойчивую) периодическую траекторию $x_1, \ldots, x_r$ и $N(x_j) \neq 1$ при $j = 1, \ldots, r$. Тогда при всех достаточно бо́льших λ найдётся такое $\tilde{x_1} = x_1 + o(1)$, что система (2) имеет экспоненциально орбитально устойчивое (неустойчивое) периодическое решение $(u_1(t, \tilde{x_1}, 1), u_2(t, \tilde{x_1}, 1))$.

Все необходимые формулы, раскрывающие асимптотику периодического решения, приведены выше. Период построенных решений равен $r[1 + o(1)] \ln \lambda$, если $m_{r+1} = 1$ и $2r[1 + o(1)] \ln \lambda$, если $m_{r+1} = -1$.

3. ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЯ

Типичный вид отображения (6) при $x > 1$ приведён на рис. 1.

Заметим, что при значениях x, близких к единице, в случае функции F, равной константе на интервале $(0, p)$, отображение (6) тождественно равно x на отрезке ненулевой длины.

Также легко видеть, что отображение (6) может иметь вертикальные асимптоты (см. рис. 1*в*). Это объясняется тем, что функция $R(t,x)$ в случае $0 < 2T - \tau \ll 1$ может находиться вне полосы $[-p, p]$ почти на всём отрезке $t \in [\tau(x) + T, \tau(x) + 2T]$, и тогда знаменатель $N(x)$ близок к нулю. При росте x величина τ становится больше $2T$, и в этом случае $R(t,x)$ находится внутри полосы $[-p, p]$ на отрезке ненулевой длины и знаменатель $N(x)$ качественно отделён от нуля.

Если величина x является достаточно большой, а именно

$$x > \max\Big\{ \exp(2T), \frac{\gamma_1}{p} \int\limits_T^{2T} \exp(s)(1 + s - 2T) F[kp \exp(T - s)]\, \mathrm{d}s \Big\},$$

то отображение (6) непрерывно и его абсолютная величина находится внутри полосы

$$k_1 |x| < \max\big\{ |kN(x_n)|, |k/N(x_n)| \big\} < k_2 |x|,$$

где k_1 и k_2 — константы, зависящие от функции F, и $0 < k_1 < 1 < k_2$.

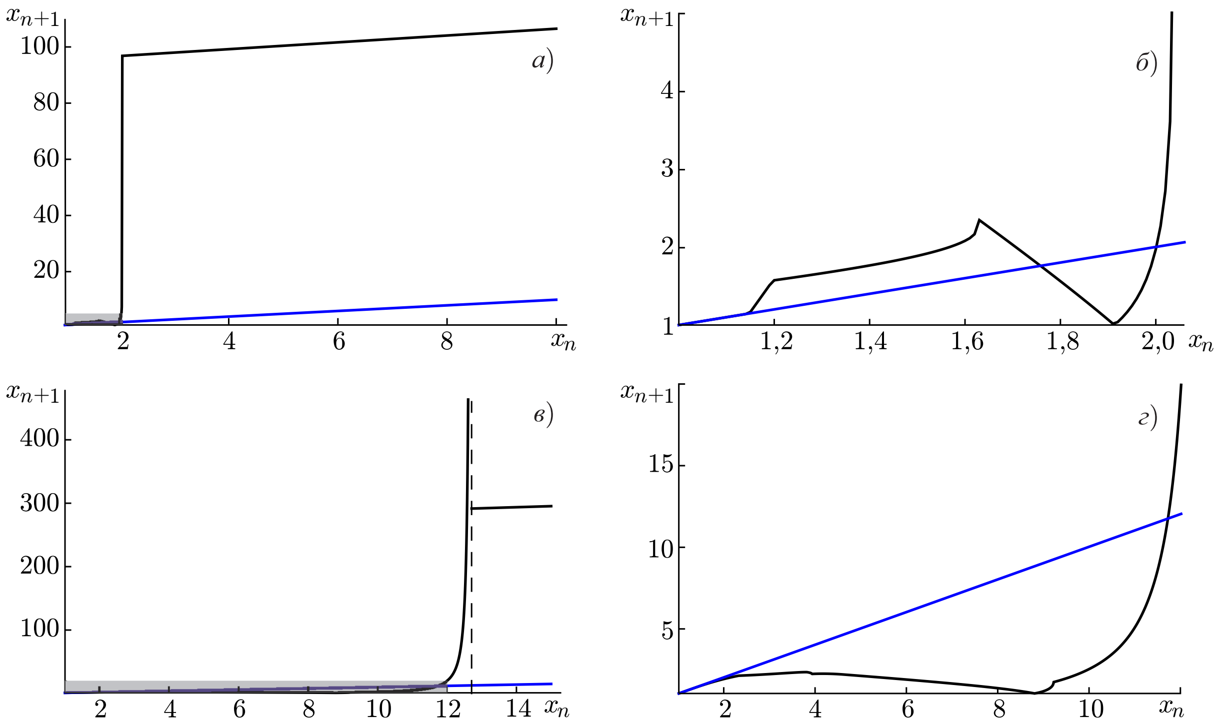

Рис. 1. Примеры отображения (6) (*а*, *в*). Панель *б* соответствует выделенному фрагменту панели *а*, панель *г* — выделенному фрагменту панели *в*. Синим цветом обозначена биссектриса первой координатной четверти

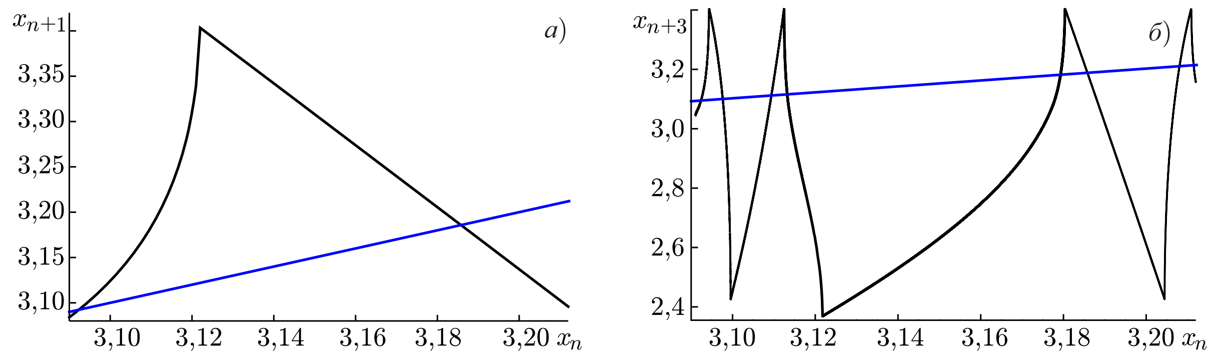

Рис. 2. Пример отображения (6) (*а*) и его третья итерация (*б*). Синим цветом обозначена биссектриса первой координатной четверти

У отображения (6) могут быть циклы периода три. Например, на рис. 2 изображены первая и третья итерации отображения (6). Здесь приближённые значения точек цикла периода три равны $x_1 \approx 3{,}0976375$, $x_2 \approx 3{,}1132255$, $x_3 \approx 3{,}2114775$. Первая итерация отображения (6) на отрезке $x \in [3{,}097637; 3{,}211478]$ непрерывна, следовательно, по теореме Шарковского [16], на этом отрезке содержатся циклы всех периодов. Грубым циклам данного отображения по теореме 1 соответствуют релаксационные периодические режимы исходной модели той же устойчивости.

У отображения (6) может быть несколько грубо устойчивых неподвижных точек. Каждой из них соответствует экспоненциально орбитально устойчивое периодическое релаксационное решение исходной модели. Пример двух сосуществующих устойчивых режимов исходной модели изображён на рис. 3. Таким образом, для исходной задачи характерно явление мультистабильности.

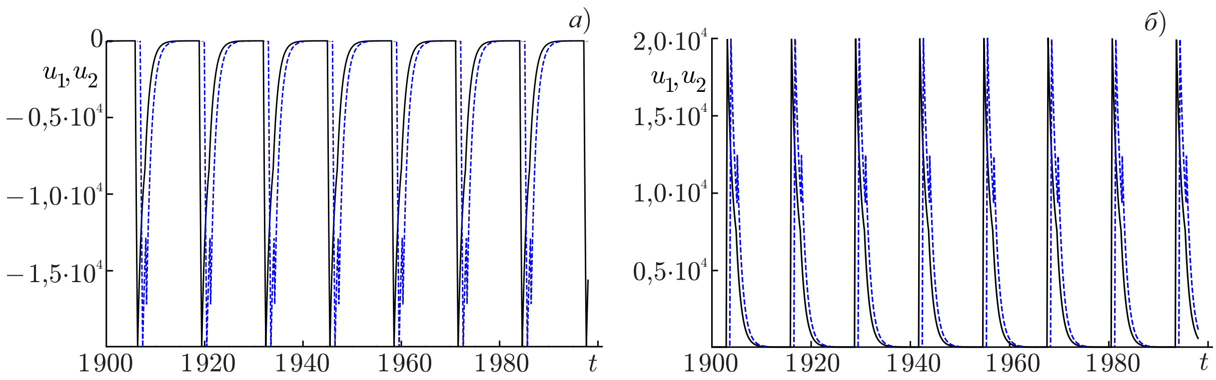

Рис. 3. Сосуществующие устойчивые решения системы (2). Значения параметров: $T = 2$, $\gamma_1 = 0{,}35$, $\lambda = 1\,000$, $p = 1$. Чёрным цветом показана компонента u_1, синим — компонента u_2

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе асимптотическими методами исследована нелокальная динамика двух слабо связанных генераторов с нелинейной финитной обратной связью. С помощью специального метода большого параметра исследование динамики исходной бесконечномерной задачи сведено к изучению динамики конечномерного отображения: грубые циклы этого отображения соответствуют периодическим решениям исходной системы той же устойчивости. Заметим, что данный метод может быть применён для исследования других моделей с запаздыванием и бóльшим параметром.

Показано, что модель (2) имеет релаксационные периодические режимы с амплитудой $O(\lambda)$ и периодом $O(\ln\lambda)$ при всех достаточно бóльших значениях λ. Найдена асимптотика этих режимов. Также выяснено, что для рассматриваемой модели характерно явление мультистабильности.

При уменьшении силы связи между генераторами динамика модели (2) усложняется. В частности, в отличие от случаев, рассмотренных в работах [7–9], у построенного конечномерного отображения найдены не только грубые неподвижные точки, но и грубые циклы различных периодов. Поскольку при некоторых функциях F данное отображение имеет циклы любого периода, то в исходной модели возможны хаотические режимы.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Ярославского университета (работа 1.6074.2017/9.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кислов В. Я., Дмитриев А. С. Проблемы современной радиотехники и электроники / под ред. В. А. Котельникова. М.: Наука, 1987. 156 с.
2. Kilias T., Kelber K., Mogel A., et al. // International J. Electronics. 1995. V. 79, No 6. P. 737.
3. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
4. Losson J., Mackey M. C., Longtin A. // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Science. 1993. V. 3, No 2. P. 167.
5. Szendro I. G., López J. M. // Physical Review E. 2005. V. 71, No 5. Art. no. 055203.
6. Lakshmanan M., Senthilkumar D. V. Dynamics of nonlinear time-delay systems. Berlin: Springer, 2011. 313 p.
7. Kashchenko A. A. // J. Physics. Conf. Series. 2017. V. 937, No 1. Art. no. 012020.

8. Kashchenko A. A. // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. V. 51, No 7. P. 639.
9. Kashchenko A. A. // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. V. 51, No 7. P. 753.
10. Kashchenko A. A. // J. Differential Equations. 2019. V. 266, No 1. P. 562.
11. Кащенко С. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, No 2. С. 328.
12. Кащенко С. А. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, No 2. С. 327.
13. Дмитриев А. С., Кащенко С. А. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 29, No 12. С. 2 381.
14. Grigorieva E., Kaschenko S. // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. V. 15, No 2. P. 319.
15. Kaschenko D., Kaschenko S., Schwarz W. // International J. Bifurcation and Chaos. 2012. V. 22, No 8. Art. no. 1250184.
16. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.

Поступила в редакцию 4 мая 2018 г.; принята в печать 14 сентября 2018 г.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF A SYSTEM OF TWO WEAKLY COUPLED RELAXATION OSCILLATORS WITH DELAYED FEEDBACK

A. A. Kashchenko and S. A. Kaschenko

We consider a dynamic system that consists of two coupled self-excited oscillators with delayed feedback. Such models occur in applied problems of radio physics and optics. It is assumed that the nonlinear function, which is responsible for the feedback, is finite and contains a great parameter. This reveals a possibility to use a special analytical method to study relaxation oscillations. It is shown that the dynamics of two such oscillators in the case of their asymptotically weak coupling is described by a special finite-dimension mapping and can be rather sophisticated.