

УДК 517.9+535.8

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ПИЧКОВЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ЛАЗЕРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Е. В. Григорьева^{1*}, *С. А. Кащенко*²

¹ Белорусский государственный экономический университет, г. Минск, Республика Беларусь

² Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Россия

Методами асимптотического анализа получены конечномерные отображения, динамика которых определяет динамику релаксационных колебаний в модели лазера с оптоэлектронной обратной связью. Показано сосуществование циклов и хаотических аттракторов. Обсуждается переключение пичковых режимов импульсным возмущением накачки в определённой фазе колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Для нелинейных систем характерно явление мультистабильности, которое проявляется в реализации различных динамических состояний системы при одних и тех же параметрах, но при различных начальных условиях. Наличие внешних воздействий (шума) в мультистабильной системе может приводить к спонтанному переключению аттракторов. Данный эффект наблюдается в том числе и в лазерных системах с запаздыванием. Например, в недавней работе [1] экспериментально изучалась статистика индуцированных шумом переключений цикл—стационарный режим в лазере с обратной связью. Такие неустойчивости могут играть важную роль и в других приложениях, среди которых отметим, в частности, исследования динамики нейронных сетей [2, 3] и их отдельных элементов с запаздывающей связью [4].

Для того, чтобы исключить множественность аттракторов, ранее предлагались методы непрерывного контроля, например, использующие стохастический резонанс в сочетании со слабой периодической модуляцией (см. обзор [5], там же рассмотрены и другие методы). При этом структура фазового пространства изменяется таким образом, что остаётся устойчивым только один выбранный аттрактор.

С другой стороны, в приложениях могут возникнуть задачи целенаправленного переключения динамических режимов с помощью внешнего сигнала, не разрушающего аттракторы исходной системы. В работе [6] был предложен метод переключения циклов в СО-2 лазере с периодической модуляцией внутрирезонаторных потерь с помощью внешнего импульсного сигнала. Экспериментально было показано, что существует оптимальный момент применения сигнала для «быстрого» переключения с минимальной длительностью переходного процесса. Метод переключения циклов сигналом с минимальной энергией для модели лазера с периодической модуляцией накачки обсуждался в работе [7], где была получена форма сигнала и траектория выхода системы из бассейна притяжения одного цикла в другой. В работе [8] для переключения предлагалось использовать кратковременное воздействие, которое применяется в фазе осциллирующего режима, соответствующей минимальному расстоянию между циклами в фазовом пространстве. Теоретическое обоснование было дано на основе нелокального анализа структуры фазового пространства системы двух неавтономных или трёх автономных уравнений.

В данной работе изучается возможность управляемого переключения импульсных режимов на примере модели лазера с оптоэлектронной запаздывающей обратной связью в цепи накачки [9]. В отличие от конечномерных моделей, фазовое пространство системы с запаздывающим

* grigorieva@tut.by

аргументом является бесконечномерным (функциональным). Определение бассейнов притяжения аттракторов в таких системах является открытым вопросом. В работах [10, 11] обсуждались некоторые подходы к описанию этих бассейнов на основе разложения начальных функций по ортогональным полиномам или в ряды Фурье. Здесь мы будем использовать специальный метод выделения множества начальных условий для пиковых режимов, характерных для динамики лазеров. Такие режимы в терминологии теории нелинейных колебаний [12] будем называть релаксационными. Будем подразделять эти режимы на медленно осциллирующие, у которых межимпульсный интервал больше времени задержки, и быстро осциллирующие, у которых межимпульсный интервал меньше времени задержки. В работах [13, 14] были найдены параметры, при которых возможна мультистабильность импульсных решений, и показано, что их динамика описывается динамикой конечномерных отображений. Также в этих работах было показано, что при периодической модуляции запаздывания возможно сосуществование хаотических режимов с различными характеристиками. В данной работе для целенаправленного переключения сосуществующих аттракторов предлагается использовать кратковременное изменение уровня накачки. С использованием полученных в работах [13, 14] асимптотических формул будут рассчитаны характеристики управляющего импульса, при которых система оказывается в бассейне притяжения заданного аттрактора.

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЛАЗЕРА С ОПТОЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассматривается модель динамики полупроводникового лазера с оптоэлектронной обратной связью [9], дополненная периодической модуляцией одного из параметров:

$$\frac{du}{dt} = vu(y - 1), \quad \frac{dy}{dt} = q + \gamma u[g(t)] - y - yu, \quad (1)$$

где переменные u и y пропорциональны плотностям фотонов и инверсии населённости, соответственно, v — отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населённости, потери в резонаторе нормированы к единице, q — постоянная скорость накачки, t — текущее время, нормированное на время релаксации инверсии населённости. Действие оптоэлектронной обратной связи описывается слагаемым $\gamma u[g(t)]$, где γ — коэффициент обратной связи, запаздывающий аргумент $g(t)$ имеет вид $g(t) = t - [\tau_0 + B \cos \Phi(t)]$, где τ_0 — постоянное время преобразования излучения в цепи обратной связи, фаза модулятора $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, B и ω — амплитуда и частота модуляции запаздывания соответственно, φ — начальная фаза модулирующего сигнала. В дальнейшем будем рассматривать два случая: постоянной задержки, ($B = 0$), или периодической модуляции времени запаздывания ($B < \tau_0$, $\omega < 1/B$). Условия применимости скоростных уравнений (1) для описания динамики генерации лазеров детально обсуждаются, например, в монографии [15]. Так, скорость затухания поляризации активной среды предполагается намного большей скорости релаксации числа фотонов в резонаторе и скорости релаксации инверсии населённости, что выполняется для лазеров класса В, в том числе для полупроводниковых. Для инжекционных лазеров на GaAlAs типичное значение нормированного параметра $v \approx 10^3$; время запаздывания измеряется в единицах времени жизни носителей $\tau_e \approx 3 \cdot 10^{-9}$ с; уровень накачки может в полтора раза превышать пороговый ($q \approx 1,5$); коэффициент обратной связи $0 < \gamma < 1$.

Отметим также, что система (1) без обратной связи, т. е. при $\gamma = 0$, имеет только стационарное решение. При наличии запаздывающей обратной связи фазовое пространство системы является бесконечномерным и возможны сложные осциллирующие режимы.

2. РЕЖИМЫ ПИЧКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Поскольку для лазеров класса В величину v можно рассматривать как большой параметр, то естественным образом возникает задача об асимптотике пиковых колебаний системы при $v \rightarrow \infty$. При этом длительность импульсов функции $u(t)$ (пиков генерации) стремится к нулю, а их амплитуда — к бесконечности. Кратко приведём следуя работе [13] условия существования таких решений, полученных методом асимптотического интегрирования дифференциально-разностных уравнений и редукции к дискретным отображениям. Динамика последних определяет динамику пиковых колебаний исходной системы.

2.1. Медленно осциллирующие решения

Медленно осциллирующие решения характеризуются межимпульсными интервалами большими времени запаздывания. Множество начальных условий медленно осциллирующих решений имеет вид

$$S(c, \varphi) = \{y(0) = c, \quad \Phi(0) = \varphi, \quad u(s) = \psi(s), \quad s \in [-\tau_0 - B, 0]\}, \quad (2)$$

где $c \in (1, q]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, и функции $\psi(s) \in S_0$ обладают следующими свойствами:

$$S_0 = \left\{ \psi(s) : 0 \leq \psi(s) \ll 1, \psi(0) = 1, \int_{-\tau_0 - B}^0 \psi(s) ds \leq v^{-1/2} \right\}.$$

При таких начальных условиях решение для функции $u(t)$ имеет форму пика (импульса) на интервале $t \in (0, t_1)$, где $t_1 \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$. Далее, на интервале $t \in (t_1, t_2)$ значения $u(t)$ малы, а в момент $t_2 = T(c, \varphi) + o(1)$ начинается новый импульс. С помощью асимптотических решений было показано, что при $t > t_2$ задача об интегрировании возвращается к исходной с начальными условиями $u(s + t_2) = \bar{\psi}(s)$, $\bar{\psi}(s) \in S_0$, $y(t_2) = \bar{c} + o(1)$, $\Phi(t_2) = \bar{\varphi}$, где

$$\bar{c} = q + (c - p - q) \exp(-T) + \gamma \frac{p}{g'(\tilde{t}_0)} \exp[-(T - \tilde{t}_0)], \quad \bar{\varphi} = (\omega T + \varphi) \bmod 2\pi. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{t}_0(\varphi)$ — первый положительный корень уравнения $\tau_0 + B \cos(\omega \tilde{t}_0 + \varphi) = \tilde{t}_0$; энергия пика генерации $p = p(c)$ определяется как положительный корень уравнения $p - c = c \exp(-p)$; межимпульсный интервал $T = T(c, \varphi)$ есть первый положительный корень уравнения

$$(q - 1)T + (c - p - q)[1 - \exp(-T)] + \gamma \frac{p}{g'(\tilde{t}_0)} \{1 - \exp[-(T - \tilde{t}_0)]\} = 0.$$

Если для каждой итерации отображения (3) выполняется условие

$$a(\tilde{t}_0) < 0, \quad (4)$$

где $a(t) = (q - 1)t + (c - p - q)[1 - \exp(-t)]$, то аттрактору отображения соответствует пиковый медленно осциллирующий режим с межимпульсными интервалами большими времени запаздывания в исходной системе. В частности, фиксированной точке (c_0, φ_0) (если такая существует) соответствует периодическое медленно осциллирующее решение в исходной системе, которое характеризуется периодом пульсаций $T_0 = T(c_0, \varphi_0)$, $T_0 > (\tau_0 + B)$ и описывается асимптотическими формулами из работы [13]. Другим аттракторам отображения будут соответствовать более сложные пиковые решения в исходной системе.

В отсутствие периодической модуляции запаздывания, что отвечает $B = 0$ в выражении (3), приходим к одномерному отображению

$$\bar{c} = q + (c - p - q) \exp(-T) + \gamma p \exp[-(T - \tau_0)], \quad (5)$$

где $T = T(c)$ — положительный корень уравнения $(q - 1)T + (c - p - q) [(1 - \exp(-T)) + \gamma p \{1 - \exp[-(T - \tau_0)]\}] = 0$. Отображение (5) описывает динамику пиковых медленно осциллирующих колебаний при условии выполнения неравенства $a(\tau_0) < 0$ для каждой итерации.

Расчёты отображения (5) для $B = 0$ и отображения (3) при достаточно малых амплитудах модуляции B показали, что может существовать устойчивая точка (устойчивый цикл с периодом больше времени запаздывания). При увеличении B наблюдаются циклы и хаотические аттракторы (квазипериодические и хаотические медленно осциллирующие колебания). Таким образом, существуют параметры обратной связи, при которых возможна реализация хаотических осцилляций специальной медленно осциллирующей структуры. При $B > 1/\omega$ происходит переход к осцилляциям со скажностью больше и меньше времени запаздывания.

Отметим, что при увеличении запаздывания τ_0 нарушается условие (4) и происходит переход к быстро осциллирующему решению с одним импульсом на интервале запаздывания и далее к решениям с несколькими импульсами на интервале запаздывания.

2.2. Быстро осциллирующие решения

Быстро осциллирующие решения характеризуются межимпульсными интервалами меньшими времени запаздывания. Для построения быстро осциллирующих решений с одним импульсом на интервале запаздывания введём множество начальных условий

$$S(c, \varphi, \xi, p_1) = \{y(0) = c, \Phi(0) = \varphi, u(s) = \psi_1(s), s \in [-\tau_0 - B, 0]\}, \quad (6)$$

где $c \in (1, q]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi_1(s) \in S_1(\xi, p_1)$, и

$$S_1(\xi, p_1) = \left\{ \psi_1(s) \in C_{[-\tau_0 - B, 0]} : \psi_1(0) = 1, \int_{-\tau + \xi}^{-\tau + \xi + \delta_1} \psi_1(s) ds = p_1, \int_{-\tau}^{-\tau + \xi} \psi_1(s) ds + \int_{-\tau + \xi + \delta_1}^0 \psi_1(s) ds < v^{-1/2} \right\}.$$

Параметр ξ определяет момент начала импульса на интервале запаздывания, предшествующего моменту $t = 0$, параметр $p_1 > 0$ — его энергию. В промежутках между импульсами значения функции $\psi_1(s)$ асимптотически малы. Форма импульса не определена, но важно, что ширина импульса $\delta_1 \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$.

Интегрируя систему последовательно с учётом асимптотических оценок для функций $u(t)$ и $u[g(t)]$, находим, что в момент $t_2 = T + o(1)$ полученные решения попадают в начальное множество S с заменой параметров c, ξ, p_1, φ на $\bar{c}, \bar{\xi}, \bar{p}_1, \bar{\varphi}$, где

$$\begin{aligned} \bar{c} &= q + (c - p - q) \exp(-T) + \gamma \frac{p_1}{g'(\bar{\xi})} \exp(\bar{\xi} - T), & \bar{p}_1 &= p, \\ \bar{\xi} &= \tau_0 + B \cos \varphi - T, & \bar{\varphi} &= (\omega T + \varphi) \bmod 2\pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $p(c)$ — положительный корень уравнения $c - p = c \exp(-p)$, $\tilde{\xi}(\xi, \varphi)$ — корень уравнения $\tilde{\xi} - B \cos(\omega \tilde{\xi} + \varphi) = \xi - B \cos \varphi$, и $T(c, \varphi, p_1, \xi)$ — корень уравнения

$$(q - 1)T + (c - p - q)[1 - \exp(-T)] + \gamma \frac{p_1}{g'(\tilde{\xi})}[1 - \exp(\tilde{\xi}_1 - T)] = 0.$$

Отображение (7) описывает динамику быстро осциллирующего решения с одним импульсом на интервале запаздывания, если для каждой итерации отображения выполняются неравенства

$$a(\xi) < 0, \quad T < \tau_0 - B. \quad (8)$$

В отсутствие периодической модуляции запаздывания, полагая $B = 0$ в выражениях (7), приходим к трёхмерному отображению для величин c , ξ и p_1 . Аналогично могут быть построены $(2m + 2)$ -мерные отображения, отвечающие за динамику быстро осциллирующих решений с m импульсами на интервале задержки.

2.3. Пример бистабильности циклов

Расчёт отображений (3) и (7) подтверждает существование аттракторов при $\gamma > 0$. При этом они характеризуются ограниченными бассейнами притяжения в фазовом пространстве отображений и, кроме того, должны выполняться условия (4) и (8) для существования соответствующих пиковых решений в исходной системе. Область параметров, где они реализуются, частично перекрывается с областью медленно осциллирующих режимов. Таким образом, можно указать параметры, при которых сосуществуют (и достигаются при разных начальных условиях) циклы, квазипериодические и хаотические осцилляции, у которых скважность импульсов больше или меньше времени задержки.

Приведём пример бистабильности циклов при $B = 0$ (т. е. при постоянном запаздывании). Одномерное отображение (5) для медленно осциллирующих режимов при $\gamma = 0,3$, $\tau_0 = 0,6$ и $q = 1,5$ имеет устойчивую фиксированную точку $c_0 = 1,28$. Этой точке соответствует устойчивый пиковый медленно осциллирующий цикл с энергией $p_0 = 0,514$ и периодом $T_0 = 0,719$ или в единицах времени запаздывания $T_0/\tau_0 = 1,198$. При $B = 0$ четырёхмерное отображение (7) редуцируется к трёхмерному отображению, которое при тех же параметрах имеет фиксированную точку $(c_1, p_1, \xi_1) = (1,133; 0,255; 0,243)$. Этой точке соответствует устойчивый пиковый быстро осциллирующий цикл с одним пиком на интервале запаздывания, энергией $p_1 = 0,255$ и периодом $T_1 = 0,357$ ($T_1/\tau_0 = 0,595$). Таким образом, при выбранных параметрах возможна бистабильность циклов.

Для численного интегрирования исходной системы с запаздывающим аргументом были взяты те же параметры $\gamma = 0,3$, $\tau_0 = 0,6$ и $q = 1,5$ и $v = 10^3$. Начальные условия выбирались из множества (2): $u(s) = 0, s \in [-\tau_0, 0)$, $u(0) = 1$, начальная инверсия $y(0) = 1,25$ или $y(0) = 1,15$, которые примерно соответствуют найденным значениям c_0 и c_1 и приводят к различным циклам. На рис. 1а показаны отображения межимпульсных интервалов $T_{i+1}(T_i)$. Две точки соответствуют устойчивым циклам с периодами $T_0 = 1,22\tau_0$ (этот период, очевидно, больше времени запаздывания) и $T_1 = 0,61\tau_0$ (меньше времени запаздывания). Эти значения периодов находятся в хорошем согласии со значениями, рассчитанными по отображениям.

Покажем также возможность сосуществования хаотических пиковых режимов в системе (1) с запаздывающим аргументом при модуляции запаздывания с амплитудой $B = 0,032$, частотой $\omega = 29,8$ и начальной фазой $\Phi(0) = 3,6$. Другие параметры и начальные условия выбирались способом, описанным выше. На рис. 1б показаны отображения межимпульсных интервалов $T_{i+1}(T_i)$

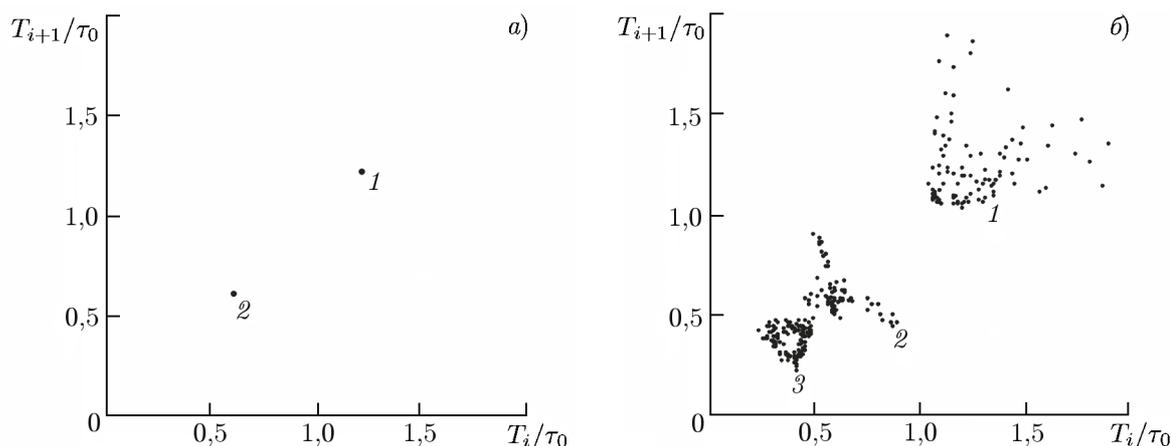


Рис. 1. Отображения для межимпульсных интервалов пиковых режимов, полученных при интегрировании системы (1) с параметрами $v = 10^3$, $q = 1,5$, $\gamma = 0,3$, $\tau_0 = 0,6$, $\omega = 29,8$ и $B = 0$ (а) и $0,032$ (б). Цифрами обозначены аттракторы, соответствующие медленно осциллирующему режиму (1), и быстро осциллирующим режимам с одним (2) и двумя (3) импульсами на интервале запаздывания

для аттракторов, полученных при разных начальных условиях. Для хаотического медленно осциллирующего решения все точки отображения локализованы в области $T_i > \tau_0$. Точки в области $\tau_0/2 < T_i < \tau_0$ соответствуют быстро осциллирующему аттрактору с одним импульсом на интервале запаздывания, точки в области $\tau_0/3 < T_i < \tau_0/2$ — быстро осциллирующему аттрактору с двумя импульсами на интервале запаздывания.

3. ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ ПИКОВЫХ РЕЖИМОВ

Исходя из описания множеств начальных условий медленно и быстро осциллирующих решений, можно предложить способ быстрого переключения режимов. Для того, чтобы перейти от медленно осциллирующего решения к быстро осциллирующему необходимо нарушить условие (4) и получить на отрезке запаздывания импульс с энергией и расположением, характерными для быстро осциллирующего решения. Этого можно добиться с помощью кратковременного увеличения тока в цепи накачки. При подходящем выборе характеристик сигнала система может оказаться в бассейне другого аттрактора и в результате перейти в другой режим генерации.

Рассмотрим сначала пример переключения циклов в системе (1) без модуляции запаздывания, т. е. при $B = 0$. Положим в системе $q(t) = q + q_x$ при $t \in [t_x, t_x + \Theta]$ и $q(t) = q$ при всех других t . Здесь q_x — амплитуда дополнительного сигнала, t_x — момент применения сигнала, Θ — длительность сигнала (меньше или сравнима с длительностью пиков), $p_x = q_x \Theta$ — энергия сигнала, предполагаемая конечной. Переключение осуществляется только при определённых значениях p_x и t_x , которые можно рассчитать, используя метод асимптотического интегрирования из работы [14].

Пусть система находится в режиме медленно осциллирующих колебаний, который будем характеризовать точкой $M_0(c_0, p_0, T_0)$, где c_0 — устойчивая точка отображения (7), $p_0 = p(c_0)$ — энергия пичка, $T_0 = T(c_0)$ — скважность пиков. Быстро осциллирующему решению с одним пичком на отрезке запаздывания при тех же параметрах будет отвечать устойчивая точка $M_1(c_1, p_1, T_1)$ отображения (7). Положим $t = 0$ в момент начала пичка генерации и $y(0) = c_0$. Пусть управляющий сигнал применяется в момент t_x после окончания импульса, но раньше сигнала в цепи обратной связи, т. е. $t_1 < t_x < \tau_0$. Тогда в момент $t_2 = T_x + o(1)$ имеем $u(t_2) = 1$ и

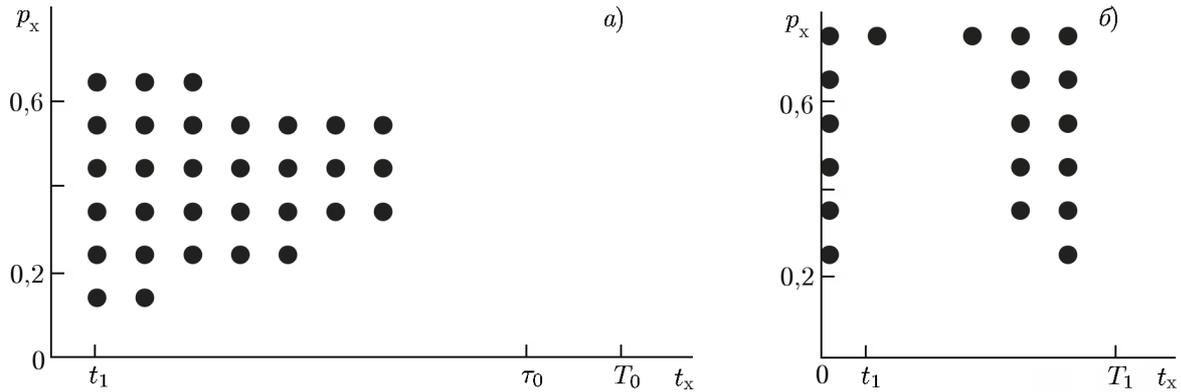


Рис. 2. Амплитуда и момент приложения управляющего импульса по отношению к фазе периодического режима, приводящие к переключению с медленно осциллирующего режима на быстро осциллирующий с одним импульсом (а) и наоборот (б)

$u'(t_2) > 0$ (начинается новый импульс излучения), при этом $y(t_2) = c_x + o(1)$, где

$$c_x = q + [(c_0 - p_0 - q) \exp(-t_x) + p_x] \exp(t_x - T_x) \tag{9}$$

и $T_x(c_0, p_x, t_x)$ — первый положительный корень уравнения

$$(q - 1)T_x + (c_0 - p_0 - q) [1 - \exp(-T_x)] + p_x [1 - \exp(t_x - T_x)] = 0. \tag{10}$$

Пусть $T_x < \tau_0$, тогда на отрезке запаздывания функция $u(t)$ принадлежит начальному множеству (6) для быстро осциллирующих решений (с одним импульсом). Если, дополнительно, результирующая точка $M_x(c_x, p_0, \tau_0 - T_x)$ находится в бассейне притяжения фиксированной точки $M_1(c_1, p, \xi_1)$, то произойдёт переключение с медленно осциллирующего режима на быстро осциллирующий. Отметим, что аттрактор M_1 определяется тремя координатами, причём одна из них всегда не совпадает с координатой целевой точки: $p_{1s} \neq p_0$. Поэтому при переключении наблюдается переходный процесс, длительность которого тем меньше, чем ближе к аттрактору целевая точка. Пример переключения медленно осциллирующего режима на быстро осциллирующий в исходной системе с запаздыванием приведён рис. 3а.

На рис. 2а представлены значения энергии p_x и моментов приложения переключающего сигнала $t_x \in (0, T_0]$ по отношению к фазе медленно осциллирующего колебания, т. е. $t_x = 0$ соответствует началу импульса, $t_x \in (0, t_1)$ отвечает импульсу излучения, $t_x \in (t_1, T_0)$ — межимпульсному интервалу. Для того, чтобы переключить медленно осциллирующий цикл на быстро осциллирующий (с одним импульсом), управляющий сигнал должен быть применён на интервале $t_x \in (t_1, T_1)$, т. е. следующим за импульсом и имеющим длительность меньше T_1 . Оптимальным можно считать момент сразу после импульса излучения, при этом энергия переключающего импульса минимальна или имеет наибольший размах вариации.

Аналогично рассматривается задача о переключении с быстро осциллирующего (с одним импульсом) режима на медленно осциллирующий. Пусть система находится в режиме быстро осциллирующих колебаний (в точке $M_1(c_1, p_1, T_1)$ отображения (7)). Положим $t = 0$ в момент начала пичка генерации и $y(0) = c_1$, на отрезке запаздывания в момент $s = \xi_1 - \tau_0$ имеется импульс с энергией $p_1 > 0$. Управляющий сигнал применяется в момент $t_1 < t_x < T_1$. Тогда в момент $t_2 = T_x + o(1)$, где T_x — первый положительный корень уравнения

$$(q - 1)T_x + (c_1 - p_1 - q) [1 - \exp(-T_x)] + \gamma p_1 [1 - \exp(\xi_1 - T_x)] = 0, \tag{11}$$

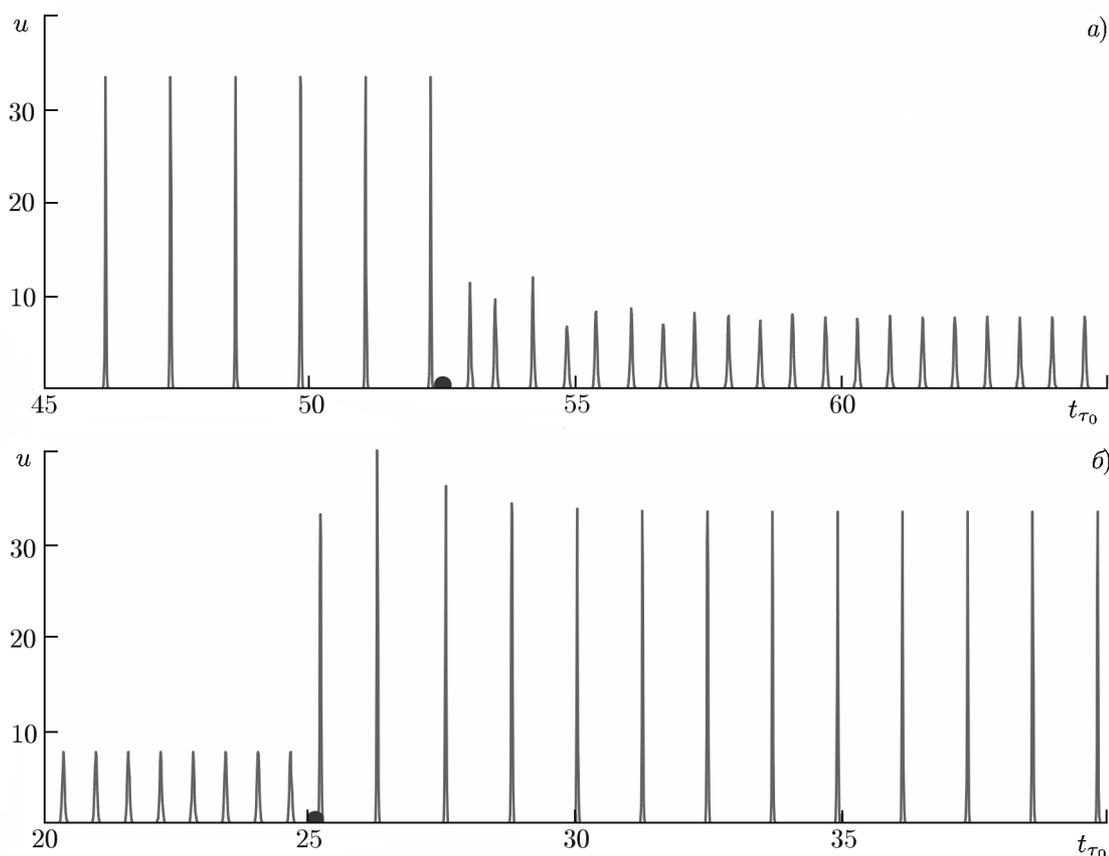


Рис. 3. Переключение устойчивых медленно и быстро осциллирующих циклов, отображения которых показаны на рис. 1а. На временной оси кружком отмечен момент приложения управляющего сигнала

приходим к выражению для $y(t_2) = c_x + o(1)$, где

$$c_x = q + (c_1 - p_1 - q) \exp(-T_x) + \gamma p_1 \exp(\xi_1 - T_x) + p_x \exp(t_x - T_x), \quad (12)$$

и $\bar{p}_1 = p_1$, $\bar{\xi} = \tau_0 - T_x$. Если целевая точка $M_x(c_x, p_1, \tau_0 - T_x)$ не попадает в бассейн притяжения фиксированной точки $M_1(c_1, p_1, \xi_1)$, то произойдёт переключение с быстро осциллирующего режима на медленно осциллирующий, которому соответствует устойчивая точка $M_0(c_0, p_0, T_0)$ отображения (5). Соответствующий пример приведён на рис. 3б.

Из рис. 2б следует, что для того, чтобы переключиться с быстро на медленно осциллирующее решение, сигнал должен быть применён на интервале импульса излучения, $t_x \in (0, t_1)$, или непосредственно перед ним. Отметим, что минимальная амплитуда переключающего импульса превышает минимальное значение, необходимое для переключения с медленно осциллирующего режима на быстро осциллирующий.

Покажем также возможность переключения сосуществующих хаотических пиковых режимов в системе (1) при модуляции запаздывания с амплитудой $B = 0,032$ и частотой $\omega = 29,8$. Соответствующие примеры показаны на рис. 4. Существование оптимальных моментов для переключения отмечается и в этом случае. Медленно осциллирующий режим переключается на быстро осциллирующий, если управляющий сигнал действует в момент, следующий за пиком излучения. И наоборот, переключение быстро осциллирующих режимов на медленно осциллирующие возможно, если управляющий сигнал действует в момент, предшествующий пикку излучения.

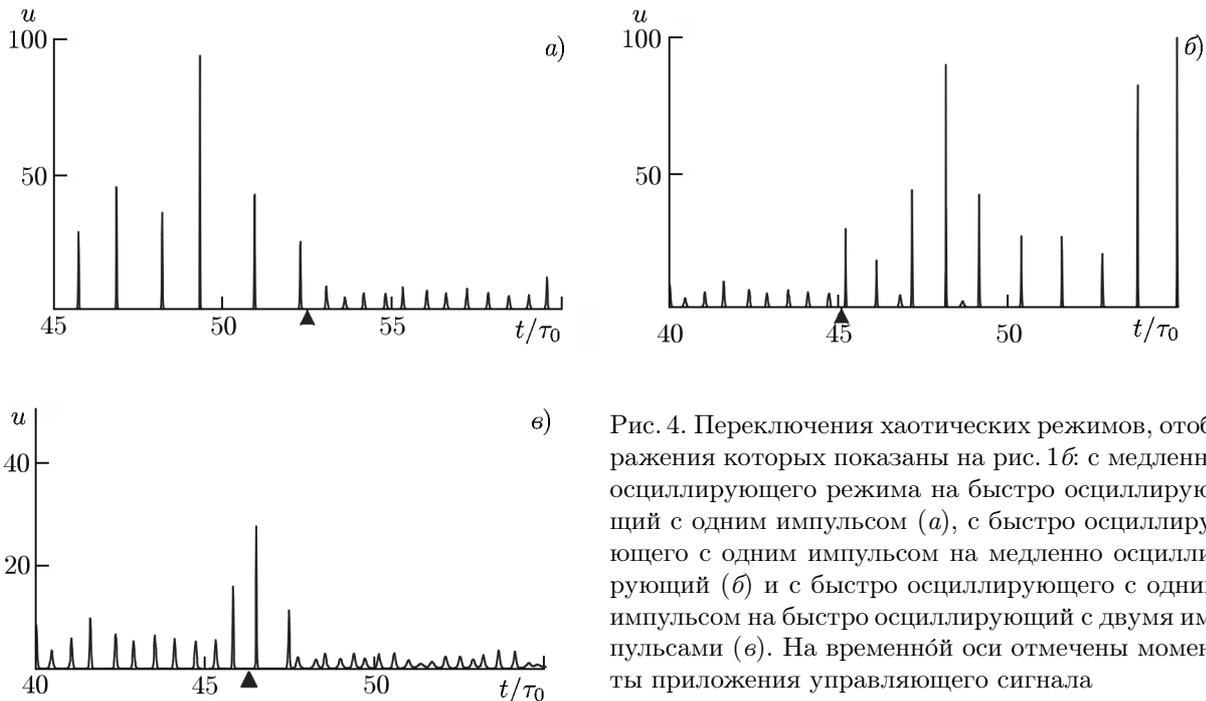


Рис. 4. Переключения хаотических режимов, отображения которых показаны на рис. 1б: с медленно осциллирующего режима на быстро осциллирующий с одним импульсом (а), с быстро осциллирующего с одним импульсом на медленно осциллирующий (б) и с быстро осциллирующего с одним импульсом на быстро осциллирующий с двумя импульсами (в). На временной оси отмечены моменты приложения управляющего сигнала

Таким образом, найденные начальные условия для сосуществующих аттракторов в системе с запаздыванием могут быть использованы при разработке методов управляемого переключения осциллирующих режимов с помощью внешних сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Terrien S., Krauskopf B., Neil G. R., et al. // Phys. Rev. A. 2017. V. 96, No. 4. Art. no. 043863.
2. Ashwin P., Creaser J., Tsaneva-Atanasova K. // Phys. Rev. E. 2017. V. 96, No. 5 Art. no. 052309.
3. Ansmann G., Lehnertz K., Feudel U. // Phys. Rev. X. 2016. V. 6, No. 1. Art. no. 011030.
4. D'Huys O., Jungling T., Kinzel W. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90, No. 3. Art. no. 032918.
5. Pisarchik A. N., Feudel U. // Phys. Reports. 2014. V. 540, No. 4. P. 167.
6. Chizhevsky V. N., Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. // Opt. Commun. 1997. V. 133, No. 1. P. 187.
7. Khovanov I. A., Khovanova N. A., Grigorieva E. V., et al. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96, No. 8. Art. no. 083903.
8. Yadav K., Kamal N. K., Shrimali M. D. // Phys. Rev. E. 2017. V. 95, No. 4. Art. no. 042215.
9. Giacomelli G., Calzavara M., Arecchi F. T. // Opt. Commun. 1989. V. 74, No. 1–2. P. 97.
10. Yao Y., Jian X., Wiercigroch M. // Phys. Rev. E. 2017. V. 96, No. 3. Art. no. 032205.
11. Leng S., Wei L., Kurths J. // Sci. Rep. 2016. V. 6. Art. no. 21449.
12. Grigorieva E. V., Kaschenko S. A. Asymptotic representation of relaxation oscillations in lasers. Basei Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. 230 p.
13. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 1. С. 1.
14. Grigorieva E. V., Kaschenko S. A. // Opt. Commun. 2018. V. 407. P. 9.
15. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999. 368 с.

Поступила в редакцию 11 мая 2018 г.; принята в печать 26 июля 2018 г.

**MULTISTABILITY OF THE SPIKING REGIME OF OPERATION
OF A DELAYED-FEEDBACK LASER***E. V. Grigorieva and S. A. Kashchenko*

We use the methods of asymptotic analysis to obtain finite-dimensional mapping, whose dynamics determines the dynamics of relaxation oscillations in a laser model with optoelectronic feedback. The coexistence of cycles and chaotic attractors is demonstrated. Switching of spiking modes by pulsed excitation of pumping in a certain oscillation phase is discussed.