

УДК 532.546+531.19

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ СО СЛУЧАЙНЫМИ МАКРОСКОПИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*Б. С. Марышев\*, Д. С. Голдобин*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

Работа посвящена исследованию конвективной диффузии пассивных примесей, происходящей при вынужденной фильтрации жидкости через пористую среду со случайной неоднородностью макроскопических параметров. При фильтрации жидкости неоднородности приводят к пространственно нерегулярным течениям и ответственны за дисперсию частиц жидкости, которая вызывает дополнительную (к молекулярной диффузии) конвективную диффузию. В отличие от молекулярной, такая диффузия анизотропна и прямо пропорционально зависит от скорости фильтрационного течения. В данной работе рассмотрены неоднородности как проницаемости, так и пористости среды и рассмотрены самые общие варианты их статистических свойств. При этом считалось, что неоднородности относительно малы и их автокорреляционная функция затухает с расстоянием  $r$  не медленнее, чем  $1/r^\beta$ , где  $\beta > 1$ . Проведено прямое численное моделирование для различных ситуаций, подтвердившее обоснованность используемых ограничений и корректность аналитических результатов.

### ВВЕДЕНИЕ

Реальные пористые среды характеризуются двумя масштабами пористости: микроскопическим (это масштаб малых каналов пор или гранул в гранулярных материалах) и макроскопическим (это масштаб неоднородностей пористой структуры). Макроскопические неоднородности связаны как с различными процессами (вымыванием, формированием разломов и тому подобным), так и с камнями и иными включениями; эти неоднородности присутствуют всегда (см., например, [1, 2]), даже в идеальном случае, когда пористая среда сформирована идентичными сферами.

При вынужденной фильтрации жидкости через пористую среду эти неоднородности приводят к пространственно нерегулярным течениям и ответственны за дисперсию частиц жидкости, которая вызывает дополнительную (к молекулярной диффузии) конвективную диффузию пассивных примесей (см., например, [1–8]). В отличие от молекулярной, конвективная диффузия анизотропна и пропорциональна средней скорости фильтрационного течения  $U$ . Для изотропной среды тензор гидродинамической дисперсии характеризуется двумя величинами: коэффициентами продольной  $D_{\parallel}$  и поперечной  $D_{\perp}$  дисперсии; при этом  $D_{\parallel} \propto U$  и  $D_{\perp} \propto U$  с разными коэффициентами пропорциональности. Для характерных в природе скоростей фильтрации конвективная диффузия не менее существенна, чем молекулярная [1, 2, 7]. Помимо анизотропии и зависимости от скорости фильтрационного течения, важной особенностью макроскопической конвективной диффузии является то, что она вызывает начальные возмущения поверхности раздела несмешивающихся вытесняемых жидкостей, когда смещение этой поверхности неустойчиво [9, 10]. Таким образом, любая информация относительно фундаментальных характеристик конвективной диффузии является основополагающей для исследований разнообразных важных процессов в природе (транспорта воды, химических и биологических примесей в грунтовых водах, эрозии почв и скальных пород и т. д. [11–14]) и промышленности (фильтрации, охлаждения реакторов и т. д. [15, 16]).

---

\* bmaryshev@mail.ru

Изначально внимание исследователей было, в первую очередь, уделено развитию теории микроскопической дисперсии (см., например, [4, 5]; развёрнутый обзор можно найти в статьях [2, 7]), позже началось теоретическое изучение макроскопической дисперсии, которая является результатом нерегулярных течений, обусловленных крупномасштабными неоднородностями [17–22]. При этом коэффициент диффузии случайного процесса пропорционален квадрату амплитуды флуктуаций и длине корреляций. Следовательно, макроскопическая диффузия может быть важнее микроскопической даже при очень слабых макроскопических вариациях параметров, если длина корреляции диспергирующих потоков достаточно велика. Статья [19] (вызвавшая комментарий [23] и ответ [24]) стала одной из основополагающих работ по теории макроскопической дисперсии и сильно повлияла на всё последующее развитие данной теории [20–22, 25], хотя она ограничивается случаем гауссовой статистики неоднородностей и не затрагивает вопросы эргодичности. Между тем следует иметь в виду, что диффузия координаты отдельной частицы жидкости со временем («временная диффузия») не эквивалентна взаимной дисперсии для облака таких частиц: при некоторых геометрических свойствах неоднородностей движение облака частиц может иметь случайную компоненту, но само облако не будет расплываться — система неэргодична. Предположение об эргодичности, принимаемое в работе [19] безусловно и по умолчанию, несовместимо с жёсткими топологическими ограничениями на взаимную дисперсию частиц жидкости для случаев одно- и двумерных неоднородностей (вопросы эргодичности затрагивались, например, в статьях [20–22]).

На полевых масштабах гидродинамическая дисперсия не является фиковским процессом, в котором, в частности, поток вещества линейно пропорционален градиенту концентрации [25, 26]. Чем больший масштаб принимается в рассмотрение для реальных водоносных слоёв грунта, тем более крупномасштабные неоднородности начинают себя проявлять, т. е. на практике, фиковский предел оказывается недостижим. Тем не менее в данной работе исследование ограничивается случаем гранулярных/пористых массивов, в которых неоднородности связаны с нерегулярными дефектами структуры или вариациями размеров гранул, и на достаточно больших масштабах фиковское описание оказывается применимо. Несмотря на количественную неточность получаемых в работе результатов для реальных водоносных слоёв, основные качественные выводы могут быть актуальны и для них.

В данной работе рассматривается задача о возникновении гидродинамической дисперсии, индуцированной неоднородностями макроскопических параметров пористой среды. Неоднородность параметров приводит к возникновению неоднородного течения при вытеснении жидкости из пористой среды заданным однородным (в среднем) потоком. Допускаются неоднородности как проницаемости, так и пористости. Последнее игнорировалось во многих предшествующих работах других авторов (например, [19–21]) и не учитывается при рассмотрении некоторых подобных геологических задач [27]. В то же время хорошо известно, что проницаемость и пористость связаны, иллюстрацией чего являются выражения теории Козени—Кармана [28]. В работе исследуется случай наиболее общих статистических свойств случайных неоднородностей, что актуально для систем, где существенно отклонение от логарифмически-нормального распределения размера зёрен [29]. Налагаются только два ограничения: во-первых, пространственные автокорреляционные функции случайных неоднородностей должны затухать с расстоянием  $r$  не медленнее, чем  $1/r^\beta$  с  $\beta > 1$ , и, во-вторых, амплитуды неоднородностей параметров среды должны быть малы по сравнению со средними значениями этих параметров. Оба ограничения соответствуют большинству реальных геофизических и технических систем.

Статья построена следующим образом: в разделе 1 даётся математическая постановка задачи и выводятся выражения для потока жидкости через неоднородную пористую среду. Раздел 2 посвящён аналитическому вычислению тензора конвективной диффузии в общем виде. В разделе 3

на основании полученных выражений обсуждаются свойства тензора дисперсии при изотропном распределении неоднородностей. Также проведена верификация полученных результатов с помощью прямого численного моделирования. Раздел 4 завершает статью заключением.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что частицы, транспортируемые через систему каналов (пор), подвержены дополнительной дисперсии вследствие неоднородности поля скорости поперёк канала; данный эффект может приводить, в том числе, и к нефиковской дисперсии (аномальной диффузии; см., например, [30]), обусловленной прилипанием частиц к твёрдому скелету среды. Однако для примесей с существенной молекулярной диффузией их распределение поперёк поры стремится к однородному и можно полагать, что перенос примеси происходит со скоростью, равной (микроскопически) средней скорости жидкости в порах  $\mathbf{v}$ . Последняя связана со скоростью фильтрации  $\mathbf{u}$  формулой  $\mathbf{u} = \varphi \mathbf{v}$ , где  $\varphi$  — пористость, т. е. отношение объёма пор в элементарном объёме среды к этому элементарному объёму.

Течения в пористой среде при вытеснении жидкости (при заданном градиенте давления  $p$ , который на больших масштабах асимптотически однороден) определяются законом Дарси и законом сохранения вещества:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\eta} K(\mathbf{r}) \nabla p, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $K(\mathbf{r})$  — проницаемость пористой среды,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. Учитывается не только неоднородность проницаемости

$$K(\mathbf{r}) = K_0 [1 + \varepsilon \varkappa(\mathbf{r})],$$

но и пористости

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0}{1 + \varepsilon \mu(\mathbf{r})},$$

где  $K_0$  и  $\varphi_0$  — средние значения проницаемости и пористости среды;  $\varkappa(\mathbf{r})$  и  $\mu(\mathbf{r})$  — случайные функции координат с нулевыми средними значениями;  $\varepsilon$  — характерная величина неоднородностей. Учёт неоднородности пористости важен, т. к. флуктуации проницаемости сопровождаются флуктуациями пористости сравнимой величины и перенос частиц жидкости определяется средней скоростью жидкости в порах ( $\mathbf{v} = \varphi^{-1} \mathbf{u}$ ), а не скоростью фильтрации, входящей в уравнение (1).

При малых неоднородностях ( $\varepsilon \ll 1$ ) система (1) задаёт связь среднего градиента давления  $\nabla P_0 = -\eta K_0^{-1} \mathbf{U}$  и средней скорости вынужденной фильтрации  $\mathbf{U}$ . Далее представим поле давления в виде суммы  $p = P_0 + P$ , где  $P$  — флуктуации поля давления, обусловленные неоднородностями параметров среды, а именно:

$$\nabla p = -\eta K_0^{-1} \mathbf{U} + \nabla P. \quad (2)$$

Тогда уравнение для поля флуктуаций давления в ведущем порядке по параметру  $\varepsilon$  представляет собой эллиптическое неоднородное уравнение (типа Пуассона),

$$\Delta P = \varepsilon \eta K_0^{-1} \mathbf{U} \cdot \nabla \varkappa(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Решение уравнения (3) может быть найдено в общем виде с помощью метода функций Грина:

$$P(\mathbf{r}) = \varepsilon \eta K_0^{-1} \mathbf{U} \int \nabla \varkappa(\mathbf{s}) P_g(\mathbf{r} - \mathbf{s}) d^n s = -\varepsilon \eta K_0^{-1} \mathbf{U} \int \varkappa(\mathbf{s}) \nabla_s P_g(\mathbf{r} - \mathbf{s}) d^n s, \quad (4)$$

где  $n$  — размерность решаемой задачи ( $n = 2$  или  $3$ ), а индекс оператора  $\nabla$  указывает координаты, по которым осуществляется дифференцирование. Функция  $P_g(\mathbf{r})$  представляет собой функцию Грина для эллиптического уравнения. В двумерном случае  $P_g(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1} \ln r$ , а в трёхмерном  $P_g(\mathbf{r}) = -1/(4\pi r)$ , где  $r = |\mathbf{r}|$ . С учётом решения (4) можно записать следующее выражение для поля флуктуаций скорости фильтрации:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= -\eta^{-1} K(\mathbf{r}) \nabla p \approx [1 + \varepsilon \chi(\mathbf{r})] \mathbf{U} + \varepsilon \nabla \left[ \mathbf{U} \cdot \int \chi(\mathbf{s}) \nabla_{\mathbf{s}} P_g(\mathbf{r} - \mathbf{s}) d^n s \right] = \\ &= [1 + \varepsilon \chi(\mathbf{r})] \mathbf{U} - \varepsilon \mathbf{U} \int \chi(\mathbf{s} + \mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{s}) d^n s, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $G_{ij}(\mathbf{r}) = \partial^2 P_g(\mathbf{r}) / (\partial x_i \partial x_j)$  — тензор производных функции Грина,  $x_i$  —  $i$ -ая компонента радиус-вектора,  $\{i, j\} = 1, \dots, n$ . В итоге уравнение для движения жидкости в порах можно записать в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r})}{\varphi(\mathbf{r})} \approx (1 + \varepsilon \{\mu(\mathbf{r}) + \chi(\mathbf{r})\}) \mathbf{V} - \varepsilon \mathbf{V} \int \chi(\mathbf{s} + \mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{s}) d^n s. \quad (6)$$

Здесь точка над переменной означает производную по времени  $t$ ,  $\mathbf{V} \equiv \varphi_0^{-1} \mathbf{U}$  — средняя скорость течения жидкости в порах. Уравнение (6) будет использовано при вычислении компонент тензора диффузии в следующем разделе.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ДИФФУЗИИ

В общем случае наличие нерегулярной (стохастической) компоненты в скорости движения частицы приводит к случайным отклонениям её смещения от среднего:  $r_i(t) - r_i(0) - \langle \dot{r}_i \rangle t \neq 0$ , где угловыми скобками обозначено усреднение по реализациям случайного процесса. Для отклонений смещения частицы от регулярного среднего течения введём обозначение  $q_i(t) \equiv r_i(t) - r_i(0) - V_i t$  (далее будет важно иметь в виду, что по определению  $q_i(0) = 0$ ). Диффузионному движению частицы соответствует рост отклонения  $q_i(t)$  со временем. Для тензора дисперсии имеем

$$\langle q_i(t) q_j(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \dot{q}_i(t_1) dt_1 \int_0^t \dot{q}_j(t_2) dt_2 \right\rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 S_{ij}(t_1 - t_2), \quad (7)$$

где автокорреляционная функция  $S_{ij}(t_1 - t_2) = \langle \dot{q}_i(t_1) \dot{q}_j(t_2) \rangle$  зависит только от разности  $t_1 - t_2$  в силу статистической стационарности процесса. Если  $S_{ij}(\tau)$  при больших значениях аргумента затухает не медленнее, чем  $1/|\tau|^\beta$  с  $\beta > 1$ , и  $t$  много больше характерного времени корреляций, то

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 S_{ij}(t_1 - t_2) \approx \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 S_{ij}(t_1 - t_2) = t \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 S_{ij}(t_2),$$

т. е. дисперсия линейно растёт со временем. Коэффициентом линейной зависимости дисперсии координат частицы от времени (с точностью до множителя) является коэффициент диффузии (или тензор диффузии в анизотропном случае):

$$D_{ij} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle q_i(T) q_j(T) \rangle}{2T} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t + \tau) \rangle_t d\tau, \quad (8)$$

где угловые скобки с индексом  $t$  означают усреднение по времени. Отметим, что предел  $T \rightarrow \infty$  в уравнении (8) стоит для математической строгости формульного определения. С точки зрения физической интерпретации, как и в теории броуновского движения Эйнштейна (см., например, [31], раздел 1.2.1), подразумевается, что время  $T$  много больше времени затухания автокорреляционной функции флуктуаций скорости. Если же при этом следить не за отдельной частицей, а строить макроскопическое описание для диффузионной эволюции распределения плотности частиц, время  $T$  должно быть много меньше времени наблюдения.

Подстановка (6) в (8) с учётом равенства  $r_i(t) - r_i(0) = V_i t + q_i(t)$  даёт

$$\begin{aligned}
 2D_{ij} = & \varepsilon^2 V_i V_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle [\mu + \varkappa] [\mathbf{V}t + \mathbf{q}(t)] [\mu + \varkappa] [\mathbf{V}(t + \tau) + \mathbf{q}(t + \tau)] \rangle_t - \\
 & - \varepsilon^2 V_i V_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle [\mu + \varkappa] [\mathbf{V}t + \mathbf{q}(t)] \int d^n s \varkappa [\mathbf{V}(t + \tau) + \mathbf{q}(t + \tau) + \mathbf{s}] G_{kj}(\mathbf{s}) \right\rangle_t - \\
 & - \varepsilon^2 V_k V_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle [\mu + \varkappa] [\mathbf{V}(t + \tau) + \mathbf{q}(t + \tau)] \int d^n s \varkappa [\mathbf{V}t + \mathbf{q}(t) + \mathbf{s}] G_{ik}(\mathbf{s}) \right\rangle_t + \\
 & + \varepsilon^2 V_k V_m \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle \int d^n s_1 \varkappa [\mathbf{V}t + \mathbf{q}(t) + \mathbf{s}_1] G_{ik}(\mathbf{s}_1) \times \right. \\
 & \left. \times \int d^n s_2 \varkappa [\mathbf{V}(t + \tau) + \mathbf{q}(t + \tau) + \mathbf{s}_2] G_{mj}(\mathbf{s}_2) \right\rangle_t. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь используется правило суммирования по повторяющимся индексам  $k$  и  $m$ , а также введено обозначение  $[\mu + \varkappa] [\mathbf{r}] \equiv \mu(\mathbf{r}) + \varkappa(\mathbf{r})$ . Введём корреляционные функции случайных полей:

$$C_{f,g}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = \langle f(\mathbf{s}_1) g(\mathbf{s}_2) \rangle, \quad C_f(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = \langle f(\mathbf{s}_1) f(\mathbf{s}_2) \rangle, \quad (10)$$

где угловыми скобками без индексов обозначена процедура усреднения по реализациям полей случайных неоднородностей. Для удобства перепишем выражение (9):

$$\begin{aligned}
 2D_{ij} = & \varepsilon^2 V_i V_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle C_{\mu+\varkappa} [\mathbf{V}\tau + \mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t)] \rangle_t - \\
 & - \varepsilon^2 V_i V_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^n s G_{kj}(\mathbf{s}) \langle C_{\mu+\varkappa,\varkappa} [\mathbf{V}\tau + \mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t) + \mathbf{s}] \rangle_t - \\
 & - \varepsilon^2 V_k V_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^n s G_{ik}(\mathbf{s}) \langle C_{\mu+\varkappa,\varkappa} [-\mathbf{V}\tau - \mathbf{q}(t + \tau) + \mathbf{q}(t) + \mathbf{s}] \rangle_t + \\
 & + \varepsilon^2 V_k V_m \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^n s_1 G_{ik}(\mathbf{s}_1) \int d^n s_2 G_{mj}(\mathbf{s}_2) \langle C_{\varkappa} [\mathbf{V}\tau + \mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t) + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1] \rangle_t. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать малые неоднородности пористости и проницаемости, что позволяет пренебречь флуктуациями  $|\mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t)|$  в аргументах функций в уравнении (11). В самом

деле,  $|\mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t)|$  связано с отклонением потока от однородного течения и пропорционально параметру  $\varepsilon$ . Для малых  $\varepsilon$  флуктуации аргументов корреляционных функций малы по сравнению с 1 при конечных значениях  $\tau$  и малы по сравнению с  $V\tau$  при больших  $\tau$ , где  $V = |\mathbf{V}|$ . Тогда уравнение (11) можно переписать в виде

$$D_{ij} = \frac{\varepsilon^2}{2V} V_i V_j \int_{-\infty}^{+\infty} dl C_{\mu+\kappa}(l\mathbf{e}_U) - \frac{\varepsilon^2}{2V} V_i V_k \int d^n s G_{kj}(\mathbf{s}) \int_{-\infty}^{+\infty} dl C_{\mu+\kappa,\kappa}(l\mathbf{e}_U + \mathbf{s}) - \\ - \frac{\varepsilon^2}{2V} V_k V_j \int d^n s G_{ik}(\mathbf{s}) \int_{-\infty}^{+\infty} dl C_{\mu+\kappa,\kappa}(l\mathbf{e}_U + \mathbf{s}) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2V} V_k V_m \int d^n s_1 G_{ik}(\mathbf{s}_1) \int d^n s_2 G_{mj}(\mathbf{s}_2) \int_{-\infty}^{+\infty} dl C_{\kappa}(l\mathbf{e}_U + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (12)$$

где  $l = V\tau$ , а  $\mathbf{e}_U = \mathbf{U}/U = \mathbf{V}/V$  — единичный вектор, направленный вдоль заданного среднего потока жидкости.

Условием перехода от (7) к (8) было затухание автокорреляционной функции флуктуаций скорости  $S_{ij}(\tau)$  быстрее, чем  $1/|\tau|^\beta$  с  $\beta > 1$ . В уравнении (12) совершён переход к интегрированию пространственных автокорреляционных функций вдоль пространственной координаты, и условие достаточной быстроты затухания корреляций превращается в требование, чтобы функции  $C_{f,g}(\mathbf{r})$  и  $C_f(\mathbf{r})$  спадали быстрее, чем  $1/r^\beta$  с  $\beta > 1$ .

Выражение (12) позволяет вычислять компоненты тензора диффузии для любых малых случайных неоднородностей проницаемости и пористости. Используемое определение тензора диффузии (8) описывает «временную диффузию». В случае эргодичности он характеризует и взаимную дисперсию частиц, т. е. обычные диффузионные потоки.

Однако возможны топологические ограничения, исключающие эргодичность в некоторых ситуациях. В частности, при одномерной неоднородности проницаемости траектории всех частиц подобны: они отличаются друг от друга лишь параллельным переносом. Это означает, что для облака частиц наблюдатель, несмотря на временную диффузию координаты центра облака, не зафиксирует расплывания, т. е. взаимной дисперсии: в среднем взаимное положение частиц будет оставаться неизменным. В случае двумерной неоднородности систему можно рассматривать в проекции на плоскость, перпендикулярную направлению, вдоль которого параметры однородны. Любая пара линий тока ограничивает область, вдоль которой расход жидкости постоянен. Если расход постоянен, а величина скорости фильтрационного течения  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  сильно не меняется, границы области не могут удаляться друг от друга — линии тока не расходятся. Таким образом, для двумерных неоднородностей частицы облака не могут неограниченно удаляться друг от друга в направлении поперёк среднего потока: поперечная взаимная диффузия топологически запрещена. Однако, продольная дисперсия будет наблюдаться, и для достаточно удалённых друг от друга частиц она будет характеризоваться коэффициентом продольной временной диффузии. В случае трёхмерных неоднородностей траектории благодаря дополнительной степени свободы способны переплетаться и становится возможной поперечная взаимная дисперсия, которая для удалённых друг от друга частиц так же будет определяться поперечной временной диффузией. Таким образом, для рассматриваемой задачи вопрос эргодичности требует внимательного рассмотрения и ниже будет обсуждён дополнительно.

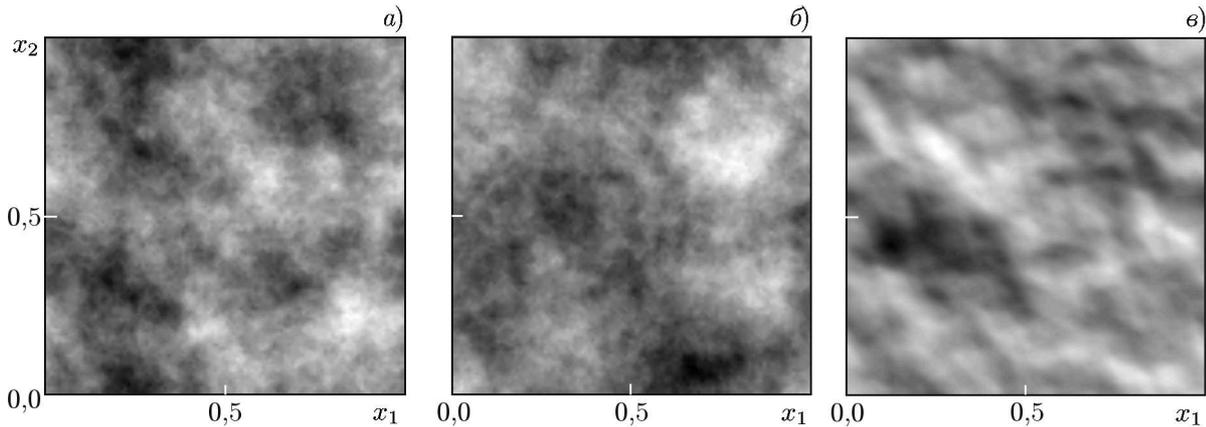


Рис. 1. Пример генерируемых для прямого численного моделирования полей неоднородности проницаемости  $\varkappa(\mathbf{r})$  (а) и пористости  $\mu(\mathbf{r})$  (б) для двумерной постановки задачи и соответствующее им поле флуктуаций давления  $P$  (в) для средней скорости жидкости в порах  $\mathbf{V} = (0,86; 0,52)$  (направление соответствует золотому сечению, что позволяет минимизировать влияние периодических граничных условий на конфигурацию течения); белый и чёрный цвета соответствуют максимальному (1,0) и минимальному (0,0) значениям

### 3. ИЗОТРОПНЫЙ БЕСПОРЯДОК

Будем рассматривать случай, когда выделенное направление отсутствует. Тогда корреляционные функции зависят только от расстояния,  $C_{f,g}(\mathbf{s}) = C_{f,g}(|\mathbf{s}|)$ , и выражение (12) для тензора диффузии даёт

$$D_{ij} = \frac{\varepsilon^2}{2V} V_i V_j \int_{-\infty}^{+\infty} dl C_{\mu+\varkappa}(l) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \tag{13}$$

Тензор  $D_{ij}$  симметричен, поэтому всегда может быть приведён к диагональной форме, т. е. записан как

$$\mathbf{D}_{2D} = \begin{pmatrix} D_{\parallel} & 0 \\ 0 & D_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{3D} = \begin{pmatrix} D_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & D_{1\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{2\perp} \end{pmatrix} \tag{14}$$

для двумерного и трёхмерного полей неоднородностей соответственно, где

$$D_{\parallel} = \frac{\varepsilon^2 V}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\mu+\varkappa}(l) dl, \quad D_{1\perp} = D_{2\perp} \sim D_{\perp} \sim \varepsilon^4. \tag{15}$$

Выражения (15) нуждаются в проверке, прежде всего поскольку вопрос об эргодичности остаётся открытым. Для проверки выражений (15) было выполнено прямое численное моделирование течения в пористой среде со случайными неоднородностями. Все вычисления проводились в безразмерном виде, т. е. для  $\eta = 1$  и  $K_0 = 1$ .

Для расчёта численно генерировались изотропные случайные функции, моделирующие неоднородности пористости  $\varkappa(\mathbf{r})$  и проницаемости  $\mu(\mathbf{r})$  (см. рис. 1). Далее, уравнения (1) для давления решались численно с помощью стандартной конечно-разностной схемы второго порядка точности для периодических граничных условий (пример поля флуктуаций давления приведён на рис. 1).

Полученное поле флуктуаций давления использовалось для вычисления поля скорости частиц в порах среды, а именно

$$\mathbf{v} = (1 + \varepsilon\mu) (1 + \varepsilon\varkappa) (\mathbf{V} - \varphi_0^{-1} \nabla P), \tag{16}$$

которое, в свою очередь, использовалось при решении уравнения диффузии при наличии конвективного переноса для скалярного поля  $C$  при некотором заданном коэффициенте эффективной молекулярной диффузии  $D_m$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla C = \frac{D_m}{\varphi(\mathbf{r})} \nabla [\varphi(\mathbf{r}) \nabla C]. \quad (17)$$

Уравнение (17) решалось для случая малого ненулевого коэффициента молекулярной диффузии. Учёт молекулярной диффузии был необходим по двум причинам: во-первых, молекулярная диффузия всегда присутствует при переносе в реальных пористых средах, и, во-вторых (что важнее с точки зрения математической строгости проводимого рассмотрения), её учёт вносит эргодичность в рассматриваемую систему. Выбор конкретных безразмерных величин  $D_m$  для численного моделирования обусловлен их характерными значениями для реалистичных систем:  $D_m = D_m^*/(V^*l^*)$ , где звёздочка обозначает размерные величины,  $l^*$  — масштаб макроскопических неоднородностей пористой среды. При типичном для жидкостей значении  $D_m^* \sim 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$  и фильтрационном течении со скоростью  $V^* \sim 0.1 \text{ см}/\text{с}$  в среде с  $l^* \sim 1 \text{ см}$  получаем  $D_m \sim 10^{-4}$ .

Решение уравнения (17) находилось численно с помощью неявной схемы второго порядка точности по пространству и первого — по времени. Полученное решение для поля  $C(\mathbf{r})$  сравнивалось с фундаментальным решением уравнения диффузии с симметричным тензором  $D_{ij}$ , а именно:

$$C_*(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi t \det(\mathbf{D})}]^n} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{D}^{-1})_{ij} x_i x_j}{4t} \right], \quad (18)$$

где  $\det \mathbf{D}$  — определитель матрицы  $\mathbf{D}$ ,  $(\mathbf{D}^{-1})_{ij}$  — элементы матрицы, обратной к  $D_{ij}$ , а  $n$  — размерность задачи.

Оценка параметров  $D_{ij}$  проводилась с помощью метода наименьших квадратов. Ошибка вычисления поля описывалась суммой

$$E = \sum_{\mathbf{r}, t} [C(\mathbf{r}, t) - C_*(\mathbf{r}, t)]^2, \quad (19)$$

где суммирование проводилось по всем узлам пространственной сетки на 30 временных слоях (от 500 до 530, когда поле  $C$  должно описываться фундаментальным решением и сеточные искажения структуры уже малы). Процедура минимизации ошибки и оценки компонент матрицы  $D_{ij}$  основана на алгоритме Бройдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно (БФГШ) [32]. Примеры расчёта полей  $C$  и  $C_*$  для двумерной постановки задачи представлены на рис. 2.

В табл. 1 и 2 даны результаты расчётов для 9 пар значений параметров  $\varepsilon = 0,01; 0,05; 0,1$  и  $D_m = 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}$  для дву- и трёхмерной постановки задачи. Реализация случайных полей  $\varkappa(\mathbf{r})$  и  $\mu(\mathbf{r})$  для каждого численного эксперимента генерировалась независимо; для сгенерированной реализации рассчитывался интеграл автокорреляционной функции  $I = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\mu+\varkappa}(l) dl$  (приведён в табл. 1 и 2). Для иллюстрации результатов численного моделирования представлены оценки компонент тензора диффузии, полученные с помощью БФГШ-алгоритма, и, для сравнения, компоненты, вычисленные аналитически с помощью выражения (15) (здесь  $D_{\parallel} = \varepsilon^2 V I$ ,  $D_{\perp} = 0$ ).

Компоненты тензора диффузии приведены в системе координат, связанной с направлением заданного вектора средней скорости фильтрации  $\mathbf{U}$ . Коэффициенты  $D_{\parallel, \text{num}}$ ,  $D_{\perp, \text{num}}$ ,  $D_{1\perp, \text{num}}$ ,  $D_{2\perp, \text{num}}$  вычислены с помощью БФГШ-метода и учитывают совместное действие молекулярной диффузии и гидродинамической дисперсии. Поскольку при транспорте в рассматриваемых системах броуновские флуктуации положения частиц, связанные с молекулярной диффузией, и

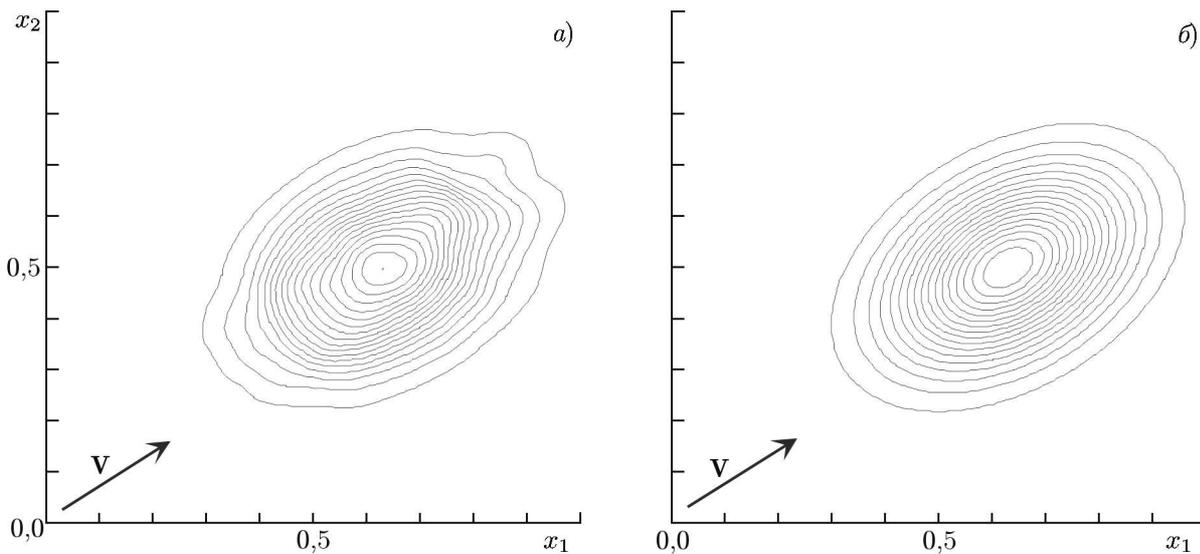


Рис. 2. Изолинии полей  $C_*$  (а; см. (18)) и  $C$  (б; см. (17)). Направление среднего фильтрационного потока указано стрелкой,  $\varphi_0^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{V} = (0,86; 0,52)$ . Вычисление распределения  $C(\mathbf{r}, t)$  проведено для поля флуктуаций давления, представленного на рис. 1, и для коэффициента молекулярной диффузии  $D_m = 10^{-3}$ . Компоненты  $D_{ij}$  тензора диффузии, полученные с помощью БФГШ-метода, составляют  $D_{11} = 1,224 \cdot 10^{-2}$ ,  $D_{22} = 0,829 \cdot 10^{-2}$ ,  $D_{12} = 0,882 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1. Сравнение результатов аналитической теории (15) с результатами прямого численного моделирования в случае изотропного распределения неоднородностей проницаемости и пористости для двумерной постановки задачи при учёте молекулярной диффузии  $D_m$ . Результаты получены для средней скорости жидкости в порах  $\mathbf{V} = (0,86; 0,52)$

Параметры			Аналитическая теория		Численное моделирование	
$\varepsilon$	$D_m$	$I$	$D_{\parallel}$	$D_{\parallel} + D_m$	$D_{\parallel, \text{num}}$	$D_{\perp, \text{num}}$
0,10	$1 \cdot 10^{-3}$	1,82	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-3}$
0,10	$5 \cdot 10^{-4}$	1,63	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$6,12 \cdot 10^{-4}$
0,10	$1 \cdot 10^{-4}$	1,71	$1,71 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	$2,17 \cdot 10^{-4}$
0,05	$1 \cdot 10^{-3}$	1,58	$3,95 \cdot 10^{-3}$	$4,95 \cdot 10^{-3}$	$4,98 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
0,05	$5 \cdot 10^{-4}$	1,72	$4,31 \cdot 10^{-3}$	$4,81 \cdot 10^{-3}$	$4,85 \cdot 10^{-3}$	$5,52 \cdot 10^{-4}$
0,05	$1 \cdot 10^{-4}$	1,48	$3,72 \cdot 10^{-3}$	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$3,81 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-4}$
0,01	$1 \cdot 10^{-3}$	1,92	$1,92 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$
0,01	$5 \cdot 10^{-4}$	1,73	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$6,73 \cdot 10^{-4}$	$6,73 \cdot 10^{-4}$	$5,00 \cdot 10^{-4}$
0,01	$1 \cdot 10^{-4}$	1,67	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$

флуктуации, возникающие из-за неоднородности макроскопических параметров среды, взаимно независимы, то коэффициенты диффузии при наложении этих флуктуационных движений складываются (т. е.  $D_{\alpha, \text{num}} = D_{\alpha} + D_m$ , где  $\alpha = \parallel, \perp, 1 \perp, 2 \perp$ ).

Анализируя данные, представленные в табл. 1 и 2, можно сделать вывод, что результаты, полученные с помощью аналитической теории, и результаты прямого численного моделирования хорошо согласуются вплоть до значений параметра  $\varepsilon \sim 0,1$ , что соответствует существенным амплитудам неоднородностей параметров.

Таблица 2. То же, что в табл. 1, но для трёхмерного случая

Параметры		$I$	Аналитическая теория		Численное моделирование		
$\varepsilon$	$D_m$		$D_{\parallel}$	$D_{\parallel} + D_m$	$D_{\parallel, \text{num}}$	$D_{1\perp, \text{num}}$	$D_{2\perp, \text{num}}$
0,10	$1 \cdot 10^{-3}$	2,32	$2,32 \cdot 10^{-2}$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$2,40 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$
0,10	$5 \cdot 10^{-4}$	2,42	$2,42 \cdot 10^{-2}$	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$5,37 \cdot 10^{-4}$	$5,43 \cdot 10^{-4}$
0,10	$1 \cdot 10^{-4}$	2,48	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$1,88 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-4}$
0,05	$1 \cdot 10^{-3}$	2,18	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$6,45 \cdot 10^{-3}$	$6,41 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$
0,05	$5 \cdot 10^{-4}$	2,33	$5,83 \cdot 10^{-3}$	$6,33 \cdot 10^{-3}$	$6,35 \cdot 10^{-3}$	$7,01 \cdot 10^{-4}$	$6,38 \cdot 10^{-4}$
0,05	$1 \cdot 10^{-4}$	2,28	$5,70 \cdot 10^{-3}$	$5,80 \cdot 10^{-3}$	$5,83 \cdot 10^{-3}$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$
0,01	$1 \cdot 10^{-3}$	2,41	$2,41 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$
0,01	$5 \cdot 10^{-4}$	2,51	$2,51 \cdot 10^{-4}$	$7,51 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^{-4}$	$5,08 \cdot 10^{-4}$	$5,11 \cdot 10^{-4}$
0,01	$1 \cdot 10^{-4}$	2,38	$2,38 \cdot 10^{-4}$	$3,38 \cdot 10^{-4}$	$3,36 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	$1,09 \cdot 10^{-4}$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены аналитические выражения для тензора конвективной диффузии, описывающего гидродинамическую дисперсию при фильтрации жидкости через пористую среду. Дисперсия индуцирована случайными неоднородностями макроскопических параметров среды, а именно проницаемости и пористости. Найденные выражения верны для общего случая статистических свойств рассматриваемых неоднородностей: не требуется гауссовость и допускается широкий класс автокорреляционных функций неоднородностей. Используются только два ограничения: во-первых, неоднородности полагаются относительно малыми, во-вторых, их автокорреляционные функции затухают с расстоянием не медленнее, чем  $1/r^\beta$ , где  $\beta > 1$ . Полученные аналитические результаты были верифицированы с помощью прямого численного моделирования транспорта пассивного скалярного поля в неоднородном фильтрационном потоке с учётом молекулярной диффузии. Верификация выполнена для дву- и трёхмерной постановки задачи при изотропных статистических свойствах неоднородностей. Существенно, что полученные аналитические формулы описывают диффузию координаты частицы жидкости во времени, которая может отличаться от взаимной пространственной дисперсии частиц, когда система неэргодична. При одномерных (слоистых) и двумерных неоднородностях эргодичность в задаче без молекулярной диффузии отсутствует. Введение молекулярной диффузии, как подтверждает численное моделирование, делает систему эргодической.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1447.2017.5).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Collins R. E. Flow of Fluids through Porous Materials. New York: Reinhold, 1961. 270 p.
2. Sahimi M. // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 1393.
3. von Rosenberg D. U. // AIChE J. 1956. V. 2. P. 55.
4. Saffman P. G. // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 321.
5. Saffman P. G. // J. Fluid Mech. 1960. V. 7. P. 194.
6. Dagan G. // Water Resour. Res. 1986. V. 22, No. 9S. P. 120S.
7. Dagan G. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 183.

8. Harleman D. R. F., Rumer R. R. // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16. P. 385.
9. Saffman P. G., Taylor G. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1958. V. 245. P. 312.
10. Lyubimov D. V., Shklyayev S., Lyubimova T. P., Zikanov O. // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. Art. no. 014105.
11. Davie M. K., Buffett B. A. // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106. P. 497.
12. Goldobin D. S., Brilliantov N. V. // *Phys. Rev. E.* 2011. V. 84. Art. no. 056328.
13. Hunter S. J., Goldobin D. S., Haywood A. M., et al. // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2013. V. 367. P. 105.
14. Goldobin D. S., Krauzin P. V. // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 92. Art. no. 063032.
15. Holloway S. // *Energy Conversion and Management.* 1997. V. 38. P. S193.
16. Japan's Methane Hydrate R&D Program. Phase 1: Comprehensive Report of Research Results. August 2008 Edition. Tokyo: JOGMEC, 2008. 72 p.
17. Buyevich Y. A., Leonov A. I., Safrai V. M. // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 37. P. 371.
18. Gelhar L. W., Gutjahr A. L., Naff R. J. // *Water Resour. Res.* 1979. V. 15. P. 1387.
19. Gelhar L. W., Axness C. L. // *Water Resour. Res.* 1983. V. 19. P. 161.
20. Neuman S. P., Winter C. L., Newman C. M. // *Water Resour. Res.* 1987. V. 23. P. 453.
21. Neuman S. P., Zhang Y. // *Water Resour. Res.* 1990. V. 23. P. 887.
22. Dagan G. // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 233. P. 197.
23. Cushman J. H. // *Water Resour. Res.* 1983. V. 19. P. 1641.
24. Gelhar L. W., Axness C. L. // *Water Resour. Res.* 1983. V. 19. P. 1643.
25. Dagan G. // *Water Resour. Res.* 1988. V. 24. P. 1491.
26. Gelhar L. W. // *Water Resour. Res.* 1986. V. 22. P. 135S.
27. Müller T. M., Gurevich B. // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 117. P. 2732.
28. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. *The Rock Physics Handbook. Tools for Seismic Analysis in Porous Media.* 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 524 p.
29. Колмогоров А. Н. // *Докл. АН СССР.* 1941. Т. 31, № 2. С. 99.
30. Maryshev B., Joelson M., Lyubimov D., et al. // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2009. V. 42. Art. no. 115001.
31. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods.* Berlin: Springer-Verlag, 1997. 447 p.
32. Nocedal J., Wright S. J. *Numerical Optimization.* New York: Springer-Verlag, 2006. 664 p.

Поступила в редакцию 25 апреля 2018 г.; принята в печать 27 сентября 2018 г.

## HYDRODYNAMIC DISPERSION FOR FLUID FILTRATION THROUGH A POROUS MEDIUM WITH RANDOM MACROSCOPIC INHOMOGENEITIES

*B. S. Maryshev and D. S. Goldobin*

We study the convective diffusion of passive admixtures in the course of forced fluid filtration through a porous medium with frozen random inhomogeneities of macroscopic parameters. During the fluid filtration, the parameter inhomogeneities lead to spatially irregular flows and are responsible for dispersion of the fluid particles, which causes convective diffusion that is additional to molecular diffusion. In contrast to the molecular diffusion, this diffusion is anisotropic and directly proportional to the filtration flow rate. We consider the inhomogeneities of both permeability and porosity of the medium and report on analytical results for the most common options of their statistical properties. It was assumed that the inhomogeneities are relatively small and their autocorrelation function decays with the distance  $r$  not slower than  $1/r^\beta$ , where  $\beta > 1$ . Direct numerical simulation for different cases confirmed the validity of the restrictions we adopted and the correctness of the analytical findings.