

УДК 621.396.67

## РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА МНОГОСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЕ

*П. О. Афанасьев*<sup>1</sup>, *А. А. Акопов*<sup>2</sup>, *А. М. Лерер*<sup>2</sup>, *М. Б. Мануилов*<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup> Ирландский национальный университет, г. Мейнут, Ирландия

<sup>2</sup> Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи;

<sup>3</sup> Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Предложено аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на многослойном диэлектрическом, в том числе плазмонном, шаре. Решение построено методом разделения переменных. Получены новые эффективные рекуррентные соотношения для расчёта полей в слоях, а также выражения для полей в ближней и дальней зонах дифракции. Новизна предложенного решения связана с формой представления его радиальной части в виде нормированных функций. Показано, что с увеличением числа слоёв линзы, аппроксимирующих гладкий профиль диэлектрической проницаемости, напряжённость электрического поля в точке фокусировки возрастает, достигая предельного значения, что позволяет определить минимальное необходимое число слоёв в практических задачах. В оптическом диапазоне исследованы резонансные свойства металло-диэлектрических наночастиц.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для увеличения пропускной способности систем мобильной связи в качестве антенн базовых станций в местах с большим количеством пользователей всё шире используются многолучевые антенны. При этом сектор обслуживания перекрывается несколькими узкими лучами, каждый из которых соответствует своей базовой станции. С этой точки зрения перспективным решением оказались многолучевые антенны на основе многослойных линз Люнеберга [1, 2]. Благодаря сферической симметрии такие линзы могут формировать несколько независимых диаграмм направленности в значительно более широком диапазоне углов, чем другие известные типы антенн. При этом обеспечивается высокий уровень изоляции каналов, большая скорость переключения лучей и низкий уровень боковых лепестков. Сферическая симметрия также позволяет осуществить наклон луча без поворота всей антенны и практически без искажения диаграммы направленности.

Несмотря на перечисленные преимущества, линзы Люнеберга до недавних пор находили относительно ограниченное применение в антенной технике из-за технологической сложности изготовления диэлектрической структуры с радиальной зависимостью диэлектрической проницаемости. В последнее время благодаря разработке новых типов электромагнитных материалов с заданными параметрами появилась возможность создания многослойных структур, в которых реализуется распределение диэлектрической проницаемости линзы Люнеберга с приемлемой точностью. Разработаны также технологии изготовления градиентных линз, в которых формируется требуемая зависимость показателя преломления от радиуса [3].

В этой связи важно иметь адекватные средства и методы моделирования дифракции электромагнитных волн на слоисто-неоднородном диэлектрическом шаре. Наиболее детальный обзор методов решения этой задачи дан в работе [4].

Для анализа сферических линзовых антенн, как и для линзовых антенн других типов, широко применяются методы геометрической оптики [3, 5–13]. При этом обычно предполагается, что

\* m\_manuilov@sfedu.ru

линза облучается точечным источником, находящимся на некотором расстоянии от её поверхности. Такой подход даёт приемлемые результаты для случаев, когда размеры линзы много больше длины волны. Для преодоления данного ограничения в работе [14] методика трассировки лучей комбинировалась с теорией дифракции, а в статье [15] для анализа двухслойных линз Люнеберга использовался комбинированный метод трассировки лучей и физической оптики. Во всех вышеперечисленных методиках не учитываются переотражения на границах слоёв, что снижает точность расчётов.

Для слоистых сферических структур однородное уравнение Гельмгольца может быть решено численно-аналитическими методами. Общая схема решения электродинамической задачи для слоистой линзы Люнеберга [16] состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений, следующих из условий непрерывности тангенциальных составляющих векторов напряжённости электрического и магнитного полей на границах раздела слоёв. При этом порядок системы определяется числом слоёв. Из решения указанной системы находятся амплитуды полей в слоях. После этого определяется поле во внешней области, из которого находятся характеристики излучения антенны.

Задаче дифракции плоской волны на телах сферической формы посвящена обширная литература [17, 18]. Впервые она была решена в работе Г. Ми [19]. Подробное описание теории Ми было приведено в монографии [20]. Независимо от Ми эквивалентное решение данной задачи было получено Дебаем в работе, посвящённой давлению света [21]. В обоих случаях электрическое и магнитное поля представляются в виде рядов. Полное поле вне сферы выражается в виде суммы падающего и рассеянного полей. Решение задачи дифракции находится из условий непрерывности компонент поля на границах раздела диэлектрических слоёв.

В дальнейшем решение Ми было обобщено на случай дифракции плоской волны на радиально-неоднородном шаре. В работе [22] была решена задача дифракции плоской волны на двухслойном шаре, а в работе [23] — на диэлектрическом теле, состоящем из произвольного числа концентрических слоёв. Улучшенная методика решения задачи дифракции предложена в статье [24]. Она была модифицирована в [4], где авторам удалось избежать сложного вычисления логарифмических производных.

Разложение в ряд Ми применялось вначале для решения задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на проводящей сфере [25], а затем — на диэлектрической сфере [26]. Позднее задача рассеяния волн на слоистой диэлектрической структуре решалась различными способами: при помощи рядов Ми [27, 28], скалярных потенциалов [29], тензорных функций Грина [30, 31] и метода согласования мод [32, 33]. При этом в ряде работ проводилось исследование антенных характеристик линзы Люнеберга при облучении реальными источниками [33, 34]. В статье [35] рассмотрена двумерная модель такой линзы. В работе [36] получено аналитическое решение интегральных уравнений для потенциалов Дебая в случае однородного или слоистого шара.

В настоящее время для анализа линз Люнеберга всё шире применяются численные методы, такие как метод конечных разностей во временной области [37], метод конечных элементов [38], метод моментов [39, 40]. Преимуществом таких методов является их универсальность и вычислительная гибкость. Это, например, позволяет учесть влияние на антенные характеристики различных конструктивных элементов. Недостатком таких методов является то, что они требуют довольно больших вычислительных ресурсов, а время счёта сильно возрастает при увеличении электрических размеров.

Классическая линза Люнеберга преобразует плоскую электромагнитную волну в сферическую и наоборот. Для исследования зависимости фокусирующих свойств многослойной линзы Люнеберга от числа слоёв необходимо рассмотреть задачу дифракции плоской волны на такой линзе. Данная задача может быть решена как с помощью численных методов, реализованных

в пакетах электродинамического моделирования, так и аналитически. Однако при больших геометрических размерах линзы решение задачи дифракции численными методами может требовать значительных вычислительных ресурсов.

Ниже изложено новое эффективное аналитическое решение задачи дифракции плоской волны на многослойном диэлектрическом шаре. С одной стороны, высокая численная эффективность предложенного решения и его точность позволяют использовать его в качестве вычислительного ядра при синтезе профиля диэлектрической проницаемости многослойной линзы с комплексными диэлектрическими проницаемостями слоёв. С другой стороны, такое решение может рассматриваться как эталонное при тестировании универсальных численных методов.

Кроме того, в данной работе теоретически исследуются резонансные свойства шарообразных металло-диэлектрических частиц в оптическом диапазоне. При резонансе амплитуда электромагнитного поля вблизи наночастицы увеличивается более чем на порядок по сравнению с амплитудой поля падающей волны. Этот эффект используется в сенсорах, биодетекторах, элементах оптических интегральных схем, в флуоресцентной микроскопии и нелинейной спектроскопии [41]. Большинство работ посвящено изучению влияния размеров металлических наночастиц на их резонансные свойства. Исследуются некоторые аспекты влияния размеров и формы частиц на их рассеивающие свойства, в частности сечение экстинкции и рассеянное поле [42, 43]. В данной работе изучаются свойства шарообразных металло-диэлектрических частиц, покрытых диэлектрической оболочкой. Дана оценка границ применимости квазистатического приближения [41] при расчёте металло-диэлектрических наноструктур.

## 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны на диэлектрическом шаре, состоящем из  $N$  однородных concentрических слоёв. Шар расположен в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  и магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , (см. рис. 1). Нумерация слоёв проводится от внешнего слоя к внутреннему, проницаемости слоёв равны  $\varepsilon_i$ ,  $\mu_i$ , радиусы слоёв  $r_i$ , где  $i = 2, 3, \dots, N$ . Падающая плоская волна линейно поляризована, вектор электрического поля направлен вдоль оси  $x$ , а направление её распространения совпадает с осью  $z$ .

Для решения задачи дифракции плоской волны на многослойном шаре воспользуемся представлением компонент поля этой волны через потенциалы Дебая [18]  $A$  (электрический потенциал) и  $F$  (магнитный потенциал). Для волн электрического типа ( $H_r = 0$ ) компоненты электрического ( $\mathbf{E}$ ) и магнитного ( $\mathbf{H}$ ) полей записываются через электрический потенциал Дебая следующим образом:

$$E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \varphi}, \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \theta}, \quad E_r = \frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} + k^2 r A,$$

$$H_\theta = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rA)}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = -i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial \theta}, \quad (1)$$

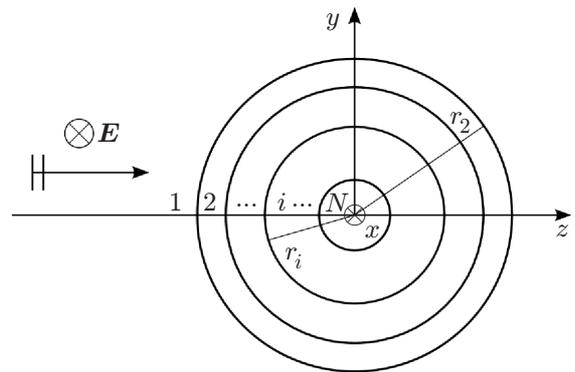


Рис. 1. Постановка задачи дифракции плоской волны на многослойном диэлектрическом шаре

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\omega$  — круговая частота излучения,  $k$  и  $\epsilon$  — волновое число и диэлектрическая проницаемость в точке со сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$  соответственно.

Волновое уравнение, которому должен удовлетворять электрический потенциал Дебая, имеет вид

$$\frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2(rA)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial(rA \sin \theta)}{\partial \theta} \right] + k^2 rA = 0.$$

Отметим, что из условий непрерывности тангенциальных компонент поля на границах слоёв следует непрерывность величин  $\epsilon A$  и  $\partial(rA)/\partial r$ .

Для волн магнитного типа ( $E_r = 0$ ) компоненты поля выражаются через магнитный потенциал Дебая:

$$\begin{aligned} E_\theta &= -i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rF)}{\partial \varphi}, & E_\varphi &= i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rF)}{\partial \theta}, \\ H_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rF)}{\partial r \partial \varphi}, & H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rF)}{\partial r \partial \theta}, & H_r &= \frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2} + k^2 rF, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — магнитная проницаемость в точке со сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$ . Потенциал  $F$  удовлетворяет тому же волновому уравнению и условиям непрерывности на границах слоёв величин  $\mu F$  и  $\partial(rF)/\partial r$ .

Решения волновых уравнений ищем, как обычно, методом разделения переменных [18]. Полагаем, что в плоскости  $y = 0$  расположена магнитная стенка. В  $p$ -м слое рассматриваемой структуры решение запишем в виде [18]

$$A_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{p,n,m} R_{p,n}^a(r) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \tag{3}$$

$$F_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{p,n,m} R_{p,n}^f(r) P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi), \tag{4}$$

где  $a_{p,n,m}$  и  $f_{p,n,m}$  — неизвестные коэффициенты,  $P_n^m(z)$  — присоединённые функции Лежандра. Функции  $R_{p,n}^\sigma(r)$  в (3) и (4) являются решением уравнения

$$\frac{d^2[rR_{p,n}^\sigma(r)]}{dr^2} + \left[ k_p^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] rR_{p,n}^\sigma(r) = 0, \tag{5}$$

где  $\sigma = a, f$ ;  $k_p = \omega \sqrt{\epsilon_p \epsilon_0 \mu \mu_0}$  — волновое число в  $p$ -м слое. При этом должны выполняться условия непрерывности на границах слоёв внутри шара для функций

$$\epsilon_p R_{p,n}^a(r), \quad \frac{d[rR_{p,n}^a(r)]}{dr}, \quad \mu_p R_{p,n}^f(r), \quad \frac{d[rR_{p,n}^f(r)]}{dr}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок потребуем также, чтобы функции  $R_{1,n}^\sigma(r)$  и  $R_{2,n}^\sigma(r)$  из уравнения (5) удовлетворяли условиям нормировки на внешней границе шара:

$$R_{1,n}^\sigma(r_2) = R_{2,n}^\sigma(r_2) = 1. \tag{6}$$

Решение волнового уравнения (5) выражается через сферические функции Бесселя. Для внешней области ( $p = 1$ ) оно имеет вид  $R_{1,n}^\sigma(r) = h_n(k_1 r)/h_n(k_1 r_2)$ , где  $h_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)} H_{n+1/2}^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z)$  — сферические функции Ханкеля 2-го рода,  $j_n(z)$  и  $y_n(z)$  — сферические функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно.

Представим поле вне шара в виде суммы поля падающей волны и рассеянного поля. Для поля падающей волны потенциалы Дебая можно представить в виде следующих рядов:

$$A^{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\text{inc}} \frac{j_n(k_1 r)}{j_n(k_1 r_2)} P_n^m(\cos \theta) \cos \varphi, \tag{7}$$

$$F^{\text{inc}}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\text{inc}} \frac{j_n(k_1 r)}{j_n(k_1 r_2)} P_n^m(\cos \theta) \sin \varphi. \tag{8}$$

В сферической системе координат компоненты электрического поля падающей плоской волны, которая поляризована вдоль оси  $x$ , будут иметь вид

$$E_r^{\text{inc}} = E \sin \theta \cos \varphi, \quad E_{\theta}^{\text{inc}} = E \cos \theta \cos \varphi, \quad E_{\varphi}^{\text{inc}} = -E \sin \varphi, \\ E = \exp(-ik_1 r_2 \cos \theta) \sin \theta \cos \varphi. \tag{9}$$

Из соотношения (9) видно, что в (3) и (4) необходимо положить  $m = 1$ , т. е. остальные члены ряда равны нулю. Используя табличное разложение в ряд [18], найдём коэффициенты в рядах (7) и (8):

$$a_n^{\text{inc}} = \frac{1}{k_1} j_n(k_1 r_2) \frac{2n + 1}{n(n + 1)} (-i)^{n-1}, \quad f_n^{\text{inc}} = \frac{1}{Z_{c,1} k_1} j_n(k_1 r_2) \frac{2n + 1}{n(n + 1)} (-i)^{n-1},$$

где  $Z_{c,1}$  — волновое сопротивление области вне шара. Далее, воспользовавшись условиями непрерывности потенциалов Дебая и их производных на поверхности шара, найдём неизвестные коэффициенты в разложениях (3) и (4) при  $p = 1$ :

$$a_{1,n} = \frac{\varepsilon_1 \dot{R}_{2,n}^a(r_2) - \varepsilon_2 k_1 j'_n(k_1 r_2) / j_n(k_1 r_2)}{\Delta_a} a_n^{\text{inc}}, \quad a_{2,n} = \varepsilon_1 \frac{\dot{R}_{1,n}^a(r_2) - k_1 j'_n(k_1 r_2) / j_n(k_1 r_2)}{\Delta_a} a_n^{\text{inc}}, \tag{10}$$

$$f_{1,n} = \frac{\mu_1 \dot{R}_{2,n}^f(r_2) - \mu_2 k_1 j'_n(k_1 r_2) / j_n(k_1 r_2)}{\Delta_f} f_n^{\text{inc}}, \quad f_{2,n} = \mu_1 \frac{\dot{R}_{1,n}^f(r_2) - k_1 j'_n(k_1 r_2) / j_n(k_1 r_2)}{\Delta_f} f_n^{\text{inc}}, \tag{11}$$

где  $\Delta_a = \varepsilon_2 R_{1,n}^a(r_2) - \varepsilon_1 \dot{R}_{2,n}^a(r_2)$ ,  $\Delta_f = \mu_2 \dot{R}_{1,n}^f(r_2) - \mu_1 \dot{R}_{2,n}^f(r_2)$ , штрих означает производную по аргументу, а точка над переменной здесь и далее обозначает оператор дифференцирования  $\dot{R} \equiv d[rR(r)]/dr$ .

Итак, во внешней области ( $p = 1$ ) электрический и магнитный потенциалы Дебая для рассеянного поля выражаются в виде рядов

$$A_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} R_{1,n}^a(r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \frac{h_n(k_1 r)}{h_n(k_1 r_2)} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \tag{12}$$

$$F_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} R_{1,n}^f(r) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} \frac{h_n(k_1 r)}{h_n(k_1 r_2)} P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi. \tag{13}$$

Компоненты электрического поля могут быть определены через потенциалы Дебая с учётом (1) и (2) в следующем виде:

$$E_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \varphi} + i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rF)}{\partial \theta}, \quad E_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \theta} - i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rF)}{\partial \varphi}. \tag{14}$$

Чтобы определить поле внутри шара, необходимо найти функции  $R_{p,n}^a(r)$  и  $R_{p,n}^f(r)$  в выражениях (3) и (4) при  $p = 2, \dots, N$  и удовлетворить условиям непрерывности для этих функций и их производных.

Будем искать решение в виде

$$R_{p,n}^a(r) = \begin{cases} \frac{K_N}{\varepsilon_N} \frac{j_n(k_N r)}{j_n(k_N r_N)} = \frac{K_N}{\varepsilon_N} \Phi_{N,n}^-(r), & p = N, \quad 0 \leq r \leq r_N; \\ \frac{1}{\varepsilon_p} [K_p \Phi_{p,n}^-(r) + K_{p+1} \Phi_{p,n}^+(r)], & 2 < p < N, \quad r_{p+1} \leq r \leq r_p, \end{cases} \quad (15)$$

где  $K_p$  — неизвестные коэффициенты,  $\Phi_{p,n}^+(r)$  и  $\Phi_{p,n}^-(r)$  — функции, удовлетворяющие уравнению (5) и граничным условиям

$$\Phi_{p,n}^-(r_p) = 1, \quad \Phi_{p,n}^+(r_p) = 0, \quad \Phi_{p,n}^-(r_{p+1}) = 0, \quad \Phi_{p,n}^+(r_{p+1}) = 1, \quad \Phi_{N,n}^+(r_p) = 0. \quad (16)$$

Введённые функции (15) удовлетворяют условиям непрерывности величины  $\varepsilon_p R_{p,n}^a(r)$  при  $r = r_{p+1}$ ,  $p = 2, \dots, N - 1$ . Это значительно упрощает запись условий непрерывности производных  $d[rR_{p,n}^a(r)]/dr$  на границах слоёв при  $r = r_{p+1}$ ,  $p = 2, \dots, N - 1$ . В то же время в известной литературе, например в [4, 32], используется представление решения в слоях в виде линейной комбинации сферических функций Бесселя первого и второго рода, что ведёт к существенно более сложным преобразованиям и итоговым соотношениям. Из условия непрерывности производных  $d[rR_{p,n}^a(r)]/dr$  на границах слоёв при  $r = r_{p+1}$ ,  $p = 2, \dots, N - 1$  получим, используя представление (15):

$$K_p \frac{1}{\varepsilon_p} \dot{\Phi}_{p,n}^-(r_{p+1}) + K_{p+1} \left[ \frac{1}{\varepsilon_p} \dot{\Phi}_{p,n}^+(r_{p+1}) - \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} \dot{\Phi}_{p+1,n}^-(r_{p+1}) \right] = K_{p+2} \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} \dot{\Phi}_{p+1,n}^+(r_{p+1}), \quad (17)$$

$p = N - 1, \dots, 2$ . Из условия нормировки (6) следует

$$R_{2,n}^a(r_2) = K_2/\varepsilon_2 = 1. \quad (18)$$

Соотношения (17) и (18) представляют собой рекуррентную схему для определения неизвестных коэффициентов  $K_p$ . Вычислив эти коэффициенты, находим функцию  $R_{2,n}^a(r)$ , необходимую для удовлетворения граничного условия на поверхности шара:

$$R_{2,n}^a(r) = \frac{1}{\varepsilon_2} [K_2 \Phi_{2,n}^-(r) + K_3 \Phi_{2,n}^+(r)]. \quad (19)$$

Для определения функции  $R_{p,n}^f(r_2)$  в (17)–(19) нужно заменить  $\varepsilon$  на  $\mu$ .

Функции  $\Phi_{p,n}^+(r)$  и  $\Phi_{p,n}^-(r)$ , входящие в (15)–(17) и удовлетворяющие граничным условиям (16), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{p,n}^+(r) &= \frac{1}{\delta} [j_n(k_p r) y_n(k_p r_p) - j_n(k_p r_p) y_n(k_p r)], \\ \Phi_{p,n}^-(r) &= \frac{1}{\delta} [j_n(k_p r) y_n(k_p r_{p+1}) - j_n(k_p r_{p+1}) y_n(k_p r)], \end{aligned}$$

где  $\delta = j_n(k_p r_p) y_n(k_p r_{p+1}) - j_n(k_p r_{p+1}) y_n(k_p r_p)$ .

После вычисления функций  $R_{p,n}^a(r)$  и  $R_{p,n}^f(r)$  в (15) можно определить коэффициенты  $a_{1,n}$  и  $f_{1,n}$  из (10) и (11). Подставляя эти коэффициенты в ряды (12) и (13), определяем потенциалы Дебая рассеянного поля во внешней области с помощью соотношений (14).

Учитывая асимптотику функций Бесселя при больших значениях аргумента, можно показать, что в приближении дальней зоны ( $k_1 r \rightarrow \infty$ ) выражения для потенциалов Дебая и производных принимают вид

$$A_1(r, \theta, \varphi) \sim \frac{1}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \frac{\exp\{-i[k_1 r - \pi(n+1)/2]\}}{h_n(k_1 r_2)} P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial A_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \sim -ik_1 A_1(r, \theta, \varphi),$$

$$F_1(r, \theta, \varphi) \sim \frac{1}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} f_{1,n} \frac{\exp\{-i[k_1 r - \pi(n+1)/2]\}}{h_n(k_1 r_2)} P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial F_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \sim -ik_1 F_1(r, \theta, \varphi).$$

Тогда компоненты электрического поля в дальней зоне определяются формулами

$$E_\varphi \sim ik_1 \left( -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{1}{Z_{c,1}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad E_\theta \sim -ik_1 \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{1}{Z_{c,1}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right).$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложенный аналитический метод характеризуется быстрой сходимостью по числу учитываемых членов в рядах. При проведении практических расчётов это число менялось в пределах от 40 до 60. Скорость сходимости падает при увеличении электрических размеров рассчитываемой структуры. Поэтому при увеличении радиуса линзы по отношению к рабочей длине волны число членов в разложениях (12) и (13) должно быть увеличено. В частности, для 8-слойной линзы, рассмотренной ниже, требуется учитывать 45 членов при суммировании рядов для достижения погрешности порядка сотых долей процента.

Преимущество и эффективность предложенного метода определяются простой и быстрой рекуррентной схемой, работающей при произвольном числе диэлектрических слоёв с комплексными диэлектрическими проницаемостями. При этом время счёта для одной частотной точки составляет менее 1 с на современном персональном компьютере, что на несколько порядков меньше времени счёта известных коммерческих программ, реализующих универсальные численные электродинамические методы.

Для тестирования изложенного аналитического метода было исследовано рассеянное поле в случае однослойного, двухслойного и трёхслойного диэлектрического шара при падении плоской волны с частотой  $f_0 = 2$  ГГц. Радиусы слоёв, составлявших трёхслойный шар, равны 150, 200 и 250 мм, их диэлектрические проницаемости 1,77; 1,50 и 1,40 соответственно. Все диэлектрические материалы имели магнитную проницаемость, равную 1, и не имели потерь.

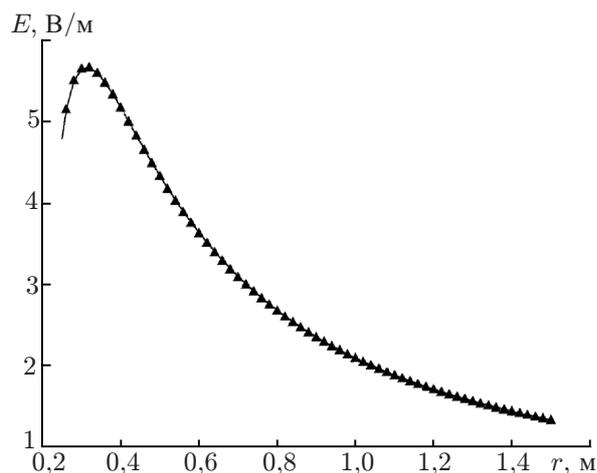


Рис. 2. Радиальная зависимость напряжённости электрического поля волны, рассеянной на трёхслойном шаре (отсчёт  $r$  ведётся вдоль направления распространения волны),  $r_2 = 250$  мм,  $r_3 = 200$  мм,  $r_4 = 150$  мм,  $\varepsilon_2 = 1,4$ ,  $\varepsilon_3 = 1,5$ ,  $\varepsilon_4 = 1,77$ ,  $f_0 = 2$  ГГц, символы  $\blacktriangle$  соответствуют [44], сплошная линия — рассматриваемому методу

Те же задачи решались при помощи численных методов, реализованных в программном пакете [44]. При этом для расчёта дифракции на однослойном шаре применялся метод конечных элементов, а для многослойных шаров — метод моментов. На рис. 2 представлена рассчитанная амплитуда рассеянного электрического поля во внешней области. Амплитуда падающего поля здесь и далее равна 1 В/м. Радиальная зависимость поля рассчитывалась в направлении распространения волны. Также были вычислены зависимости амплитуды рассеянного поля от угловых координат в  $E$ - и  $H$ -плоскостях. Во всех случаях наблюдается графическое совпадение результатов, полученных изложенным аналитическим методом и численными методами.

Отметим, что предложенное решение позволяет также анализировать в оптическом диапазоне металло-диэлектрические структуры, например наночастицы золота, серебра, покрытые диэлектрической оболочкой. При расчёте учитывались зависимости показателей преломления металлов от длины волны. Комплексные показатели преломления серебра, золота, меди и алюминия взяты из [45].

Для определения минимального числа слоёв, необходимых для фокусировки параллельного пучка лучей, рассматривалась дифракция плоской волны на диэлектрическом многослойном шаре при различном числе слоёв, аппроксимирующей требуемый гладкий профиль диэлектрической проницаемости. Заданный профиль диэлектрической проницаемости определялся выражением [9], которое является обобщением формулы Лüneберга для геометрической оптики:

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{\bar{F}^2} \left[ 1 + \bar{F}^2 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (20)$$

где  $R = r_2$  — внешний радиус линзы,  $\bar{F} = R_F/R$  — нормированное на радиус линзы фокусное расстояние,  $R_F$  — расстояние от центра линзы до точки фокуса.

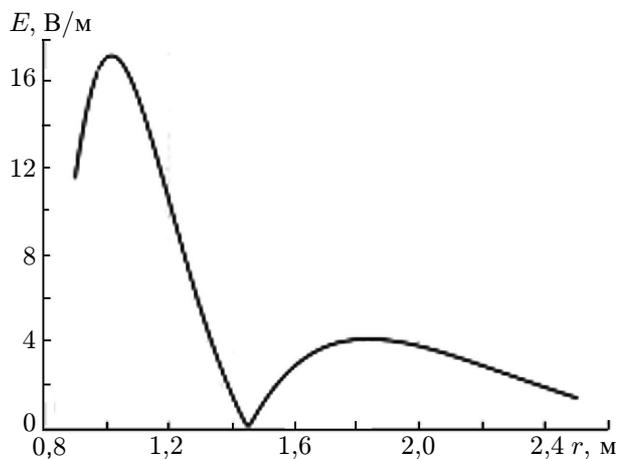


Рис. 3. Радиальная зависимость напряжённости электрического поля волны, рассеянной на восьмислойном шаре (отсчёт  $r$  ведётся вдоль направления распространения волны)

Зависимости амплитуды электрического поля, рассеянного на восьмислойной диэлектрической линзе ( $\bar{F} = 1,1$ ), от радиальной и угловых координат приведены на рис. 3 и 4.

Радиусы слоёв данного шара равны 112,5; 225,0; 337,5; 450,0; 562,5; 675,0; 787,5; 900,0 мм, а диэлектрические проницаемости слоёв 1,82; 1,79; 1,74; 1,66; 1,56; 1,43; 1,27; 1,09 (см. рис. 1), частота  $f_0 = 2$  ГГц. Приведённые зависимости показывают, что структура обладает ярко выраженным фокусом, расположенным на расстоянии около 1 м от центра линзы, в котором напряжённость электрического поля более чем на порядок превышает амплитуду падающей волны. Поле быстро спадает по мере удаления от фокуса как по радиальной, так и по угловым координатам. Рассчитанное фокусное расстояние соответствует взятому в формуле (20) значению  $\bar{F} = 1,1$ .

Были исследованы зависимости напряжённости электрического поля в максимуме его распределения (фокусе) от числа слоёв при различных частотах падающей волны для структуры при  $\bar{F} = 1,1$  и  $R = 900$  мм. При этом профиль диэлектрической проницаемости линзы аппроксимировался однородными слоями с одинаковой толщиной, т. е. при числе слоёв  $N$  толщина каждого слоя равнялась  $\Delta r = R/N$ . Было установлено, что с увеличением числа слоёв, аппроксимирующих профиль диэлектрической проницаемости линзы, напряжённость электрического поля  $E$

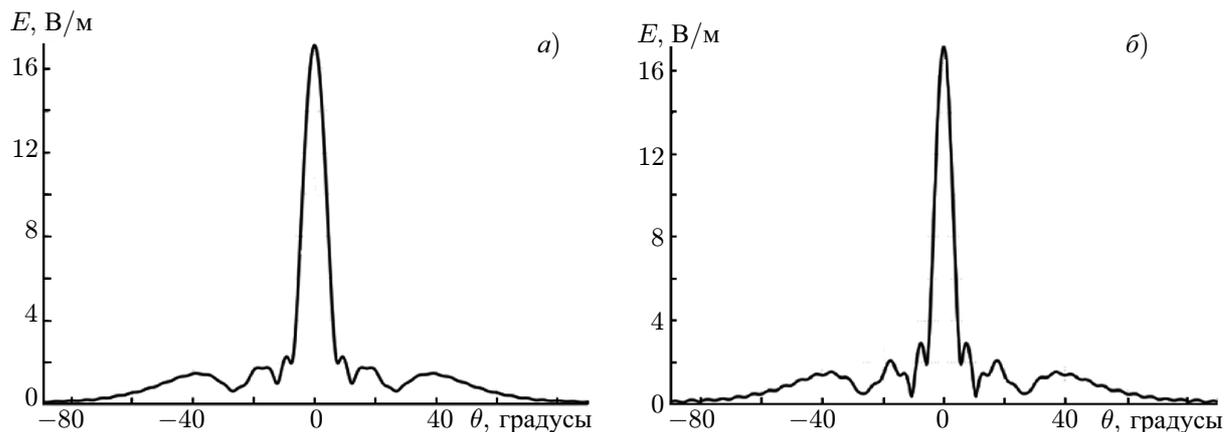


Рис. 4. Угловое распределение напряжённости электрического поля волны, рассеянной на восьмислойном шаре, в плоскостях векторов  $\mathbf{E}$  (а) и  $\mathbf{H}$  (б); значение  $r$  соответствует положению максимума величины  $E$

в точке фокусировки возрастает нелинейно и, начиная с некоторого значения, остаётся практически постоянной. При этом зависимость величины  $E$  в максимуме её распределения от числа слоёв усиливается с ростом рабочей частоты. Например, для линзы, работающей в двух стандартных диапазонах мобильной связи  $690 \div 960$  МГц и  $1710 \div 2690$  МГц, наиболее сильная зависимость наблюдается для частоты 2690 МГц. Для практических задач в указанном диапазоне достаточно брать значение  $N = 8$ , при котором напряжённость поля в максимуме близка к предельной величине.

Следует отметить, что оптимальное число слоёв обусловлено не только электрическими размерами линзы, но и технологией её изготовления. При наличии технологии создания слоёв произвольного радиуса число слоёв может быть уменьшено [46].

Рассмотрим резонансные свойства сферических металло-диэлектрических наночастиц. Расчёт дифракции на наночастицах имеет свои особенности. Размеры наночастиц, в отличие от размеров линзы Люнеберга, меньше или соизмеримы с длиной волны. Это позволяет использовать полученные формулы при небольшом числе членов рядов. Однако действительная и мнимая часть диэлектрической проницаемости в этом случае — это величины одного порядка. Это потребовало разработать процедуры расчёта функций Бесселя комплексного аргумента.

Как известно [41], для наночастиц с размерами много меньше длины волны в свободном пространстве справедливо квазистатическое приближение, при котором резонансная длина волны не зависит от диаметра шара, а определяется только диэлектрическими проницаемостями наночастицы и её окружения. Численные эксперименты показали, что квазистатическое приближение позволяет оценить резонансные характеристики с ошибкой менее 3 % при отношении размеров частиц к длине волны не более 5 %.

На рис. 5–7 приведены результаты расчёта напряжённости полного электрического поля при дифракции плоской волны на наночастицах золота и серебра. Увеличение диэлектрической проницаемости оболочки плазмонной наночастицы приводит к сдвигу по частоте максимума рассеяния. Изменение диэлектрической проницаемости оболочки от 1,5 до 2,0 приводит к росту максимума напряжённости полного (рассеянного плюс падающего) поля примерно в 1,8 раза (см. рис. 5). Аналогичный эффект наблюдается при увеличении толщины оболочки (см. рис. 6).

На рис. 7 приведены зависимости напряжённости поля от длины волны для трёхслойной структуры. При изменении диэлектрической проницаемости внешнего слоя от 1,6 до 2,0 максимум напряжённости полного поля возрастает примерно в 1,5 раза. Резонансная длина волны

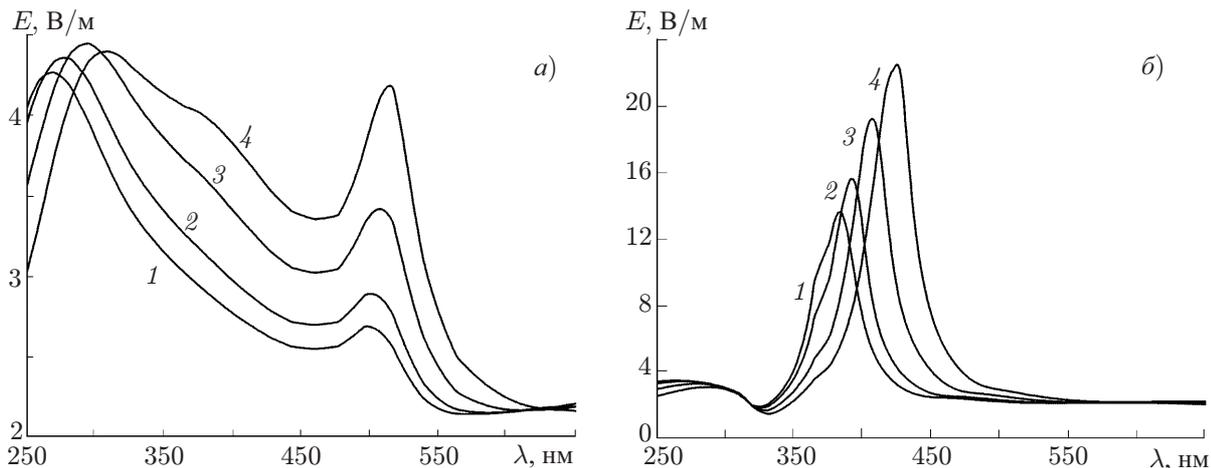


Рис. 5. Зависимость напряжённости электрического поля от длины волны  $\lambda$  для золотых (а) и серебряных (б) сфер с радиусом 150 нм, покрытых оболочкой с внешним радиусом 200 нм и  $\epsilon = 1,5$  (кривая 1);  $\epsilon = 1,6$  (2);  $\epsilon = 1,8$  (3) и  $\epsilon = 2,0$  (4). Расстояние от центра сферы равно 300 нм (в направлении распространения волны)

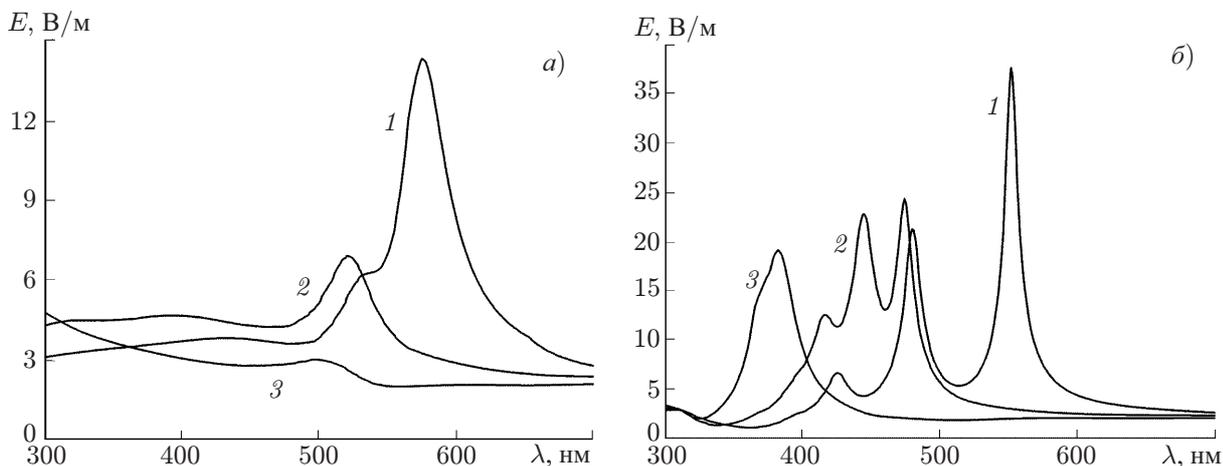


Рис. 6. Зависимость напряжённости электрического поля от длины волны для золотых (а) и серебряных (б) сфер с радиусами 150 нм (кривая 1); 175 нм (2) и 200 нм (3), покрытых диэлектрической оболочкой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,5$ . Внешний радиус сфер равен 250 нм. Расстояние от центра сферы 300 нм (в направлении распространения волны)

в рассмотренном случае также увеличивается. Следует отметить, что в структурах с большим числом слоёв проще получать необходимые резонансные свойства, т. к. изменения в одном из слоёв меньше влияют на общую характеристику.

### ВЫВОДЫ

Получено аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на многослойном диэлектрическом шаре с произвольным числом диэлектрических слоёв с произвольными радиусами и диэлектрическими проницаемостями. Решение построено методом разделения переменных. Используются представления полей в слоях через потенциалы Дебая, которые записаны в виде рядов по присоединённым функциям Лежандра и сферическим функциям Бесселя. Получены новые рекуррентные соотношения для расчёта полей в слоях, которые обеспе-

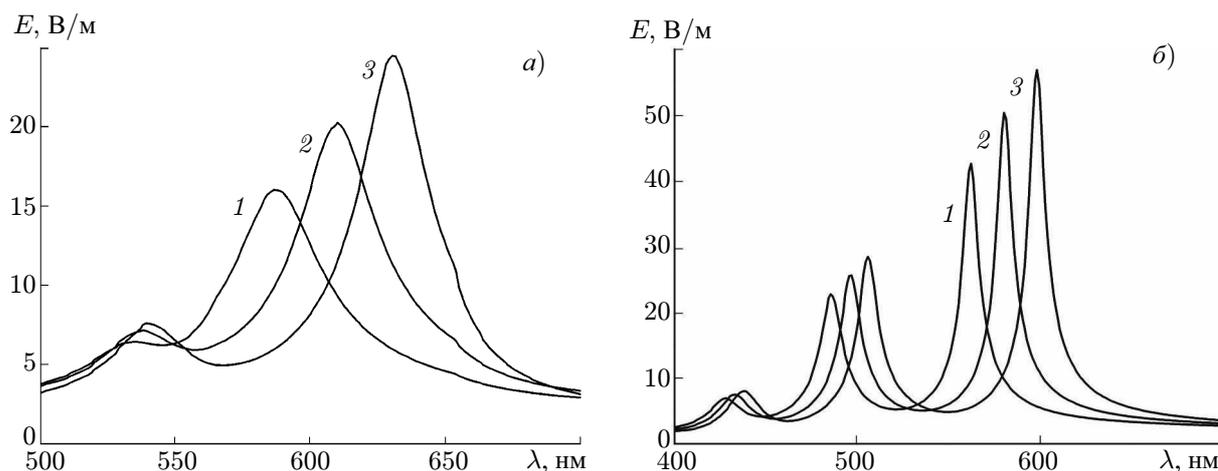


Рис. 7. Зависимость напряжённости электрического поля от длины волны для золотых (а) и серебряных (б) сфер с радиусом 150 нм, покрытых двумя диэлектрическими оболочками. Радиус внутренней оболочки равен 200 нм, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1,5$ . Внешний радиус равен 250 нм, диэлектрические проницаемости  $\varepsilon = 1,6$  (кривая 1); 1,8 (2) и 2,0 (3). Расстояние от центра сферы составляет 300 нм (в направлении распространения волны)

чивают высокую численную эффективность решения. Новизна и эффективность предложенного метода связаны с формой записи радиальной части решения, которая представлена в виде нормированных функций, удовлетворяющих условию непрерывности потенциалов Дебая на границах раздела слоёв. Получены аналитические представления для компонентов рассеянного поля в ближней и дальней зонах дифракции. Высокая точность и достоверность полученного решения подтверждена исследованием внутренней сходимости решения и сравнением с численными методами.

На основе полученного решения проведён анализ распределения рассеянного поля плоской волны на сферических линзах радиочастотного диапазона. С увеличением числа слоёв, аппроксимирующих профиль диэлектрической проницаемости линзы, напряжённость электрического поля в точке фокусировки возрастает и достигает предельного значения, что позволяет определить минимальное необходимое число слоёв в практических задачах. Установлено, что в рассмотренном примере при разработке сферических линзовых антенн базовых станций мобильной связи достаточно ограничиться 8-слойной структурой. Разработанный метод может эффективно применяться при проектировании и создании различных линзовых антенн, а также при исследовании в оптическом диапазоне металло-диэлектрических структур, например наночастиц из золота, серебра и других металлов, покрытых диэлектриком.

Анализ границ применимости квазистатического приближения при расчётах металло-диэлектрических наноструктур показал, что оно обеспечивает погрешность менее 3 % при отношениях размеров частиц к длине волны не более 0,05. Показано, что резонансные свойства металлических наносфер при их покрытии диэлектрическими оболочками с высоким коэффициентом преломления становятся более выраженными.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев П. О., Мануилов М. Б., Матыцин С. М., Следков В. А. // Антенны. 2015. № 3. С. 16.
2. Скородумов А. И. Многоканальные антенные системы сотовой связи нового поколения с оптимальной пространственно-частотной фильтрацией. Автореферат дисс. ... докт. техн. наук.

- М.: Московский авиационный институт (Государственный технический университет), 2010. 39 с.
3. Калошин В. А. // 13-я Междунар. Крымская конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо-2003). Севастополь, 8–12 сентября 2003. С. 387.
  4. Shore R. A. // IEEE Antennas and Propag. Magazine. 2015. V. 57, No. 6. P. 69.
  5. Morgan S. P. // IRE Transactions on Antennas and Propagation, 1959. V. 7, No. 4. P. 342.
  6. Калошин В. А. // Радиотехника и электроника. 1973. № 1. С. 26.
  7. Kaloshin V. A.; Venetsky A. S. // 7th Intern. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ). Kharkov, 2–5 June 1998. P. 157.
  8. Sanford J. R. Spherically stratified microwave lenses: Ph.D. thesis. Lausanne: Ecole Polytechnique federale de Lausanne, 1992.
  9. Lock J. A. // J. Opt. Soc. America. A. 2008. V. 25, No. 12. P. 2971.
  10. Braun E. // IRE Transactions on Antennas and Propagation. 1956. V. 4, No. 2. P. 132.
  11. Rhys T. A. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1970. V. 18, No. 4. P. 497.
  12. Зелкин Е. Г. Петрова Р. А. Линзовые антенны. М.: Сов. радио, 1974. 280 с.
  13. Венецкий А. С., Калошин В. А. // Журнал радиоэлектроники. 2008. № 5. Статья 3.
  14. Schoenlinner B., Wu X., Ebling J. P., et al. // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2002. V. 50, No. 9. P. 2166.
  15. Fernandes C. A. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1999. V. 41, No. 5. P. 141.
  16. Chew W. C. Waves and fields in inhomogeneous media. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. 608 p.
  17. Logan N. A. // Proc. IEEE. 1965. V. 53, No. 8. P. 773.
  18. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 713 с.
  19. Mie G. // Annalen der Physik. 1908. V. 330, No. 3. P. 377.
  20. Hergert W., Wriedt T. The Mie theory: basics and applications. Springer series in optical sciences. Berlin: Springer, 2012. 259 p.
  21. Debye P. // Annalen der Physik. 1909. V. 335, No. 11. P. 57.
  22. Aden A. L., Kerker M. // J. Appl. Physics. 1951. V. 22, No. 10. P. 1242.
  23. Wait J. R. // Applied Scientific Research. B. 1962. V. 10, No. 5–6. P. 441.
  24. Wu Z. S., Wang Y. P. // Radio Science. 1991. V. 26, No. 6. P. 1393.
  25. Stratton J. A. Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941. 615 p.
  26. Harrington R. F. Time-harmonic electromagnetic fields. New York: McGraw-Hill, 1961. 480 p.
  27. Mikulski J., Murphy E. L. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1963. V. 11, No. 2. P. 169.
  28. Mieras H. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1982. V. 30, No. 6. P. 1221.
  29. Vinogradov S., Vinogradova E., Smith P. // Intern. Conf. Electromagnetics in Advanced Applications. 15–17 September, 1999, Torino, Italy. P. 277.
  30. Li L.-W., Kooi P.-S., Leong M.-S., et al. // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 1994. V. 42, No. 12. P. 2302.
  31. Комарова Е. В. Антенные и дифракционные характеристики многослойной линзы Люнеберга: Дисс. ... канд. техн. наук. Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2012. 131 с.
  32. Sanford J. R. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1994. V. 42, No. 5. P. 690.
  33. Fuchs B., Palud S., Le Coq L., et al. // IEEE Trans. Anten. Propag. 2008. V. 56, No. 2. P. 450.
  34. Rondineau S., Nosich A. I., Daniel J.-P., et al. // IEEE Trans. Anten. Propag. 2004. V. 52, No. 5. P. 1270.
  35. Ахияров В. В. // Журнал радиоэлектроники. 2015. № 12. Статья 13.
  36. Lerer A., Donets I., Bryzgalov S. // J. Electromagnetic Waves and Applications. 1996. V. 10, No. 6. P. 765.

37. Godi G., Sauleau R., Thouroude D. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2005. V. 53, No. 4. P. 1278.
38. Greenwood A. D., Jin J.-M. // IEEE Trans. Anten. Propag. 1999. V. 47, No. 8. P. 1260.
39. Zoric D. P., Olcan D. I., Kolundzija B. M. // 2012 Intern. Symposium on Antennas and Propag. (ISAP). 29 October–2 November 2012. Nagoya, Japan. P. 918.
40. Sipus Z., Burum N., Bartolic J. // Microwave and Optical Technology Lett. 2003. V. 36, No. 4. P. 276.
41. Климов В. В. Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2009. 480 с.
42. Peng S., McMahon J. M., Schatz G. C., et al. // Proc. Nath. Acad. Sci. USA. 2010. V. 107, No. 33. P. 14530.
43. Jain P. K., Lee K. S., el-Sayed I. H., el-Sayed M. A. // J. Phys. Chem. B. 2006. V. 110. P. 7238.
44. EMSS FEKO. <https://altairhyperworks.com/product/FEKO>.
45. <http://www.luxpop.com>.
46. Fuchs B., Le Coq L., Lafond O., Rondineau S. // IEEE Trans. Anten. Propag. 2007. V. 55, No. 2. P. 283.

Поступила в редакцию 25 мая 2018 г.; принята в печать 26 июля 2018 г.

## SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON A MULTILAYER SPHERICAL LENS

*P. O. Afanasyev, A. A. Akopov, A. M. Lerer, and M. B. Manuilov*

We propose an analytical solution of the problem of diffraction of a plane electromagnetic wave by a multilayer dielectric (including plasmon) sphere. The solution is obtained by the method of variable separation. New efficient recurrence relationships are obtained for calculations of the fields in layers, as well as formulas for the fields in the near and far diffraction zones. The novelty of the proposed solution is connected with the way of representing its radial part in the form of normalized functions. It is shown that as the number of the lens layers, which approximate the smooth profile of dielectric permittivity, grows, the electric field at the focusing point increases and reaches the maximum value. This allows one to determine the minimum required number of layers in practical problems. Resonance properties of metal-dielectric nanoparticles are studied in the optical band.