УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В СТЕРЖНЕВЫХ РЕЗОНАТОРАХ С ЖЁСТКИМИ ГРАНИЦАМИ

В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Проводится теоретическое исследование нелинейных акустических эффектов (амплитудно-зависимых потерь, сдвига резонансных частот и генерации второй гармоники) и определяются пороги параметрической генерации субгармонических колебаний на дробных частотах в стержневых резонаторах с жёсткими границами и различными видами нелинейности (упругой, гистерезисной, разномодульной).

ВВЕДЕНИЕ

Распространение упругих волн в различных средах сопровождается разнообразными нелинейными акустическими эффектами. При заданных амплитудах первичных волн эти эффекты определяются нелинейными, диссипативными и дисперсионными свойствами среды [1–4]. Акустические свойства однородных сред характеризуются слабой безынерционной (частотно-независимой) упругой нелинейностью (квадратичной для продольных деформаций и волн), линейной диссипацией и практически полным отсутствием дисперсии скорости звука (вплоть до гиперзвуковых частот). При распространении в таких средах интенсивной первоначально гармонической волны (волны накачки) вначале происходит синхронная генерация высших (кратных) гармоник и нелинейное искажение этой волны, затем она затухает и в итоге становится слабой и гармонической. Аналогичные нелинейные эффекты проявляются и в резонаторах, где структура волн стоячая, при этом в них также генерируются высшие гармоники. Если же в резонаторе реализуются необходимые условия для резонансных трёхчастотных взаимодействий «избранных» волн, в такой системе может наблюдаться параметрическая генерация волн на дробных частотах, т. е. суб- и ультрагармоник [4]. К таким необходимым условиям относятся достаточно сильное возбуждение резонатора на частоте, близкой к одной из его высших резонансных частот, и высокочастотная дисперсия фазовой скорости. С одной стороны, такая дисперсия предотвращает эффективную генерацию кратных гармоник волны накачки и её нелинейное поглощение, а с другой — приводит к не очень большому рассинхронизму взаимодействия резонансных низкочастотных (НЧ) субгармонических волн с относительно высокочастотной волной накачки [4]. Для подавления каскадных процессов генерации высших гармоник волны накачки и предотвращения её нелинейного поглощения предлагалось также введение линейного частотно-селективного поглощения [5, 6].

Генерация волн на дробных частотах в плоских жидкостных и твёрдотельных резонаторах (интерферометрах) наблюдалась и исследовалась в работах [7–14], где синхронизм взаимодействия «избранных» мод обеспечивался за счёт волноводной дисперсии. Такие устройства получили название параметрических генераторов звука. Для возбуждения субгармонических колебаний в резонаторах с отражающими границами необходимо, чтобы эти границы были акустически жёсткими, т. к. при отражении от мягких границ у волны напряжения меняется фаза и накопления квадратичных эффектов не происходит [11, 12]. Другими словами, для параметрического возбуждения субгармонических колебаний необходимо, чтобы структура вынуждающей силы

* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

распределённого источника нелинейных колебаний в резонаторе соответствовала его собственной функции. В связи с этим в работах [15–18] для параметрической генерации был использован кольцевой резонатор (из алюминия), где проблемы, связанной с поворотом фазы на π при отражении волны от границ, нет, т. к. нет самих границ. В кольцевом резонаторе, однако, кроме слабо-диспергирующих продольных волн, возбуждаются также и сильно диспергирующие изгибные волны, что, вообще говоря, затрудняет измерение амплитуд продольных и изгибных волн и усложняет описание нелинейных волновых процессов. Таким образом, вопросы, связанные с проявлением нелинейных акустических эффектов для продольных волн в твердотельных стержневых резонаторах с жёсткими границами, включая параметрическую генерацию волн на дробных частотах, изучены недостаточно полно. В наибольшей степени это относится к резонаторам из микронеоднородных твёрдых материалов (поликристаллических металлов и горных пород), обладающих сильной нелинейностью (гистерезисной, разномодульной и т. д.).

С точки зрения изучения нелинейных свойств среды параметрическая генерация волн на дробных частотах представляет практический интерес. Это связано с тем, что, во-первых, эффект деления частоты имеет пороговый характер, т. е. субгармоники возникают только при превышении критической, так называемой пороговой, амплитуды волны накачки, и, во-вторых, в спектре волны накачки дробные частоты отсутствуют (в отличие от «паразитных» высших гармоник, обусловленных нелинейностью излучающей и приёмной аппаратуры). По измеренной в эксперименте пороговой амплитуде деформации волны накачки можно определить эффективный параметр нелинейности среды в резонаторе.

В работах [9, 11, 17, 18] при теоретическом описании параметрических генераторов звука полагалось, что материал резонатора обладает квадратичной упругой нелинейностью, характерной для однородных сред [1, 2]. Более разнообразные акустические свойства имеют микронеоднородные среды, содержащие нелинейные вязко-упругие дефекты [19–21]. Для таких сред характерна не только дисперсия скорости звука (правда, не очень сильная), но и дисперсия нелинейности; сама же нелинейность подобных сред (в НЧ диапазоне) значительно превышает нелинейность однородных сред, а с ростом частоты уменьшается [20, 21]. Кроме того, акустическая нелинейность микронеоднородных твёрдых тел, как правило, является неаналитической, в частности гистерезисной, разномодульной и т. д. Таким образом, в резонаторах из микронеоднородных сред можно реализовать более благоприятные условия для параметрической генерации волн на дробных частотах, при этом за счёт более сильной нелинейности порог их возбуждения (в НЧ диапазоне) может быть ниже, чем в резонаторах из однородных сред. Изучение закономерностей параметрической генерации субгармонических колебаний в стержневых резонаторах (вместе с другими нелинейными эффектами) можно использовать для выявления механизмов акустической нелинейности различных сред и создания нелинейных методов их диагностики.

В данной работе проводится теоретическое исследование нелинейных акустических эффектов, возникающих при возбуждении в стержневом резонаторе с жёсткими границами продольных гармонических колебаний: выявляются амплитудные зависимости нелинейных потерь, сдвига резонансных частот и амплитуды второй гармоники и определяются условия и пороги параметрической генерации НЧ субгармонических колебаний. Рассматриваются различные виды акустической нелинейности материала резонатора: квадратичная упругая, квадратичная гистерезисная и разномодульная.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исследуем нелинейные волновые процессы в стержневом резонаторе с жёсткими границами. Спектр собственных частот для продольных колебаний такого резонатора будет почти эквидистантным, а его собственные функции будут соответствовать вынуждающей силе распределённого источника нелинейных колебаний.

В НЧ диапазоне, т. е. при $\Omega \ll \Omega_{\rm rel}$, уравнение состояния материала резонатора (в том числе и микронеоднородного) с учётом линейной диссипации можно представить в виде

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)] + \alpha\rho\dot{\varepsilon}, \tag{1}$$

где σ и ε — продольные напряжение и деформация, E и $f(\varepsilon)$ — модуль упругости (для стержня это модуль Юнга) и нелинейная (в том числе и гистерезисная) функция (малая нелинейная поправка к линейному закону Гука), $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| \ll \varepsilon^* \ll 1$, α — коэффициент линейной диссипации, ρ — плотность, ε^* — предел упругости, при превышении которого в твёрдом теле возникают необратимые пластические деформации и происходит его разрушение (для многих материалов $\varepsilon^* > 10^{-4}\div 10^{-3}$), Ω и $\Omega_{\rm rel}$ — частота деформирования материала и частота релаксации его дефектов соответственно [20, 21].

Подставляя (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [1–4, 22] и учитывая геометрическую дисперсию продольных акустических волн в стержне [4, 23], получим одномерное волновое уравнение для продольных (вдоль оси x) смещений $U = U(x,t)$:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_x + \alpha U_{xxt} + \nu^2 r_0^2 (U_{tt} - C_{\rm sh}^2 U_{xx})_{xx}, \tag{2}$$

где индексы с t и x означают соответствующие частные производные по времени t и координате x, $\varepsilon = U_x$, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость низкочастотной продольной волны в стержне, $C_{\rm sh} = (\mu/\rho)^{1/2} = \{E/[2(1+\nu)\rho]\}^{1/2} = C_0/[2(1+\nu)]^{1/2}$ — скорость сдвиговой волны, ν — коэффициент Пуассона, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ — модуль сдвига, $r_0 = R/\sqrt{2}$, R — радиус стержня, $R < \Lambda$, Λ — длина волны.

Для резонатора с жёсткими границами ($x = 0$ и $x = L$) граничные условия имеют вид

$$U(x=0,t) = A_0 \sin(\Omega t), \qquad U(x=L,t) = 0, \tag{3}$$

где A_0 и Ω — амплитуда и частота возбуждения резонатора соответственно, L — его длина.

Из уравнений (2) и (3) находим линейное дисперсионное соотношение, резонансные частоты Ω_p и собственные волновые числа K_p резонатора [4]:

$$\Omega(K) = \pm C_0 K \sqrt{\frac{1 + \nu^2 r_0^2 K^2 C_{\rm sh}^2/C_0^2}{1 + \nu^2 r_0^2 K^2}}, \qquad \Omega_{\rm p} = C_0 K_{\rm p} \sqrt{\frac{1 + \nu^2 r_0^2 K_{\rm p}^2/[2(1+\nu)]}{1 + \nu^2 r_0^2 K_p^2}}, \tag{4}$$

где K — волновое число, $K_p = \pi p/L = pK_1$, $K_1 = \pi/L$, p — номер продольной моды, $p = 1, 2, 3 \ldots$. Отметим, что здесь дисперсионный параметр $\xi = \nu^2 r_0^2 K_p^2$ необязательно мал, т. к. выражения (4) применимы при $KR \le 6$ [23] и, следовательно, $\xi \le 18\nu^2$. При $\nu = 0{,}3$ имеем $\xi \le 1{,}62$.

Для решения уравнений (2) и (3) используем замену

$$V(x,t) = U(x,t) - A_0[(L-x)/L]\sin(\Omega t), \tag{5}$$

при которой граничные условия для $V(x,t)$ становятся нулевыми:

$$V(x=0,t) = 0, \qquad V(x=L,t) = 0. \tag{6}$$

Будем рассматривать вынужденные резонансные колебания резонатора вблизи резонанса моды с номером p, когда $\Omega = \Omega_p + \delta$ и $|U(x,t)| \gg A_0$, $V(x,t) \approx U(x,t)$, $\varepsilon(x,t) = U_x(x,t) \approx V_x(x,t)$, где $\delta = \Omega - \Omega_p$, $|\delta| \ll \Omega_p/p$. В этом случае в нелинейном резонаторе будут возбуждаться высшие гармоники с частотами $n\Omega$ и, кроме того, при $p \ge 2$ возможна также параметрическая генерация

НЧ волн с дробными частотами $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$, близкими к резонансным, где n и k — целые числа, $1 \le k \le p-1$, так что $\Omega_l/\Omega_s = k/(p-k)$, $\Omega = \Omega_l + \Omega_s$. Более высокочастотные волны высших гармоник (из-за дисперсии фазовой скорости) будут иметь некоторую частотную расстройку от соответствующих резонансов, и вследствие этого (а также и из-за диссипации) их амплитуды будут малы (относительно амплитуды волны накачки). Такие волны не будут влиять на возбуждение НЧ субгармонических волн. Подставляя (5) в (3), получим волновое уравнение, в правой части которого находятся слагаемые, описывающие нелинейность, линейные диссипацию, дисперсию и внешнюю силу:

$$V_{tt} - C_0^2 V_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_x + \alpha V_{xxt} + \nu^2 r_0^2 (V_{tt} - C_{\mathrm{sh}}^2 V_{xx})_{xx} + \frac{A_0 \Omega^2 (L-x)}{L} \sin(\Omega t). \tag{7}$$

Отметим, что при использовании в уравнении (2) простой замены (5) получившееся уравнение (7) имеет наиболее простую форму. Можно, конечно, применять и более сложную замену функции $U(x,t)$ на $V(x,t)$, также отвечающую нулевым граничным условиям (6). Однако при этом уравнение для $V(x,t)$ будет иметь более сложный вид (и более сложное решение). В итоге при обратном переходе от более сложного решения для $V(x,t)$ к $U(x,t)$ получится тот же результат, что и при замене (5).

Решение уравнения (7) будем искать методом возмущений, полагая, что

$$V(x,t) = V_1(x,t) + W(x,t) = V_1 \sin(K_p x) \sin\vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} V_n \sin(nK_p x) \sin(n\vartheta + \varphi_n) + \\ + V_l(t) \sin(K_k x) \sin[k\vartheta/p + \varphi_l(t)] + V_s(t) \sin(K_{p-k} X) \sin[(p-k)\vartheta/p + \varphi_s(t)], \tag{8}$$

где $V_1(x,t) = V_1 \sin(K_p x) \sin\vartheta$, $\vartheta = \Omega t + \varphi_1$,

$$W(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n \sin(nK_p x) \sin(n\vartheta + \varphi_n) + V_l(t) \sin(K_k x) \sin[k\vartheta/p + \varphi_l(t)] + \\ + V_s(t) \sin(K_{p-k} x) \sin[(p-k)\vartheta/p + \varphi_s(t)]$$

— малая поправка, $|W_x(x,t)| \ll |\varepsilon_1(x,t)| \equiv |V_{1x}(x,t)|$; V_1, V_n и φ_1, φ_n — амплитуды и фазы колебаний на частотах Ω и $n\Omega$, $V_l(t)$, $V_s(t)$ и $\varphi_l(t)$, $\varphi_s(t)$ — амплитуды и фазы колебаний на частотах $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$ соответственно.

Методика решения нелинейного волнового уравнения (7) при определении нелинейных акустических эффектов в резонаторе описана в работе [24], поэтому далее мы не будем останавливаться на её подробном изложении.

2. КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ С УПРУГОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Вначале мы рассмотрим колебания в резонаторе с наиболее простой аналитической нелинейностью — упругой квадратичной. В этом случае нелинейная функция в уравнении состояния (1) соответствует нелинейности однородного твёрдого тела, следующей из пятиконстантной теории упругости [1, 2, 4, 22]: $f(\varepsilon) = \gamma\varepsilon^2$, где γ — параметр нелинейности, $|\gamma| < 10$. В таком резонаторе (во втором приближении) имеет место генерация второй гармоники и (при превышении порога параметрической генерации) возбуждение субгармоник с частотами $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$.

В допороговом режиме, т. е. до возбуждения субгармоник ($V_l(t) = V_s(t) = 0$), выражения для амплитуды $\varepsilon_1 = K_p V_1$ и фазы φ_1 колебаний в резонаторе на частоте возбуждения имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{A_0 \Omega_p / L}{[\delta^2 (1+\xi)^2 + (\alpha K_p^2/2)^2]^{1/2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\alpha K_p^2}{2(1+\xi)\,\delta}. \tag{9}$$

Добротность p-й моды такого резонатора определяется выражением

$$Q_p = \frac{(1+\xi)\Omega_p}{\alpha K_p^2} = \frac{\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}C_0^2}{\alpha\Omega_p} = \frac{C_0 L}{\alpha\pi p}\left\{\frac{1+\xi/[2(1+\nu)]}{1+\xi}\right\}^{1/2}.$$

В резонансе (при $\delta = 0$, $\Omega = \Omega_p$) получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{2(A_0/L)C_0^2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}{\alpha\Omega_p(1+\xi)} = \frac{2(A_0/L)Q_p}{1+\xi}.$$

Амплитуда деформации $\varepsilon_2 = K_{2p}V_2 = 2K_pV_2$ и фаза φ_2 колебаний в резонаторе на частоте 2Ω определяются выражениями

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma\varepsilon_1^2\Omega_p(1+\xi)/\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}{8\left(\left\{\delta(1+4\xi) + \dfrac{3\xi(1+2\nu)\Omega_p}{4[1+\xi/2(1+\nu)]\,(1+\nu)}\right\}^2 + \left(\dfrac{\alpha K_{2p}^2}{4}\right)^2\right)^{1/2}}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{\delta(1+4\xi) + 3\Omega_p\xi(1+2\nu)/(4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu))}{\alpha K_p^2}. \tag{11}$$

Определим теперь порог возбуждения в таком резонаторе колебаний с дробными частотами $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$. Подставляя выражение (8) в уравнение (7) и выделяя в нём слагаемые на частотах Ω_l и Ω_s, получим систему уравнений для амплитуд $V_l(t)$, $V_s(t)$ и фаз $\varphi_l(t)$, $\varphi_s(t)$ субгармонических колебаний:

$$\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha K_k^2}{2}\,V_l + \frac{\gamma\varepsilon_1 C_0^2 K_{p-k}K_p}{4\Omega}\,V_s\cos(\varphi_l+\varphi_s), \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha K_{p-k}^2}{2}\,V_s + \frac{\gamma\varepsilon_1 C_0^2 K_k K_p}{4\Omega}\,V_l\cos(\varphi_l+\varphi_s), \tag{13}$$

$$\frac{V_l}{V_s}\left[\left(\Omega_k^2 - \frac{\Omega^2 k^2}{p^2}\right)\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{2k\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_l}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{k(p-k)\gamma\varepsilon_1 C_0^2 K_1^2}{2}\sin(\varphi_l+\varphi_s), \tag{14}$$

$$\frac{V_s}{V_l}\left\{\left[\Omega_{p-k}^2 - \frac{\Omega^2(p-k)^2}{p^2}\right]\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{2(p-k)\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{k(p-k)\gamma\varepsilon_1 C_0^2 K_1^2}{2}\sin(\varphi_l+\varphi_s). \tag{15}$$

Из уравнений (14) и (15) находим $\sin^2(\varphi_l+\varphi_s)$, когда $\mathrm{d}\varphi_l/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_s/\mathrm{d}t = 0$:

$$\sin^2(\varphi_l+\varphi_s) = \left(\frac{4}{\gamma\varepsilon_1}\right)^2\left\{\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}\right\}\times$$

$$\times \left[\frac{\Omega_p \delta}{C_0^2 K_p^2} \left(1 + \frac{\xi k^2}{p^2} \right) - \frac{\xi (1 + 2\nu)\,(p^2 - k^2)}{4p^2 (1 + \xi)\,(1 + \nu)} \right], \quad (16)$$

причём здесь должно выполняться неравенство $\delta \le \min(\delta_1, \delta_2)$ или $\delta \ge \max(\delta_1, \delta_2)$, где

$$\delta_1 = \frac{\xi \Omega_p (1 + 2\nu) k (2p - k)}{4p^2 \{1 + \xi/[2(1 + \nu)]\}\,(1 + \nu)\,[1 + \xi (p - k)^2/p^2]} \ll \frac{\Omega_p}{p}\,,$$
$$\delta_2 = \frac{\xi \Omega_p (1 + 2\nu)\,(p^2 - k^2)}{4p^2 \{1 + \xi/[2(1 + \nu)]\}\,(1 + \nu)\,(1 + \xi k^2/p^2)} \ll \frac{\Omega_p}{p}\,, \qquad \xi \ll 1.$$

В диапазоне частотных расстроек δ, находящихся в интервале $\min(\eta_1, \delta_2) < \delta < \max(\delta_1, \delta_2)$, генерации субгармоник не будет, т. к. $\sin^2(\varphi_l + \varphi_s) < 0$.

Из уравнений (12), (13) и (16) находим выражения для области возбуждения субгармонических колебаний (зоны Матье) и порога $\varepsilon_{\rm th}$ параметрической генерации:

$$|\delta - \Delta| < \frac{(1 + \xi)\Omega_p}{1 + \xi/[2(1 + \nu)]} \left(\left[\left(\frac{\gamma \varepsilon_1}{4} \right)^2 - \left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right)^2 \frac{k(p - k)}{4p^2} \right] \left[1 + \frac{\xi (p - k)^2}{p^2} \right]^{-1} \left(1 + \frac{\xi k^2}{p^2} \right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{\xi (1 + 2\nu)\,(p - 2k)}{8p (1 + \nu)\,[1 + \xi (p - k)^2/p^2]\,(1 + \xi k^2/p^2)} \right\}^2 \right)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_{\rm th} = \frac{4}{\gamma} \left(\left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right)^2 \frac{k(p - k)}{4p^2} + \left\{ \frac{\Omega_p \delta}{C_0^2 K_p^2} \left[1 + \frac{\xi (p - k)^2}{p^2} \right] - \frac{\xi (1 + 2\nu) k (2p - k)}{4p^2 (1 + \xi)\,(1 + \nu)} \right\} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\Omega_p \delta}{C_0^2 K_p^2} \left(1 + \frac{\xi k^2}{p^2} \right) - \frac{\xi (1 + 2\nu)\,(p^2 - k^2)}{4p^2 (1 + \xi)\,(1 + \nu)} \right] \right)^{1/2}, \quad (18)$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{\xi \Omega_p (1 + 2\nu)}{8p^2 \{1 + \xi/[2(1 + \nu)]\}\,(1 + \nu)} \left[\frac{k(2p - k)}{1 + \xi (p - k)^2/p^2} + \frac{p^2 - k^2}{1 + \xi k^2/p^2} \right].$$

Минимальный порог $\varepsilon_{\rm th,\,min}$ параметрической генерации реализуется на границах области возбуждения, т. е. при $\delta = \delta_1$ или $\delta = \delta_2$:

$$\varepsilon_{\rm th,\,min} = \frac{2\sqrt{k(p - k)}}{\gamma p} \left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right) = \frac{2\sqrt{k(p - k)}\,\{1 + \xi/[2(1 + \nu)]\}}{\gamma p Q_p} =$$
$$= \frac{2\pi \alpha \sqrt{k(p - k)}}{\gamma C_0 L} \left\{ \frac{1 + \xi}{1 + \xi/[2(1 + \nu)]} \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

при этом отношения $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ определяются соответственно выражениями

$$\left.\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_{\rm th,\,min}} (\delta = \delta_1) = \frac{\sqrt{k(p - k)}}{4p} \left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right) \left(\left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right)^2 + \left\{ \frac{\xi (1 + 2\nu)\,[4p^2 - (p - k)^2]}{4(1 + \nu)\,[p^2 + \xi (p - k)^2]} \right\}^2 \right)^{-1/2}, \quad (20)$$

$$\left.\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_{\rm th,\,min}} (\delta = \delta_2) = \frac{\sqrt{k(p - k)}}{4p} \left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right) \left\{ \left(\frac{\alpha \Omega_p}{C_0^2} \right)^2 + \left[\frac{\xi (1 + 2\nu)\,(4p^2 - k^2)}{4(1 + \nu)\,(p^2 + \xi k^2)} \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (21)$$

Из выражения (19) видно, что при заданном p порог $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$ реализуется для $k=1$, т. е. вначале имеет место возбуждение субгармонических колебаний с наиболее разнесёнными частотами $\Omega_l=\Omega/p$ и $\Omega_s=(p-1)\Omega/p$ [11, 17]. Из формул (20) и (21) следует, что отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ (при $\varepsilon_1=\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$ и $\delta=\delta_1$ или $\delta=\delta_2$) от параметра нелинейности γ не зависит и уменьшается с ростом дисперсионного параметра ξ. Расчёты показывают, что для слабо нелинейных твёрдых тел (например, стекла, стали и т. д. [1,2]) при $p=2$, $k=1$, $\gamma=7$, $\xi=10^{-1}$, $\nu=0{,}3$, $Q_p=400$ и $\delta=\delta_1=\delta_2$ имеем $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}\cong 3{,}7\cdot10^{-4}$, $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}}\approx 2{,}9\cdot10^{-3}\ll 1$.

Таким образом, можно считать, что метод возмущений, применённый для расчёта нелинейных эффектов (при $\varepsilon_1\le\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$) и минимальной пороговой амплитуды деформации $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$ в резонаторе, адекватно описывает эти эффекты. Можно ожидать, что для сред с бо́льшим эффективным параметром квадратичной нелинейности пороговая амплитуда волны накачки может быть меньше.

При $\delta=0$ из выражений (18) и (10) находим

$$\varepsilon_{\mathrm{th}}=\frac{2\sqrt{k(p-k)}}{\gamma p}\left\{\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2+\left[\frac{\xi(1+2\nu)}{(1+\xi)\,(1+\nu)}\right]^2\frac{(2p-k)\,(p+k)}{4p^2}\right\}^{1/2}, \qquad (22)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{k(p-k)}}{4p}\left\{\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2+\left[\frac{\xi(1+2\nu)}{(1+\xi)\,(1+\nu)}\right]^2\frac{(2p-k)\,(p+k)}{4p^2}\right\}^{1/2}}{\left\{\left(\dfrac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2+\left[\dfrac{3\xi(1+2\nu)}{4(1+\xi)\,(1+\nu)}\right]^2\right\}^{1/2}}. \qquad (23)$$

Здесь оценки для $\varepsilon_{\mathrm{th}}$ и $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}$ менее оптимистичны. В случае отсутствия дисперсии ($\xi=0$) из выражения (23) следует, что $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}=\sqrt{k(p-k)}\,/(4p)$ и при $p=2$, $k=1$ получаем $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}=1/8$. Дисперсия приводит к уменьшению амплитуды ε_2 и увеличению порога $\varepsilon_{\mathrm{th}}$, так что при $p\gg 1$, $k=1$ и $\xi\gg 2/Q_p$ из выражения (23) имеем $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}\approx(1/6)\sqrt{2/p}$. При тех же, что и выше, параметрах резонатора, но $p=18$, получаем $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\varepsilon_{\mathrm{th}}}\approx 1/18$, однако $\varepsilon_{\mathrm{th}}\approx 5{,}2\cdot10^{-3}$, что близко к пределу упругости многих твёрдых тел.

Далее мы рассмотрим нелинейные акустические эффекты в резонаторах из микронеоднородных твёрдых тел, обладающих гистерезисной и разномодульной нелинейностью.

3. КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРАХ С КВАДРАТИЧНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ (НЕУПРУГИМ И УПРУГИМ)

В теории амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) различают два основных вида гистерезиса: неупругий (пластический гистерезис, или гистерезис трения) и упругий (или гистерезис отрыва) [25–27]. Оба гистерезиса одинаково хорошо объясняют эффекты АЗВТ — декремент затухания и дефект модуля упругости, однако они существенно отличаются друг от друга. Для неупругого гистерезиса $f(\varepsilon=0)\neq 0$, а для упругого $f(\varepsilon=0)=0$. Причины проявления гистерезисных нелинейностей поликристаллов при их знакопеременном деформировании связываются с движением дислокаций и их взаимодействием с примесными атомами, но, по-видимому, механизмы различных гистерезисов (неупругого и упругого) неодинаковы [25, 26]. Из-за их различий закономерности нелинейных акустических эффектов в средах с неупругим и упругим гистерезисами также не совпадают [27]. Эти различия можно выявить при изучении эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник [27, 28]. Рассмотрим нелинейные колебания в резонаторах с безынерционными неупругим и упругим квадратичными гистерезисами. Для таких сред гистерезисные функции в уравнении состояния (1) имеют соответственно следующий вид [27, 28]:

$$f(\varepsilon) = \beta\epsilon_m\varepsilon + \frac{1}{2}\begin{cases}\beta_1\varepsilon^2 - \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}\epsilon_m^2, & \dot\varepsilon > 0;\\ -\beta_2\varepsilon^2 + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}\epsilon_m^2, & \dot\varepsilon < 0,\end{cases} \tag{24}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{cases}\gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \quad \dot\varepsilon > 0;\\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1+\gamma_2)\epsilon_m\varepsilon, & \varepsilon > 0, \quad \dot\varepsilon < 0;\\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \quad \dot\varepsilon < 0;\\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3+\gamma_4)\epsilon_m\varepsilon, & \varepsilon < 0, \quad \dot\varepsilon > 0,\end{cases} \tag{25}$$

где точка означает производную по времени, β, β_1, β_2 γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4 — параметры гистерезисной нелинейности, $\beta_1+\beta_2 \ge 0$, $\gamma_1+\gamma_2 \ge 0$, $\gamma_3+\gamma_4 \ge 0$, $|\beta| \gg 1$, $|\beta_1| \gg 1$, $|\beta_2| \gg 1$, $|\gamma_j| \gg 1$, $j = 1, 2, 3, 4$; ϵ_m — амплитуда деформации. Для резонатора с жёсткими границами $\epsilon_m = \epsilon_m(x) \approx \varepsilon_m\,|\cos(K_p x)|$, $\varepsilon_m \approx \varepsilon_1 = K_p V_1$ — амплитуда деформации в резонаторе.

Безынерционность гистерезисов (24) и (25) отвечает тому, что напряжение σ в данной точке среды в момент времени t определяется деформацией ε, амплитудой деформации ϵ_m и знаком скорости деформации $\dot\varepsilon$ в этой же точке в этот же момент времени. Как уже отмечалось при обсуждении уравнения состояния (1), выражения (24) и (25) справедливы в области достаточно низких частот Ω, много меньших релаксационной частоты $\Omega_{\rm rel}$ гистерезисных дефектов среды [20, 21]. Результаты экспериментов показывают, что релаксационные частоты $\Omega_{\rm rel}$ для многих поликристаллических твёрдых тел (металлов и горных пород) находятся в диапазоне от нескольких килогерц до нескольких десятков килогерц.

При знакопеременном деформировании гистерезисных сред имеет место внутреннее трение, которое определяется линейным ($\alpha\rho\dot\varepsilon$) и гистерезисным ($Ef(\varepsilon)$) слагаемыми в уравнении состояния (1). В уравнении (1) учитывается запаздывание между напряжением и деформацией, что и приводит к линейным и гистерезисным потерям; при этом скоростью деформирования среды здесь не пренебрегается.

Иногда имеет место неоднозначная трактовка понятия гистерезиса, при этом гистерезис связывают с эллипсом, а эллипс — с гистерезисом. В связи с этим, по-видимому, необходимы некоторые пояснения. Гистерезис, определяемый уравнением состояния (1), — это проявление гистерезисной нелинейности среды, а эллипс, определяемый этим же уравнением, — это проявление линейной диссипации среды [29]. Гистерезис или эллипс на индикаторной диаграмме уравнения состояния (1) можно увидеть на фигурах Лиссажу при $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\sin(\Omega t)$ [30, 31]. Полагая в уравнении (1) $\alpha = 0$, получим (если $f(\varepsilon) \ne 0$) кривую линию для зависимости $\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)]$ и, в том числе, гистерезис (если функция $f(\varepsilon)$ гистерезисная). Полагая в этом же уравнении $f(\varepsilon) = 0$, получим эллипс для линейной зависимости $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon + \alpha\rho\dot\varepsilon$, если $\alpha \ne 0$. Неупругий и упругий гистерезисы (24) и (25) не зависят от частоты Ω, а эллипс зависит: при $\Omega \to 0$ эллипс вырождается в прямую линию $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$, при этом, конечно, $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$. При большой амплитуде ε_0 и малой частоте Ω, когда $E\,|f(\varepsilon)| \gg \alpha\rho\,|\dot\varepsilon|$, фигура Лиссажу для зависимости (1) будет гистерезисной (если функция $f(\varepsilon)$ гистерезисная), а при малой амплитуде ε_0 и более высокой частоте Ω, когда $E\,|f(\varepsilon) \ll \alpha\rho\,|\dot\varepsilon|$, фигура Лиссажу будет представлять собой эллипс. Гистерезис в уравнении состояния (1) приводит к нелинейным эффектам: генерации гармоник, амплитудно-зависимым потерям и дефекту модуля упругости, а «линейный» эллипс к нелинейным эффектам не приводит.

В резонаторах с гистерезисной нелинейностью имеют место эффекты АЗВТ — нелинейные потери, сдвиг резонансных частот и генерация высших гармоник [24, 27, 28], а также возбуждение субгармонических колебаний (при превышении порога параметрической генерации). Необходимо отметить, что, в отличие от среды с упругой квадратичной нелинейностью, для которой нелинейные эффекты определяются одним (единственным) параметром нелинейности γ, для гистерезисных сред различные нелинейные эффекты будут определяться различными комбинациями параметров гистерезисной нелинейности β, β_1, β_2, γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4.

3.1. Эффекты АЗВТ и генерация второй гармоники

В допороговом режиме, т. е. до возбуждения субгармоник ($V_l(t) = V_s(t) = 0$), амплитуды ε_1, ε_2 и фазы φ_1, φ_2 колебаний в резонаторах на частотах первой и второй гармоник определяются следующими выражениями. Для резонатора с неупругим (или пластическим) гистерезисом (24) имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{A_0\Omega_p/L}{\{(\delta-\delta_{\rm nl})^2(1+\xi)^2 + [(\alpha K_p^2/2)+\mu_{\rm nl}]^2\}^{1/2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{(\alpha K_p^2/2)+\mu_{\rm nl}}{2(\delta-\delta_{\rm nl})\,(1+\xi)}\,,$$
$$\delta_{\rm nl} = -\,\frac{4\beta\varepsilon_1\Omega_p}{3\pi\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}\,, \qquad \mu_{\rm nl} = \frac{8(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_1\Omega_p(1+\xi)}{9\pi^2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}\,, \tag{26}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{|\beta_1-\beta_2|\,\varepsilon_1^2\Omega_p(1+\xi)/\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}{32\left[\left(\delta(1+4\xi)+\dfrac{3\xi(1+2\nu)\Omega_p}{4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}+\dfrac{14(1+\xi)\beta\varepsilon_1\Omega_p}{15\pi\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha K_{2p}^2}{4}\right)^2\right]^{1/2}}\,,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\,\frac{\delta(1+4\xi)+\dfrac{3\xi\Omega_p(1+2\nu)}{4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}+\dfrac{14(1+\xi)\beta\varepsilon_1\Omega_p}{15\pi\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}}{\alpha K_p^2}\,. \tag{27}$$

Для резонатора с упругим гистерезисом (25)

$$\varepsilon_1 = \frac{A_0\Omega_p/L}{\{(\delta-\delta_{nl})^2(1+\xi)^2 + [(\alpha K_p^2/2)+\mu_{\rm nl}]^2\}^{1/2}}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{(\alpha K_p^2/2)+\mu_{\rm nl}}{2(\delta-\delta_{\rm nl})\,(1+\xi)}\,,$$
$$\delta_{\rm nl} = -\,\frac{b_1\varepsilon_1\Omega_p}{2[1+\xi/2(1+\nu)]}\,, \qquad \mu_{\rm nl} = \frac{a_1\varepsilon_1\Omega_p(1+\xi)}{2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}\,, \tag{28}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{[a_2^2+b_2^2]^{1/2}\varepsilon_1^2\Omega_p(1+\xi)/\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}{4\left[\left(\delta(1+4\xi)+\dfrac{3\xi(1+2\nu)\Omega_p}{4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}+\dfrac{13(1+\xi)a_0\varepsilon_1\Omega_p}{120\pi\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha K_{2p}^2}{4}\right)^2\right]^{1/2}}\,,$$
$$\operatorname{tg}(\varphi_2+\psi_2) = -\,\frac{\delta(1+4\xi)+\dfrac{3\xi(1+2\nu)\Omega_p}{4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}+\dfrac{13(1+\xi)\varepsilon_1 a_0\Omega_p}{120\pi\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}}{\alpha K_p^2}\,, \tag{29}$$

где

$$a_0 = \frac{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4}{2\pi}+\frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{8}\,,$$
$$a_1 = \frac{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)}{9\pi^2}\,, \qquad b_1 = \frac{8(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)}{9\pi^2}+\frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{3\pi}\,,$$
$$a_2 = \frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4}{16}+\frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4}{6\pi}\,, \qquad b_2 = \frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4}{12\pi}\,, \qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{b_2}{a_2}\,.$$

3.2. Определение порога параметрической генерация субгармоник

Как и для резонатора с упругой квадратичной нелинейностью, определим пороги возбуждения колебаний с дробными частотами $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$. Поскольку амплитуды высших гармоник волны накачки малы и не влияют на возбуждение субгармонических колебаний, волну накачки можно считать гармонической. Здесь, однако, выражения для ε и $\dot\varepsilon$ в гистерезисной (неаналитической) функции $f(\varepsilon)$ необходимо преобразовать к «мультипликативному» (квазигармоническому) виду [32]:

$$\varepsilon(x,t) \approx \varepsilon_1 \cos(K_p x)\sin\vartheta + \varepsilon_l \cos(K_k x)\sin[(k/p)\vartheta + \varphi_l] + \\ + \varepsilon_s \cos(K_{p-k}x)\sin[(1-k/p)\vartheta + \varphi_s] = \varepsilon_m(x,t)\sin[\Psi_1(x,t)], \quad (30)$$

$$\dot\varepsilon(x,t) \approx \varepsilon_1\Omega \cos(K_p x)\cos\vartheta + \varepsilon_l\Omega_l \cos(K_k x)\cos[(k/p)\vartheta + \varphi_l] + \\ + \varepsilon_s\Omega_s \cos(K_{p-k}x)\cos[(1-k/p)\vartheta + \varphi_s] = A_m(x,t)\cos[\Psi_2(x,t)], \quad (31)$$

где $\Psi_j(x,t) = \vartheta + \Phi_j(x,t) + S(x)$, $j = 1,\ 2$; $S(x) = (\pi/2)\,\{1 - \mathrm{sign}[\cos(K_p x)]\}$,

$$\varepsilon_m^2(x,t) = \varepsilon_1^2\cos^2(K_p x) + 2\varepsilon_1\varepsilon_l \cos(K_p x)\cos(K_k x)\cos[(1-k/p)\vartheta - \varphi_l] + \varepsilon_l^2\cos^2(K_k x) + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_s\cos(K_p x)\cos(K_{p-k}x)\cos[(k/p)\vartheta - \varphi_s] + \varepsilon_s^2\cos^2(K_{p-k}x) + \\ + 2\varepsilon_l\varepsilon_s\cos(K_k x)\cos(K_{p-k}x)\cos[(1-2k/p)\vartheta + (\varphi_s - \varphi_l)],$$

$$\mathrm{tg}\,\Phi_1(x,t) \approx -\frac{\varepsilon_l\cos(K_k x)\sin[(1-k/p)\vartheta - \varphi_l] + \varepsilon_s\cos(K_{p-k}x)\sin[(k/p)\vartheta - \varphi_s]}{\varepsilon_1\cos(K_p x)}, \quad (32)$$

$$\mathrm{tg}\,\Phi_2(x,t) \approx -\frac{k\varepsilon_l\cos(K_k x)\sin[(1-k/p)\vartheta - \varphi_l] + (p-k)\varepsilon_s\cos(K_{p-k}x)\sin[(k/p)\vartheta - \varphi_s]}{p\varepsilon_1\cos(K_p x)}. \quad (33)$$

Выражение для амплитуды $A_m(x,t)$ скорости деформации $\dot\varepsilon(x,t)$ не приводится, т. к. оно не требуется для дальнейших вычислений.

Из выражений (30) и (31) следует, что за смену знаков деформации $\varepsilon(x,t)$ и её производной $\dot\varepsilon(x,t)$, определяющих моменты перехода с одной ветви гистерезисов (24) и (25) на другую, отвечают синусоидальные сомножители $\sin[\Psi_1(x,t)]$ и $\cos[\Psi_2(x,t)]$. Из выражений (32) и (33) видно, что поскольку $|\,\mathrm{tg}\,\Phi_j(x,t)| \ll 1$ $(j = 1,\ 2)$, то «расфазировка» деформации $\varepsilon(x,t)$ и её производной $\dot\varepsilon(x,t)$ составляет почти $\pi/2$, т. к. $|\Delta\Psi(x,t)| = |\Phi_1(x,t) - \Phi_2(x,t)| \ll 1$.

3.2.1. Резонатор с неупругим гистерезисом

Подставляя выражения (8) и (30)–(33) в уравнение (7) и выделяя в нём слагаемые на частотах $\Omega_l = k\Omega/p$ и $\Omega_s = (p-k)\Omega/p$, получим уравнения для амплитуд $V_l(t)$, $V_s(t)$ и фаз $\varphi_l(t)$, $\varphi_s(t)$ субгармонических колебаний в резонаторе с неупругим гистерезисом (24):

$$\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}t} = -\left[\frac{\alpha K_k^2}{2} + \frac{(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_1 C_0^2 K_k K_p}{\pi^2\Omega}\right]V_l + \frac{(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1 C_0^2 K_p K_{p-k}}{16\Omega}\,V_s\cos(\varphi_l+\varphi_s), \quad (34)$$

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} = -\left[\frac{\alpha K_{p-k}^2}{2} + \frac{(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_1 C_0^2 K_{p-k} K_p}{\pi^2\Omega}\right]V_l + \frac{(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1 C_0^2 K_k K_p}{16\Omega}\,V_l\cos(\varphi_l+\varphi_s), \quad (35)$$

$$\frac{V_l}{V_s}\left[\left(\Omega_k^2 - \frac{\Omega^2 k^2}{p^2}\right)\left(1 + \frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{2k\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_l}{\mathrm{d}t} - \frac{3\beta\varepsilon_1 C_0^2 K_k^2}{\pi}\right] = \frac{k(p-k)\,(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1 C_0^2 K_1^2}{8}\sin(\varphi_l+\varphi_s), \quad (36)$$

$$\frac{V_s}{V_l}\left\{\left[\Omega_{p-k}^2-\frac{\Omega^2(p-k)^2}{p^2}\right]\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right]-\frac{2(p-k)\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}t}-\frac{3\beta\varepsilon_1C_0^2K_{p-k}^2}{\pi}\right\}=$$
$$=\frac{k(p-k)\,(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1C_0^2K_1^2}{8}\sin(\varphi_l+\varphi_s). \quad (37)$$

Из сравнения уравнений (12)–(15) и (34)–(37) видно, что, в отличие от резонатора с квадратичной нелинейностью, здесь имеет место влияние сильной волны накачки на затухание и скорость распространения слабых субгармонических волн [32]. Из уравнений (36) и (37) находим $\sin^2(\varphi_l+\varphi_s)$, когда $\mathrm{d}\varphi_l/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\varphi_s/\mathrm{d}t=0$:

$$\sin^2(\varphi_l+\varphi_s)=\left[\frac{16}{(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1}\right]^2\left\{\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right]-\frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}+\frac{3\beta\varepsilon_1}{2\pi}\right\}\times$$
$$\times\left[\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right)-\frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}+\frac{3\beta\varepsilon_1}{2\pi}\right], \quad (38)$$

при этом здесь также должны выполняться условия $\delta\le\min(\delta_1,\delta_2)$ или $\delta\ge\max(\delta_1,\delta_2)$, где

$$\delta_1=\frac{\Omega_p(1+\xi)}{\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,[1+\xi(p-k)^2/p^2]}\left[\frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}-\frac{3\beta\varepsilon_1}{2\pi}\right]\ll\frac{\Omega_p}{p},$$
$$\delta_2=\frac{\Omega_p(1+\xi)}{\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,[1+\xi k^2/p^2]}\left[\frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}-\frac{3\beta\varepsilon_1}{2\pi}\right]\ll\frac{\Omega_p}{p}.$$

Из уравнений (34) и (35) находим выражения для области возбуждения субгармонических колебаний и минимального порога $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$ параметрической генерации в резонаторе, реализуемого на границах области, т. е. при $\delta=\delta_1$ или $\delta=\delta_2$:

$$|\delta-\Delta|<\frac{(1+\xi)\Omega_p}{1+\xi/[2(1+v)]}\times$$
$$\times\left(\left\{\left[\frac{(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1}{16}\right]^2-\frac{1}{4}\left[\frac{\alpha\Omega_pk}{C_0^2p}+\frac{2(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_1}{\pi^2}\right]\left[\frac{\alpha\Omega_p(p-k)}{C_0^2p}+\frac{2(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_1}{\pi^2}\right]\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right]^{-1}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right)^{-1}+\left\{\frac{\xi(1+2\nu)\,(p-2k)}{8p(1+\nu)[1+\xi(p-k)^2/p^2]\,(1+\xi k^2/p^2)}\right\}^2\right)^{1/2} \quad (39)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}=\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\,\frac{\dfrac{4(\beta_1+\beta_2)}{\pi^2}+\left[\dfrac{(\beta_1-\beta_2)^2k(p-k)}{4p^2}+\left[\dfrac{4(\beta_1+\beta_2)\,(p-2k)}{\pi^2p}\right]^2\right]^{1/2}}{\dfrac{(\beta_1-\beta_2)^2}{16}-\dfrac{16(\beta_1+\beta_2)^2}{\pi^4}}, \quad (40)$$

причём здесь необходимо выполнение условия

$$|\beta_1-\beta_2|>(4/\pi)^2(\beta_1+\beta_2), \quad (41)$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_1+\delta_2}{2} = \frac{\Omega_p}{2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)} \left\{ \frac{\xi(1+2\nu)}{4p^2(1+\nu)} \left[\frac{k(2p-k)}{1+\xi(p-k)^2/p^2} + \frac{p^2-k^2}{1+\xi k^2/p^2} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{3\beta(1+\xi)\varepsilon_1}{2\pi} \left[\frac{1}{1+\xi(p-k)^2/p^2} + \frac{1}{1+\xi k^2/p^2} \right] \right\}.$$

Из уравнения (39) определим также порог $\varepsilon_{\rm th}$ при

$$\delta = \delta_{\rm nl} = -\frac{4\beta\varepsilon_1\Omega_p}{3\pi\{1+\xi/[2(1+v)]\}}\,,$$

когда

$$\sin^2(\varphi_l+\varphi_s) = \left[\frac{16/(1+\xi)}{(\beta_1-\beta_2)\varepsilon_1}\right]^2 \left\{ \frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\nu)} - \frac{\beta\varepsilon_1}{6\pi}\left[1+\frac{\xi(p^2+16pk-8k^2)}{p^2}\right]\right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\nu)} - \frac{\beta\varepsilon_1}{6\pi}\left[1+\frac{\xi(9p^2-8k^2)}{p^2}\right]\right\}.$$

Здесь мы рассмотрим два простых частных случая.

1) При $2\beta\varepsilon_1/(3\pi) \ll \xi$ и выполнении условия (41) имеем

$$\varepsilon_{\rm th,\,1} = \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{4\pi^2}\,\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2} + \left\{ \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{4\pi^2}\,\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2 + \frac{k(p-k)}{4p^2}\left[\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{2^8} - \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\pi^4}\right] \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left[\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2 + \left[\frac{\xi(1+2\nu)}{2(1+\nu)\,(1+\xi)}\right]^2 \frac{(p+k)\,(2p-k)}{p^2}\right]\right\}^{1/2}\right) \left[\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{2^8} - \frac{(\beta_1+\beta_2)}{\pi^4}\right]^{-1}. \qquad (42)$$

2) При $2\beta\varepsilon_1/(3\pi) \gg \xi$ получаем

$$\varepsilon_{\rm th,2} = \frac{\dfrac{\alpha\Omega_p}{2C_0^2}\left(\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2\pi^2} + \left\{\left(\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2\pi^2}\right)^2 + \dfrac{k(p-k)}{p^2}\left[\dfrac{(\beta_1-\beta_2)^2}{2^8} - \dfrac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\pi^4} - \dfrac{\beta^2}{36\pi^2}\right]\right\}^{1/2}\right)}{\dfrac{(\beta_1-\beta_2)^2}{2^8} - \dfrac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\pi^4} - \dfrac{\beta^2}{36\pi^2}}\,, \qquad (43)$$

причём здесь должно выполняться неравенство

$$\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{2^8} - \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\pi^4} - \frac{\beta^2}{36\pi^2} > 0. \qquad (44)$$

Неравенства (41) и (44) указывают на то, что форма петли неупругого гистерезиса (24) должна быть двояковогнутой (серповидной), когда знаки кривизны его ветвей одинаковы, т. е. $\mathrm{sign}(\beta_1\beta_2) < 0$.

Анализ выражений (40), (42) и (43) в общем виде довольно сложен, поэтому далее мы ограничимся расчётом пороговых амплитуд при конкретных параметрах резонатора. Оценки показывают, что при $\beta_1-\beta_2 = 600$, $\beta_1+\beta_2 = 100$, $\beta = 100$, $p = 2$, $k = 1$, $Q_p = 400$, $\nu = 0{,}3$, $\xi = 10^{-1}$, $(\beta_1-\beta_2)^2/2^8 - (\beta_1+\beta_2)^2/\pi^4 \approx 1{,}3\cdot 10^3$ и $\delta = \delta_1 = \delta_2$ будем иметь $\varepsilon_{\rm th,\,min} \approx 2{,}3\cdot 10^{-5}$, при этом $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 4{,}7\cdot 10^{-3} \ll 1$. Далее, однако, как и для резонатора с квадратичной нелинейностью, при $\delta = \delta_{\rm nl}$ отношения $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ нельзя считать малыми: в первом случае $\varepsilon_{\rm th,\,1} \approx 6{,}1\cdot 10^{-4}$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 0{,}14$, а во втором, при тех же параметрах, когда $(\beta_1-\beta_2)^2/2^8 - (\beta_1+\beta_2)^2/\pi^4 - \beta^2/(36\pi^2) \approx 1{,}3\cdot 10^3$, но $\xi = 10^{-4}$, получаем $\varepsilon_{\rm th,\,2} \approx 2{,}3\cdot 10^{-5}$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 0{,}17$.

3.2.2. Резонатор с упругим гистерезисом

Для резонатора с упругим гистерезисом (25) уравнения для амплитуд $V_l(t)$, $V_s(t)$ и фаз $\varphi_l(t)$, $\varphi_s(t)$ субгармонических колебаний будут такими же, как и уравнения (34)–(37), в которых следует сделать следующие замены: $\beta_1 - \beta_2 = (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)/2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)/\pi$, $\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$, $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/(3\pi) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8$. В этом случае выражение для $\sin^2(\varphi_s + \varphi_l)$, когда $\mathrm{d}\varphi_l/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_s/\mathrm{d}t = 0$, имеет вид

$$\sin^2(\varphi_s+\varphi_l) = \left(\frac{2}{c_0\varepsilon_1}\right)^2 \left\{\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)} + \frac{9b_1\varepsilon_1}{16}\right\} \times \\ \times \left[\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)} + \frac{9b_1\varepsilon_1}{16}\right], \quad (45)$$

при этом должны выполняться условия $\delta \le \min(\delta_1, \delta_2)$ или $\delta \ge \max(\delta_1, \delta_2)$, где

$$\delta_1 = \frac{\Omega_p(1+\xi)}{\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,[1+\xi(p-k)^2/p^2]}\left[\frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)} - \frac{9b_1\varepsilon_1}{16}\right] \ll \frac{\Omega_p}{p},$$
$$\delta_2 = \frac{\Omega_p(1+\xi)}{\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\xi k^2/p^2)}\left[\frac{\xi(1+2\nu)(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)} - \frac{9b_1\varepsilon_1}{16}\right] \ll \frac{\Omega_p}{p}.$$

Выражения для области возбуждения субгармонических колебаний и минимального порога $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}}$ параметрической генерации (при $\delta = \delta_1$ или $\delta = \delta_2$) имеют следующий вид:

$$|\delta - \Delta| < \frac{(1+\xi)\Omega_p}{1+\xi/[2(1+v)]} \times \\ \times \left(\left[\left(\frac{c_0\varepsilon_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha\Omega_p k}{C_0^2 p} + \frac{3c_1\varepsilon_1}{\pi}\right)\left(\frac{\alpha\Omega_p(p-k)}{C_0^2 p} + \frac{3c_1\varepsilon_1}{\pi}\right)\right]\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right]^{-1}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right)^{-1} + \\ + \left\{\frac{\xi(1+2\nu)\,(p-2k)}{8p(1+\nu)\,[1+\xi(p-k)^2/p^2]\,(1+\xi k^2/p^2)}\right\}^2\right)^{1/2}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}} = \frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\, \frac{\dfrac{3c_1}{2\pi} + \left\{\dfrac{c_0^2k(p-k)}{p^2} + \left[\dfrac{3c_1(p-2k)}{2\pi p}\right]^2\right\}^{1/2}}{c_0^2 - \dfrac{9c_1^2}{\pi^2}}, \quad (47)$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_1+\delta_2}{2}, \quad c_0 = \frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4}{16} + \frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4}{4\pi}, \quad c_1 = \frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{12\pi}, \quad c_0^2 - \frac{9c_1^2}{\pi^2} > 0.$$

Определим порог $\varepsilon_{\mathrm{th}}$ при $\delta = \delta_{\mathrm{nl}} = -\dfrac{b_1\varepsilon_1\Omega_p}{2\{1+\xi/[2(1+v)]\}}$, когда

$$\sin^2(\varphi_s+\varphi_l) = \left[\frac{2}{a_0\varepsilon_1(1+\xi)}\right]^2 \left\{\frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\nu)} - \frac{b_1\varepsilon_1}{16}\left[1+\frac{\xi(p^2+16pk-8k^2)}{p^2}\right]\right\} \times \\ \times \left\{\frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\nu)} - \frac{b_1\varepsilon_1}{16}\left[1+\frac{\xi(9p^2-8k^2)}{p^2}\right]\right\}.$$

Здесь мы также рассмотрим два простых частных случая.

1) При $b_1\varepsilon_1/4 \ll \xi$ и выполнении условия $c_0^2 - 9c_1^2/\pi^2 > 0$ имеем

$$\varepsilon_{\mathrm{th},1} = \left(c_0^2 - \frac{9c_1^2}{\pi^2}\right)^{-1}\left[\frac{3c_1\alpha\Omega_p}{2\pi C_0^2} + \left(\left(\frac{3c_1\alpha\Omega_p}{2\pi C_0^2}\right)^2 + \frac{k(p-k)}{p^2}\left(c_0^2 - \frac{9c_1^2}{\pi^2}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left\{\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2 + \left[\frac{\xi(1+2\nu)}{2(1+\nu)\,(1+\xi)}\right]^2\frac{(2p-k)\,(p+k)}{p^2}\right\}\right)^{1/2}\right]. \quad (48)$$

2) При $b_1\varepsilon_1/4 \gg \xi$ получаем

$$\varepsilon_{\mathrm{th},2} = \frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\,\frac{\dfrac{3c_1}{2\pi} + \left[\left(\dfrac{3c_1}{2\pi}\right)^2 + \dfrac{k(p-k)}{p^2}\left(c_0^2 - \dfrac{b_1^2}{2^6} - \dfrac{9c_1^2}{\pi^2}\right)\right]^{1/2}}{c_0^2 - b_1^2/2^6 - 9c_1^2/\pi^2}, \quad (49)$$

где $c_0^2 - b_1^2/2^6 - 9c_1^2/\pi^2 > 0$.

Приведём оценки пороговых амплитуд деформаций и отношений $\varepsilon_2/\varepsilon_1$. Из выражений (47)–(49) следует, что при тех же (что и для неупругого гистерезиса) эффективных параметрах нелинейности, $\beta_1 - \beta_2 = (\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4)/2 + 2(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)/\pi = 600$, $\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 = 100$, $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/(3\pi) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 = 100$, когда $a_0 = 100$, $a_1 \approx 18$, $b_1 \approx 84{,}9$, $a_2 = 25$, $b_2 = 50$, $c_0 = 75$, $c_1 \approx 21{,}2$, $p = 2$, $k = 1$, $Q_p = 400$, $\nu = 0{,}3$, $\xi = 10^{-1}$, $c_0^2 - (3c_1/\pi)^2 \approx 1{,}3\cdot 10^3$ и $\delta = \delta_1 - \delta_2$, имеем $\varepsilon_{\mathrm{th,\,min}} \approx 2{,}3\cdot 10^{-5}$, при этом $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 2{,}9\cdot 10^{-3} \ll 1$. При $\delta = \delta_{\mathrm{nl}}$ в первом случае получаем $\varepsilon_{\mathrm{th},1} \approx 7{,}1\cdot 10^{-5}$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 4\cdot 10^{-2} \ll 1$, а во втором случае при тех же основных параметрах, но $\xi = 10^{-4}$, $c_0^2 - b_1^2/2^6 - 9c_1^2/\pi^2 \approx 1{,}27\cdot 10^3$, имеем $\varepsilon_{\mathrm{th},2} \approx 2{,}3\cdot 10^{-5}$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \approx 0{,}12$.

4. КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ С РАЗНОМОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим, наконец, нелинейные колебания в резонаторе с разномодульной нелинейностью, когда $f(\varepsilon) = \gamma\,|\varepsilon|$, γ — параметр разномодульной нелинейности, $|\gamma| \ll 1$ [28, 33, 34]. Здесь имеет место генерация чётных гармоник волны накачки и (при превышении порога) возбуждение субгармоник. Как и для среды с упругой квадратичной нелинейностью, для разномодульной среды нелинейные эффекты определяются также одним (единственным) параметром нелинейности γ. Заметим, что нелинейность разномодульной среды линейно зависит от амплитуды деформации, поэтому амплитуды высших гармоник будут пропорциональны амплитуде ε_1 волны накачки [28, 33, 34], а порог параметрической генерации (не по амплитуде ε_1, а по параметру нелинейности γ) будет определяться коэффициентами диссипации α, дисперсии ξ и частотной расстройкой δ.

В допороговом режиме амплитуда $\varepsilon_1 = K_pV_1$ и фаза φ_1 колебаний в резонаторе на частоте Ω определяются выражениями (9), а амплитуда $\varepsilon_2 = K_{2p}V_2$ колебаний на частоте 2Ω — выражением

$$\varepsilon_2 = \frac{8\gamma\varepsilon_1\Omega_p(1+\xi)/\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}}{9\pi^2\left[\left(\delta(1+4\xi) + \dfrac{3\Omega_p\xi(1+2\nu)}{4\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha K_{2p}^2}{4}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (50)$$

Фаза φ_2 определяется выражением (11).

Уравнения для амплитуд $V_l(t)$, $V_s(t)$ и фаз $\varphi_l(t)$, $\varphi_s(t)$ субгармонических колебаний имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha K_k^2}{2}\,V_l + \frac{2\gamma C_0^2 K_{p-k}K_p}{\pi^2\Omega}\,V_s\cos(\varphi_l+\varphi_s), \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha K_{p-k}^2}{2}\,V_s + \frac{2\gamma C_0^2 K_k K_p}{\pi^2\Omega}\,V_l\cos(\varphi_l+\varphi_s), \tag{52}$$

$$\frac{V_l}{V_s}\left[\left(\Omega_k^2 - \frac{\Omega^2 k^2}{p^2}\right)\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{2k\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_l}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{4k(p-k)\gamma C_0^2 K_1^2}{\pi^2}\sin(\varphi_l+\varphi_s), \tag{53}$$

$$\frac{V_s}{V_l}\left\{\left[\Omega_{p-k}^2 - \frac{\Omega^2(p-k)^2}{p^2}\right]\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{2(p-k)\Omega}{p}\,\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{4k(p-k)\gamma C_0^2 K_1^2}{\pi^2}\sin(\varphi_l+\varphi_s). \tag{54}$$

Из уравнений (53) и (54) находим $\sin^2(\varphi_l+\varphi_s)$, когда $\mathrm{d}\varphi_l/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_s/\mathrm{d}t = 0$:

$$\sin^2(\varphi_l+\varphi_s) = \left(\frac{\pi^2}{2\gamma}\right)^2 \left\{\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}\right\}\times$$
$$\times\left[\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}\right],$$

причём здесь также должно выполняться неравенство $\delta \le \min(\delta_1,\delta_2)$ или $\delta \ge \max(\delta_1,\delta_2)$, где

$$\delta_1 = \frac{\xi\Omega_p(1+2\nu)\,[k(2p-k)]}{4p^2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)\,[1+\xi(p-k)^2/p^2]} \ll \frac{\Omega_p}{p}\,,$$
$$\delta_2 = \frac{\xi\Omega_p(1+2\nu)(p^2-k^2)}{4p^2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)\,(1+\xi k^2/p^2)} \ll \frac{\Omega_p}{p}\,.$$

Из уравнений (51) и (52) находим выражения для области возбуждения субгармонических колебаний и порога параметрической генерации (по параметру γ):

$$|\delta-\Delta| < \frac{(1+\xi)\Omega_p}{1+\xi/[2(1+\nu)]}\left(\left[\left(\frac{2\gamma}{\pi^2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2\frac{k(p-k)}{4p^2}\right]\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right]^{-1}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left\{\frac{\xi(1+2\nu)\,(p-2k)}{8p(1+\nu)\,[1+\xi(p-k)^2/p^2]\,(1+\xi k^2/p^2)}\right\}^2\right)^{1/2}, \tag{55}$$

$$|\gamma| > \gamma_{\mathrm{th}} = \frac{\pi^2}{2}\left(\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2\frac{k(p-k)}{4p^2} + \left\{\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left[1+\frac{\xi(p-k)^2}{p^2}\right] - \frac{\xi(1+2\nu)k(2p-k)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\Omega_p\delta}{C_0^2K_p^2}\left(1+\frac{\xi k^2}{p^2}\right) - \frac{\xi(1+2\nu)\,(p^2-k^2)}{4p^2(1+\xi)\,(1+\nu)}\right]\right)^{1/2}, \tag{56}$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_1+\delta_2}{2} = \frac{\xi\Omega_p(1+2\nu)}{8p^2\{1+\xi/[2(1+\nu)]\}\,(1+\nu)}\left[\frac{k(2p-k)}{1+\xi(p-k)^2/p^2} + \frac{p^2-k^2}{1+\xi k^2/p^2}\right].$$

При $\delta=\delta_1$ или $\delta=\delta_2$ находим выражение для минимального порога $\gamma_{\mathrm{th,\,min}}$:

$$\gamma_{\mathrm{th,\,min}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\sqrt{k(p-k)}\;\{1+\xi/[2(1+v)]\}}{pQ_p}\,. \tag{57}$$

При $\delta = 0$ получаем

$$\gamma_{\rm th} = \frac{\pi^2\sqrt{k(p-k)}}{4p}\left\{\left(\frac{\alpha\Omega_p}{C_0^2}\right)^2 + \left[\frac{\xi(1+2\nu)}{(1+\xi)(1+\nu)}\right]^2 \frac{(2p-k)(p+k)}{4p^2}\right\}^{1/2}. \qquad (58)$$

Расчёты показывают, что при $p = 2$, $k = 1$, $\xi = 10^{-1}$, $\nu = 0{,}3$, $Q_p = 400$ и $\delta = \delta_1 = \delta_2$ имеем $\gamma_{\rm th,\,min} \approx 3{,}2\cdot 10^{-3}$, $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\gamma_{\rm th,\,min}} \approx 2{,}6\cdot 10^{-3} \ll 1$. При $\delta = 0$ и тех же параметрах резонатора получаем, что $\gamma_{\rm th} \approx 5{,}2\cdot 10^{-2}$, однако отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ нельзя считать малым: $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)|_{\gamma_{\rm th}} = 1/9$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом возмущений проведено теоретическое исследование нелинейных акустических эффектов (амплитудно-зависимых потерь, сдвига резонансных частот, генерации второй гармоники) и определены условия и пороги параметрической генерации НЧ субгармонических колебаний в стержневых резонаторах с жёсткими границами и различными видами нелинейности (квадратичной упругой, гистерезисной и разномодульной). Полученные оценки пороговых амплитуд волны накачки и порогового параметра разномодульной нелинейности, а также отношений амплитуд второй и первой гармоник свидетельствуют о возможности возбуждения в таких резонаторах субгармонических колебаний. В дальнейшем будет необходимо рассмотреть стационарные режимы параметрической генерации субгармонических колебаний и определить в этих режимах амплитудно-частотные характеристики нелинейных акустических эффектов. Экспериментальное изучение закономерностей нелинейных волновых процессов в стержневых резонаторах с жёсткими границами будет способствовать выявлению механизмов акустической нелинейности различных твёрдых тел и развитию теории нелинейных волновых процессов в таких средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М: Наука, 1966. 520 с.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А. // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, № 4. С. 549.
3. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
4. Naugol'nykh K. A., Ostrovsky L. A. Nonlinear Wave Processes in Acoustics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 298 p.
5. Руденко О. В. // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 3. С. 398.
6. Андреев В. Г., Васильева О. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 12.
7. Korpel A., Adler L. // Appl. Phys. Lett. 1965. V. 7, No. 4. P. 106.
8. Adler L., Breaseale M. A. // J. Acoust. Soc. Am. 1970. V. 48, No. 5, part 2. P. 1 077.
9. Rogers P. H. // J. Acoust. Soc. Am. 1972. V. 52, No. 1. P. 429.
10. Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1972. V. 15, No. 8. P. 456.
11. Eller A. I. // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 53, No. 3. P. 758.
12. Зарембо Л. К., Сердобольская О. Ю. // Акуст. журн. 1974. Т. 20, № 5. С. 726.
13. Nai-chyuan J. // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57, No. 6, part 2. P. 1 357.
14. Mahon H., Brun E., Luukkala M., Proctor W. G. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, No. 3. P. 430.
15. Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М. // Журн. техн. физ. 1973. V. 43, № 10. С. 2 213.
16. Соустова И. А., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1975. Т. 21, № 6. С. 953.

17. Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 1976. Т. 22, № 5. С. 742.
18. Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Acustica. 1978. V. 39, No. 5. P. 298.
19. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Phys. Earth Planetary Interiors. 1988. V. 50, No. 1. P. 65.
20. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acta Acust. United Ac. 2002. V. 88, No. 1. P. 40.
21. Назаров В. Е., Радостин А. В. // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 2. С. 280.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
23. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
24. Назаров В. Е., Островский Л. А., Соустова И. А., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 3. С. 491.
25. Asano S. // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29, No. 4. P. 952.
26. Lebedev A. B. // Phys. Solid State. 1999. V. 41. P. 1 105.
27. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405.
28. Назаров В. Е., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 4. С. 711.
29. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1978. 496 с.
30. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, МФТИ, 2004. 656 с.
31. Назаров В. Е., Радостин А. В. // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 4. С. 514.
32. Назаров В. Е. // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 2. С. 204.
33. Назаров В. Е., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 1. С. 106.
34. Radostin A. V., Nazarov V. E., Kiyashko S. B. // Wave Motion. 2013. V. 50. P. 191.

Поступила в редакцию 20 октября 2017 г.; принята в печать 26 июня 2018 г.

NONLINEAR ACOUSTIC EFFECTS IN ROD RESONATORS WITH RIGID BOUNDARIES

V. E. Nazarov and S. B. Kiyashko

We perform theoretical study of nonlinear acoustic effects (amplitude-dependent loss, resonant-frequency shift, and the second-harmonic generation) and determine the thresholds of parametric generation of the subharmonic oscillations at the fractional frequencies in the rod resonators with rigid boundaries and various nonlinearity types (elastic, hysteretic, different-modulus).