УДК 621.372.829

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА С ТОНКИМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ РЁБРАМИ

Д. С. Губский, В. В. Земляков, Д. В. Лонкина*

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Решена задача электродинамического анализа модового состава излучения в круглом волноводе с тонкими радиальными металлическими рёбрами. Разработаны алгоритмы расчёта критических волновых чисел и компонент электромагнитных полей H- и E-волн с учётом особенности поведения поля вблизи тонкого металлического ребра. Исследованы спектральные характеристики волновода. Найдены структуры электромагнитных полей основной и высших типов волн.

ВВЕДЕНИЕ

Гребневые волноводы находят широкое применение в современной сверхвысокочастотной (СВЧ) технике. Обычно гребневый волновод состоит из прямоугольного или круглого волновода с одной или несколькими продольными металлическими вставками (гребнями). Основным преимуществом данного вида волноводов является широкий диапазон частот одномодового режима работы, возможность создания на их базе частотно-селективных устройств, а для волноводов круглого сечения — возможность управления поляризацией.

Гребневые волноводы используются в приёмных и передающих антеннах, поляризаторах, полосовых фильтрах [1–8]. Благодаря широкой рабочей полосе частот, малым потерям и достаточно высокой мощности передаваемого излучения гребневые волноводы успешно применяются для построения направленных ответвителей, создавая достойную конкуренцию полосковым линиям передачи [9].

Круглые волноводы, как полые, так и гребневые, могут стать эффективной заменой коаксиальным линиям, используемым для связи в условиях ограниченной среды, например на железной дороге, в метро или тоннелях, особенно на высоких частотах [8].

Круглые волноводы также применяются и в качестве многолучевых облучателей, когда необходимо сформировать многолучевую диаграмму направленности, в которой лучи отстоят друг от друга на минимальное угловое расстояние [10]. Такие антенны используются, например, в космической связи для покрытия территории со сложной конфигурацией.

Наиболее универсальным подходом при синтезе СВЧ устройств на базе гребневых волноводов, в том числе и с диэлектрическим заполнением, является применение прямых численных методов, таких как метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод конечного интегрирования, а также их комбинаций с вариационными методами, методами интегральных уравнений и т. д. [11–18]. Основным недостатком данных методов являются высокие требования к вычислительным ресурсам, а также значительное время расчётов. Более того, при отсутствии хорошего начального приближения многие алгоритмы оптимизации вообще не приводят к желаемому результату. Поэтому реализация численно-аналитических методов анализа и синтеза является актуальной задачей, а электродинамический анализ электромагнитных полей гребневых волноводов — её весомой частью.

* vvzem@yandex.ru

Число работ, посвящённых электродинамическому анализу круглых волноводов с радиальными металлическими рёбрами, невелико [6]. Большинство авторов приводят расчёты только критических волновых чисел и постоянных распространения для достаточно ограниченного числа волн и геометрических размеров волноводов, при этом практически отсутствует анализ и визуализация компонент электромагнитных полей H- и E-волн. А именно такие исследования открывают возможности для дальнейшей разработки алгоритмов для анализа и синтеза различных устройств на базе данного волновода, включая и частотно-селективные устройства. Поэтому разработка высокоскоростных алгоритмов и программ электродинамического анализа и синтеза по-прежнему актуальна.

В данной работе решена задача электродинамического анализа критических волновых чисел и компонент электромагнитных полей H- и E-волн круглого волновода с тонкими радиальными металлическими рёбрами. Для повышения точности и скорости вычислений в разработанных алгоритмах учитываются особенности поведения поля вблизи тонкого металлического ребра.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем решать краевую задачу электродинамики для двумерной области Ω, представляющей собой круг с двумя разрезами (см. рис. 1*а*). Такая область является поперечным сечением круглого волновода с двумя бесконечно тонкими радиальными металлическими рёбрами (см. рис. 1*б*). Краевую задачу поставим для уравнения Гельмгольца относительно компонент H_z и E_z напряжённостей магнитного $\mathbf{H}$ и электрического $\mathbf{E}$ полей соответственно. В цилиндрической системе координат $(r,\,\phi,\,z)$ имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[(r\,\frac{\partial H_z(r,\phi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 H_z(r,\phi)}{\partial^2\phi}+k_{\mathrm{c}}^2 H_z(r,\phi)=0,\\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\frac{\partial E_z(r,\phi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 E_z(r,\phi)}{\partial^2\phi}+k_{\mathrm{c}}^2 E_z(r,\phi)=0,\end{gathered} \tag{1}$$

где r и z — поперечная и продольная (по отношению к оси волновода) координаты, ϕ — азимутальный угол в поперечной плоскости, k_{c} — критическое волновое число. Будем искать критические волновые числа, постоянные распространения и компоненты электромагнитных полей H- и E-волн для исследуемого волновода. Исходя из соображений симметрии рассматриваемой двумерной области разобьём её на четыре части и будем анализировать одну из них с граничными условиями на части внешнего контура (см. рис. 1*в*). Граничные условия имеют вид

$$E_z=0,\qquad \partial H_z/\partial n=0 \tag{2а}$$

или

$$\partial E_z/\partial n=0,\qquad H_z=0. \tag{2б}$$

Условие (2а) будем называть электрическим, а условие (2б) — магнитным; оператор $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали к контуру.

При расчётах будем считать, что потери в металлических стенках волноводного тракта отсутствуют, а размеры волноводной структуры могут быть произвольными. Такой подход позволяет расширить область применения полученного решения для рассматриваемых волноводных структур и в дальнейшем проводить на его основе численные расчёты различных волноводных трактов с металлическими рёбрами.

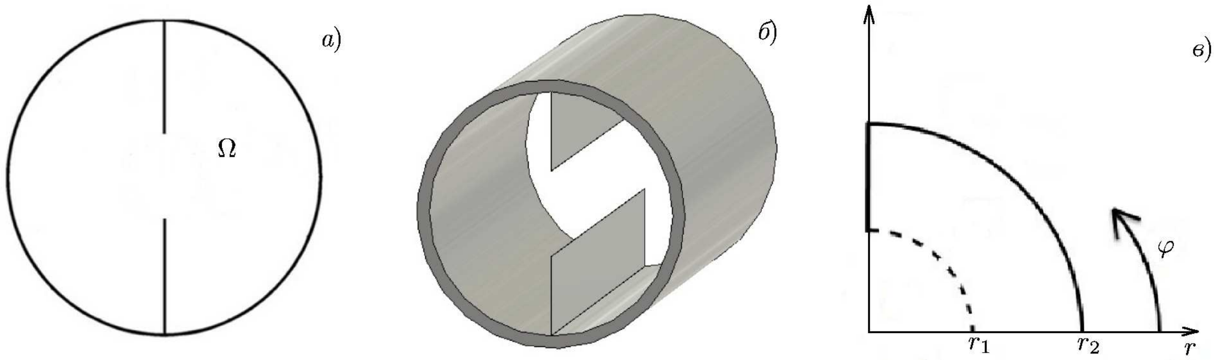

Рис. 1. Двумерная область исследования (*а*), круглый волновод с бесконечно тонкими металлическими рёбрами (*б*) и исследуемая часть волновода (*в*)

Для решения поставленной задачи используем метод частичных областей с учётом особенности поведения электромагнитного поля вблизи металлического ребра при аппроксимации его по углу ϕ.

В данной работе сделаем акцент на исследовании зависимости критических волновых чисел от геометрических размеров волноводной структуры, на особенностях численной реализации алгоритмов расчёта, сходимости метода и достоверности получаемых результатов. Также рассмотрим результаты расчёта электромагнитных полей и их визуализацию. Необходимо отметить, что в статьях [5, 6] и работах других авторов приводились результаты расчётов только критических частот для волноводных структур с различными ограничениями.

2. НАХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ *H*-ВОЛН

Проведём расчёт критических частот и постоянных распространения H-волн в круглом волноводе с двумя радиальными металлическими рёбрами.

Согласно методу частичных областей разобьём поперечное сечение рассматриваемого сектора исследуемого волновода (см. рис. 1*в*) на две частичные области: $0 \le r \le r_1$ (первая область) и $r_1 \le r \le r_2$ (вторая область), где $r = r_1$ — граница их раздела. В этом случае z-компоненты напряжённости магнитного поля ищем в виде

$$H_z^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\Big[(2m+1-g)\,\phi - \frac{\pi}{2}\,g\Big]\, F_{1\,m}(r),$$
$$H_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos\Big[(2m+g)\,\phi - \frac{\pi}{2}\,g\Big]\, F_{2\,m}(r), \tag{3}$$

где верхний индекс в скобках означает частичную область, A_m, B_m — неизвестные числовые коэффициенты, $g = 0$ для электрического граничного условия, $g = 1$ — для магнитного,

$$F_{1\,m}(r) = J_{2m+1-g}(kr), \qquad F_{2\,m}(r) = J_{2m+g}(kr) + P_m(kr_2) N_{2m+g}(kr), \tag{4}$$

k — волновое число свободного пространства, $J_i(x)$ и $N_i(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода i-го порядка соответственно,

$$P_m(kr_2) = -\,\frac{J'_{2m+g}(kr_2)}{N'_{2m+g}(kr_2)}\,, \tag{5}$$

штрих обозначает производную по радиусу r. В такой записи компоненты поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца и граничным условиям на всех границах, кроме $r = r_1$. Условие непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границе раздела частичных областей можно выполнить за счёт соответствующего определения неизвестных коэффициентов разложения. Для этого на границе раздела двух частичных областей введём неизвестную функцию $f(\phi)$ так, что $E_\phi = \pi C f(\phi)/4$, где $C = j\omega\mu_0/k$, ω — круговая частота излучения, μ_0 — магнитная постоянная. Тогда, учитывая ортогональность функций разложения в (3), можно выразить неизвестные коэффициенты A_m и B_m через функцию $f(\phi)$:

$$A_m = \frac{1}{F'_{1\,m}(r_1)} \int\limits_0^{\pi/2} f(\phi) \cos\Big[(2m+1-g)\,\phi - \frac{\pi}{2}\,g\Big]\ \mathrm{d}\phi,$$

$$B_m = \frac{1}{\mu_m F'_{2\,m}(r_1)} \int\limits_0^{\pi/2} f(\phi) \cos\Big[(2m+g)\,\phi - \frac{\pi}{2}\,g\Big]\ \mathrm{d}\phi, \tag{6}$$

где $\mu_m = 2$ при $m = g = 0$ и $\mu_m = 1$ в остальных случаях (величина μ_m определяется из условия ортогональности функций разложения по углу ϕ).

В рассматриваемом волноводном тракте (см. рис. 1*в*) существует точка при $r = r_1$ и $\phi = \pi/2$, где поле сингулярно. Учитывая особенность поведения электромагнитного поля вблизи неё, неизвестные функции $f(\phi)$ будем искать в виде [19]

$$f(\phi) = \left[1 - \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^2\right]^{-1/2} \sum_{i=0}^{\infty} C_i T_{2i+g}\left(\frac{2\phi}{\pi}\right), \tag{7}$$

где $T_{2i}(x)$ — полином Чебышёва, а C_i — неизвестные коэффициенты разложения. Далее, выполняя необходимые преобразования, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов:

$$\sum_{i=0}^{N} C_i D^{\mathrm{h}}_{i\,j}(k) = 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Приравнивая определитель системы линейных алгебраических уравнений (8) к нулю, получаем уравнение для нахождения критических волновых чисел исследуемого волновода:

$$\det D^{\mathrm{h}}_{i\,j}(k) = 0, \tag{9}$$

где матричные элементы $D^{\mathrm{h}}_{i\,j}(k)$ имеют следующий вид:

$$D^{\mathrm{h}}_{ij}(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_{1\,m}(r_1)}{F'_{1\,m}(r_1)}\, J_{2i+g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+1-g)\right] J_{2j+g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+1-g)\right] - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_{2\,m}(r_1)}{\mu_m F'_{2\,m}(r_1)}\, J_{2i+g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+g)\right] J_{2j+g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+g)\right]. \tag{10}$$

3. АЛГЕБРАИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ *E*-ВОЛН

Нахождение критических чисел E-волн аналогично. В этом случае z-компоненты напряжённости электрического поля имеют следующий вид:

$$E_z^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m \sin\Big[(2m+1-g)\phi + \frac{\pi}{2}\,g\Big]\, \tilde{F}_{1\,m}(r),$$
$$E_z^{(2)} = \sum_{m=1-g}^{\infty} \tilde{B}_m \sin\Big[(2m+g)\phi + \frac{\pi}{2}\,g\Big]\, \tilde{F}_{2\,m}(r). \tag{11}$$

где $\tilde{A}_m$, $\tilde{B}_m$ — неизвестные числовые коэффициенты,

$$\tilde{F}_{1\,m}(r) = J_{2m+1-g}(kr); \qquad \tilde{F}_{2\,m}(r) = J_{2m+g}(kr) + \tilde{P}_m(kr_2) N_{2m+g}(kr), \tag{12}$$
$$\tilde{P}_m(kr_2) = -\,\frac{J_{2m+g}(kr_2)}{N_{2m+g}(kr_2)}\,. \tag{13}$$

Для нахождения коэффициентов в разложении (11) на границе раздела частичных областей введём неизвестную функцию так, что $E_z = \pi\tilde{C}\tilde{f}(\phi)/4$, где $\tilde{C} = j\omega\varepsilon_0/k$, ε_0 — электрическая постоянная. Тогда

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{\tilde{\mu}_m \tilde{F}'_{1\,m}(r_1)} \int\limits_0^{\pi/2} \tilde{f}(\phi) \sin\Big[(2m+1-g)\phi + \frac{\pi}{2}\,g\Big]\; \mathrm{d}\phi$$
$$\tilde{B}_m = \frac{1}{\tilde{F}'_{2\,m}(r_1)} \int\limits_0^{\pi/2} \tilde{f}(\phi) \sin\Big[(2m+g)\phi + \frac{\pi}{2}\,g\Big]\; \mathrm{d}\phi, \tag{14}$$

где $\tilde{\mu}_m = 2$ при $m = 0$, $g = 1$ и $\tilde{\mu}_m = 1$ в остальных случаях.

Учитывая особенность поведения аппроксимируемых компонент электромагнитного поля, функцию $\tilde{f}(\phi)$ берём в виде

$$\tilde{f}(\phi) = \left[1 - \left(\frac{2\phi}{\pi}\right)^2\right]^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{C}_i U_{2i+1-g}\left(\frac{2\phi}{\pi}\right), \tag{15}$$

где $U_{2i}(x)$ — полином Чебышёва второго рода.

Далее, выполняя необходимые преобразования, получаем уравнение для определения критических волновых чисел E-волн:

$$\det D^{\mathrm{e}}_{ij}(k) = 0, \tag{16}$$

где матричные элементы $D^{\mathrm{e}}_{i\,j}(k)$ имеют следующий вид:

$$D^{\mathrm{e}}_{i\,j}(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}'_{1\,m}(r_1)}{\mu_m \tilde{F}_{1\,m}(r_1)(2m+1-g)^2}\, J_{2i+2-g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+1-g)\right] J_{2j+2-g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+1-g)\right] -$$
$$- \sum_{m=1-g}^{\infty} \frac{\tilde{F}'_{2\,m}(r_1)}{\tilde{F}_{2\,m}(r_1)(2m+g)^2}\, J_{2i+2-g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+g)\right] J_{2j+2-g}\left[\frac{\pi}{2}\,(2m+g)\right]. \tag{17}$$

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РАСЧЁТА И МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Разработанный алгоритм расчёта имеет несколько особенностей. Одна из них заключается в том, что функции Бесселя, входящие в матричные элементы (10) и (17), не зависят от критических частот и постоянных распространения. Это позволяет вычислить их для фиксированных значений один раз и записать в память. Таким образом, при проведении расчётов удаётся значительно сократить требуемое машинное время.

Другая особенность заключается в вычислении функций разложения (4) и (12), входящих в матричные элементы СЛАУ. Во-первых, приходится находить функции Бесселя, аргументы которых зависят от k, т. е. их необходимо вычислять на каждом шаге поиска корней уравнений (9) и (16). Следовательно, именно эта часть алгоритма в основном определяет время счёта. Во-вторых, порядок вычисляемых функций Бесселя составляет $2m$. Следовательно, задача сводится к вычислению функций Бесселя с аргументом порядка $30\div50$ и индексом порядка $100\div300$.

Однако необходимо отметить, что в матричных элементах используется отношение функций Бесселя, т. е. необходимо находить величины вида

$$\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\,, \qquad \frac{J'_\nu(x)+P_\nu N'_\nu(x)}{J_\nu(x)+P_\nu N_\nu(x)}\,. \tag{18}$$

Рассмотрим один из способов вычисления отношения (18) на примере:

$$Q_\nu(x)=\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}=\frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)}-\frac{\nu}{x}\,. \tag{19}$$

Рассматривая рекуррентное соотношение для $Q_\nu(x)$, можно показать, что выражение

$$Q_\nu(x)=\frac{\nu}{x}-\frac{x}{xQ_{\nu+1}(x)+\nu+1} \tag{20}$$

обладает устойчивостью, т. к. убывает по закону $1/\nu$. Это позволяет вычислить с высокой точностью отношения для максимального ν, а потом воспользоваться рекуррентным соотношением без потери точности вычислений. В соответствии с этим при $\nu\gg x$ имеем

$$\frac{J_{\nu-1}(x)}{J_\nu(x)}=\frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{(x/2)^{2m+\nu-1}}{m!\Gamma(m+\nu)}}{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{(x/2)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}}=\bar C\,\frac{\sum_{m=0}^{\infty}b_m^*}{\sum_{m=0}^{\infty}a_m^*}\,, \tag{21}$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция, $\bar C=2\nu/x$, $a_0^*=b_0^*=1$,

$$a_{n+1}^*=-a_n^*\frac{x^2}{4(n+1)\,(n+\nu+1)}, \qquad b_{n+1}^*=-b_n^*\frac{x^2}{4(n+1)\,(n+\nu)}.$$

Суммирование можно начинать для значений $m\ge x^2/4$.

Таким образом, вычислив $Q_\nu(x)$, мы можем легко определить по (20) все интересующие нас функции. Алгоритм нахождения остальных функций аналогичен.

Особенности алгоритма расчёта и построения картин распределения поля рассмотрены в работах [20, 21]. Так, при моделирования силовых линий электромагнитного поля H- и E-волн в волноводе с воздушным заполнением на критической частоте достаточно ограничиться построением силовых линий электрического поля. При этом задача построения силовых линий сводится к нахождению изолиний z-компонент полей этих волн:

$$H_z(r,\phi)=\mathrm{const},\qquad E_z(r,\phi)=\mathrm{const}. \tag{22}$$

Каждому значению постоянной соответствует своя силовая линия. Задавая в (22) последовательно значения постоянных, получим семейство силовых линий, относительная плотность которых пропорциональна напряжённости поля.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Рассмотрим основные результаты электродинамического анализа характеристик круглого волновода с бесконечно тонкими радиальными металлическими рёбрами. При проведении расчётов в рядах (10) и (17), входящих в матричные элементы, учитывалось конечное число членов M. Влияние их числа, а также числа N аппроксимирующих функций (7) и (15) на результаты расчёта нормированных критических волновых чисел $k_\mathrm{c}r_2$ приведены в табл. 1. В ней представлены результаты расчёта критических волновых чисел первых четырёх H-волн для структуры с $r_1/r_2=0{,}35$ и электрическим граничным условием ($g=0$). Расчёты показали, что результаты, полученные в первом и втором приближениях, отличаются друг от друга не более чем на 0,02 %, а во втором и третьем — на 0,01 %. Дальнейшее увеличение числа суммируемых членов (M) и порядка системы (N) приводит к стабилизации получаемых результатов и не даёт существенного повышения точности. Из табл. 1 видно, что предложенный метод обеспечивает быструю сходимость получаемых результатов, причём характер сходимости монотонный. Аналогично

Таблица 1. Значения $k_\mathrm{c}r_2$

N	$M=10$	$M=30$	$M=50$	$M=80$	$M=100$
1	1,3327	1,3284	1,3279	1,3276	1,3259
	3,0706	3,0664	3,0659	3,0656	3,0639
	5,2245	5,2217	5,2213	5,2211	5,2200
	7,0270	7,0036	7,0009	7,9993	7,98969
2	1,3336	1,3287	1,3281	1,3278	1,3259
	3,0908	3,0897	3,0895	3,0894	3,0891
	5,2247	5,2217	5,2213	5,2212	5,2200
	5,3182	5,3168	5,3166	5,3165	5,3160
3	1,3348	1,3289	1,3283	1,3279	1,3259
	3,0921	3,0904	3,0902	3,0901	3,0895
	5,2270	5,2226	5,2222	5,2219	5,2204
	5,3222	5,3218	5,3218	5,3218	5,3217
4	1,3367	1,3292	1,3285	1,3282	1,3260
	3,0926	3,0904	3,0902	3,0901	3,0895
	5,2281	5,2228	5,2223	5,2220	5,2204
	5,3234	5,3226	5,3226	5,3225	5,3223
5	1,3395	1,3298	1,3290	1,3285	1,3260
	3,0934	3,0906	3,0904	3,0902	3,0895
	5,2303	5,2232	5,2226	5,2223	5,2204
	5,3236	5,3226	5,3226	5,3225	5,3223

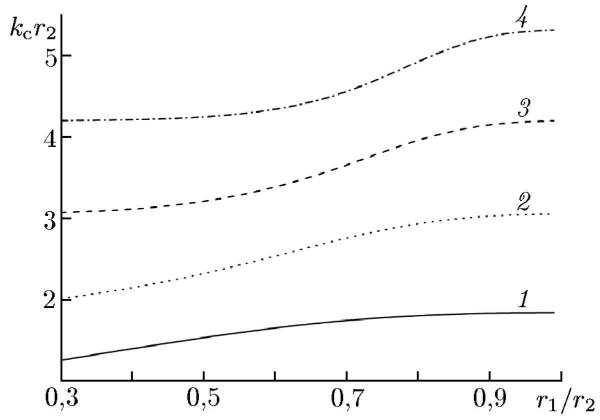

Рис. 2. Зависимость нормированных критических волновых чисел H-волн от геометрических размеров гребня (номера кривых соответствуют номерам мод)

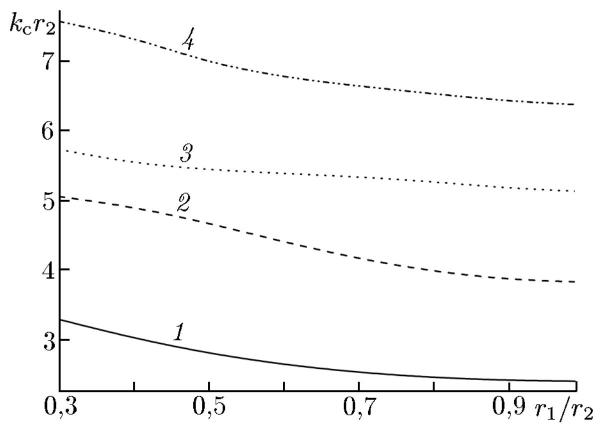

Рис. 3. Зависимость нормированных критических волновых чисел E-волн от геометрических размеров гребня (номера кривых соответствуют номерам мод)

было проведено исследование сходимости метода в случаях H-волн при магнитном граничном условии ($g = 1$) и E-волн. В результате была также установлена быстрая сходимость результатов (отличие не превышает 0,02 %), что обусловлено правильностью учёта особенности поведения электромагнитного поля вблизи бесконечно тонкого ребра. Таким образом, исследование сходимости показало, что для проведения расчётов с погрешностью менее 1 % достаточно использовать третье приближение при учёте 50 членов в матричных рядах.

Для проверки достоверности получаемых результатов осуществлялось сравнение нормированных критических волновых чисел для классического круглого волновода, полученных из строго решения краевой задачи и с помощью выше изложенного метода при стремлении r_1 к r_2. Так, для первой H-волны нормированные критические волновые числа различались в четвёртом знаке после запятой и составили 1,8416 и 1,8411 соответственно, а для первой E-волны — в третьем знаке после запятой и составили 3,829 и 3,831 соответственно.

Для волновода с металлическими рёбрами конечной высоты корректность результатов, получаемых с помощью разработанного алгоритма, подтверждалась сравнением с аналогичными результатами компьютерного моделирования в пакете «CST Microwave Studio». В последнем краевая задача решалась сеточным методом конечных разностей. Этот пакет является мировым стандартом при проектировании элементов и устройств СВЧ диапазона, поэтому совпадение результатов расчёта, полученных с помощью предлагаемого метода решения, с даваемыми им данными может являться доказательством достоверности получаемых значений и применимостью этих результатов для инженерных расчётов. Для первых четырёх H-волн соответствующие нормированные критические волновые числа составили 1,326 и 1,321; 3,089 и 3,081; 5,220 и 5,219; 5,322 и 5,320. Конечное расхождение сравниваемых нормированных критических волновых чисел обусловлено не только точностью разработанного алгоритма, но и степенью дискретизации сеточного метода в пакете «CST Microwave Studio». Совпадение значений до второго знака после запятой можно считать достаточным для оценки достоверности работы алгоритма, описанного в данной работе.

В работе исследована зависимость нормированных критических волновых чисел от геометрических размеров волноводной структуры. Так, например, на рис. 2 и 3 приведены графики зависимостей критических волновых чисел первых четырёх мод H- и E-волн круглого волновода от размеров тонких металлических рёбер. Необходимо отметить, что в спектре волновода первая

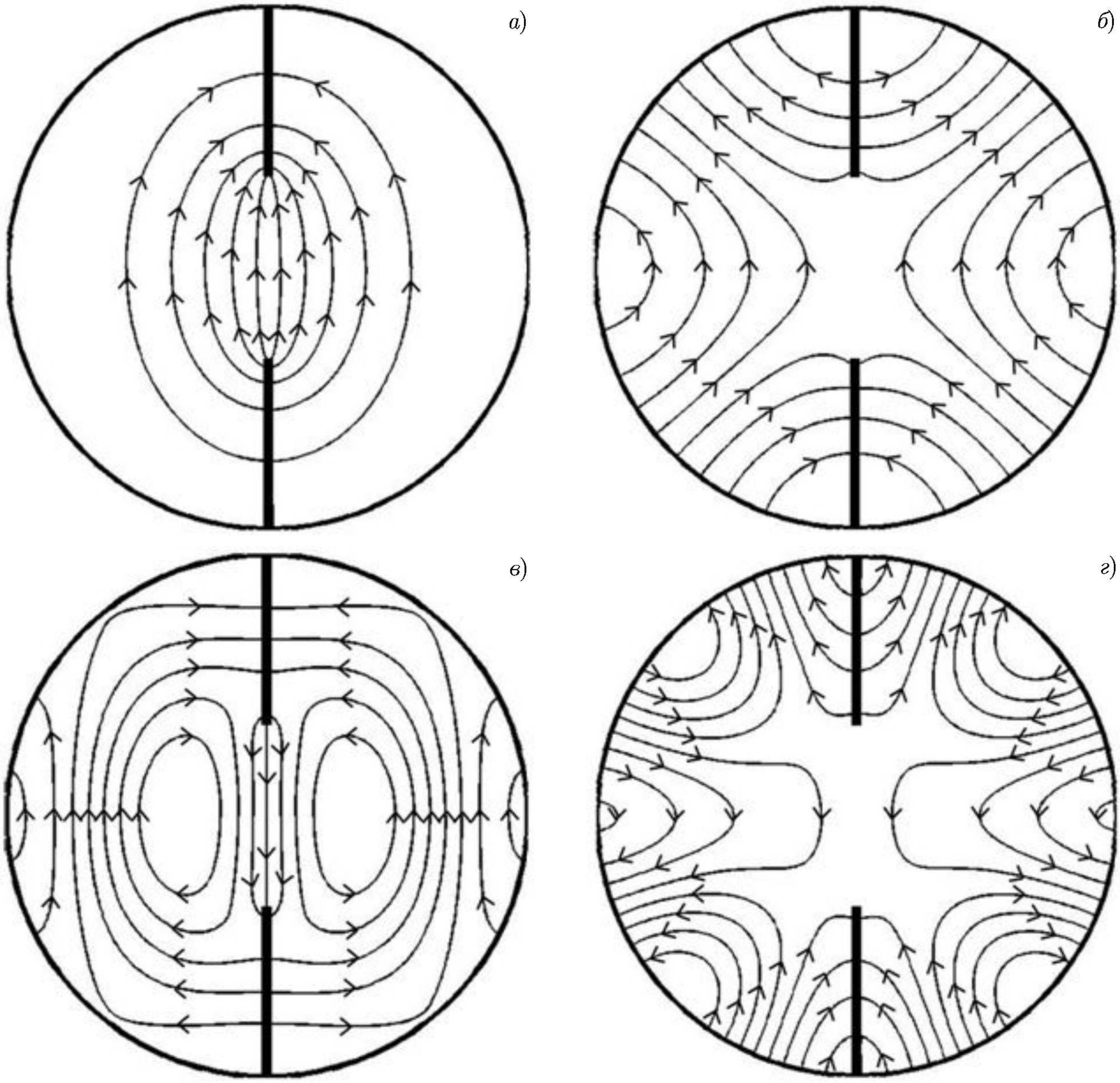

Рис. 4. Поперечная структура электромагнитных полей H-волн для мод 1 (*а*), 2 (*б*), 3 (*в*) и 4 (*г*) при $g = 0$

и третья моды имеют граничное условие $g = 0$, а вторая и четвёртая $g = 1$. Как видно из рис. 2, в случае H-волн при увеличении размера ребра наблюдается уменьшение критических волновых чисел всех представленных мод, при этом полоса одномодового режима волновода сужается. Для E-волн (см. рис. 3) наблюдается обратная зависимость: при увеличении размера ребра критические волновые числа увеличиваются, а полоса одномодового режима расширяется.

Результаты визуализации электромагнитных полей в поперечном сечении исследуемого волновода для первых четырёх H-волн с различными граничными условиями представлены на рис. 4 ($g = 0$) и рис. 5 ($g = 1$). На этих рисунках построены силовые линии электрического поля для структуры с $r_1/r_2 = 0{,}35$. Визуализация электромагнитных полей в поперечном сечении исследуемого волновода для первых четырёх E-волн с различными граничными условиями представлена на рис. 6 и 7 при $g = 0$ и $g = 1$ соответственно. Из приведённых результатов видно, что разра-

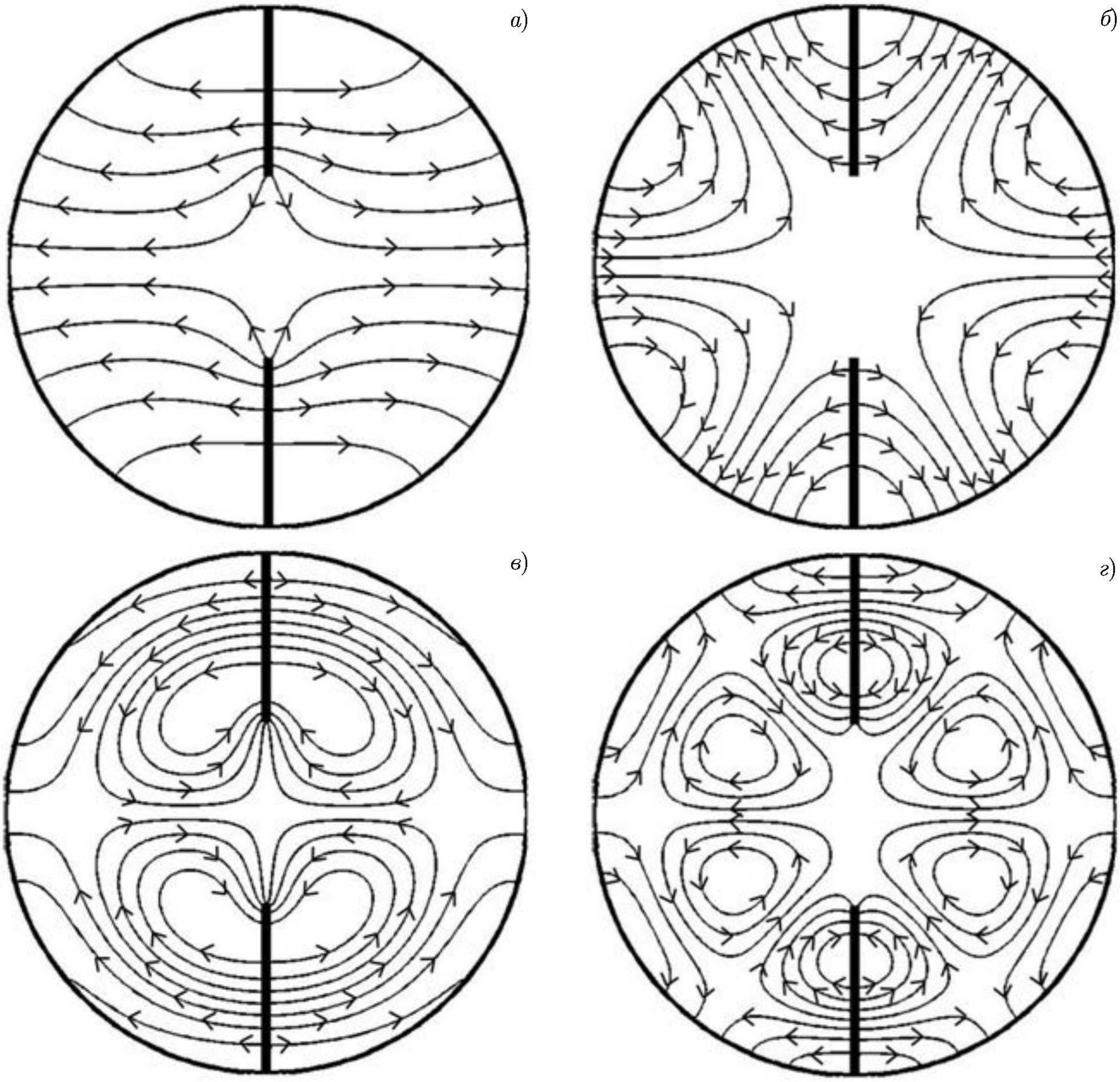

Рис. 5. Поперечная структура электромагнитных полей H-волн для мод 1 (*а*), 2 (*б*), 3 (*в*) и 4 (*г*) при $g = 1$

ботанный метод обеспечивают достаточную непрерывность компонент поля на границе раздела частичных областей. Представленная визуализация подтверждает точность и эффективность предложенных алгоритмов и позволяет анализировать влияние металлических рёбер на распределение электромагнитного поля в поперечном сечении волновода.

Приведённые результаты позволяют оценить основные эффекты, связанные с наличием тонкого продольного металлического гребня в круглом волноводе. Так, визуализация электромагнитного поля в поперечном сечении даёт представления об искажении линий напряжённости и позволяет определить области наибольшей плотности электромагнитной энергии, а также объяснить с физической точки зрения вышеописанные изменения критических волновых чисел H- и E-волн. В частности, поскольку основная H-волна исследуемого волновода сосредоточена между гребнями, то уменьшение зазора влечёт за собой и уменьшение критического волнового числа.

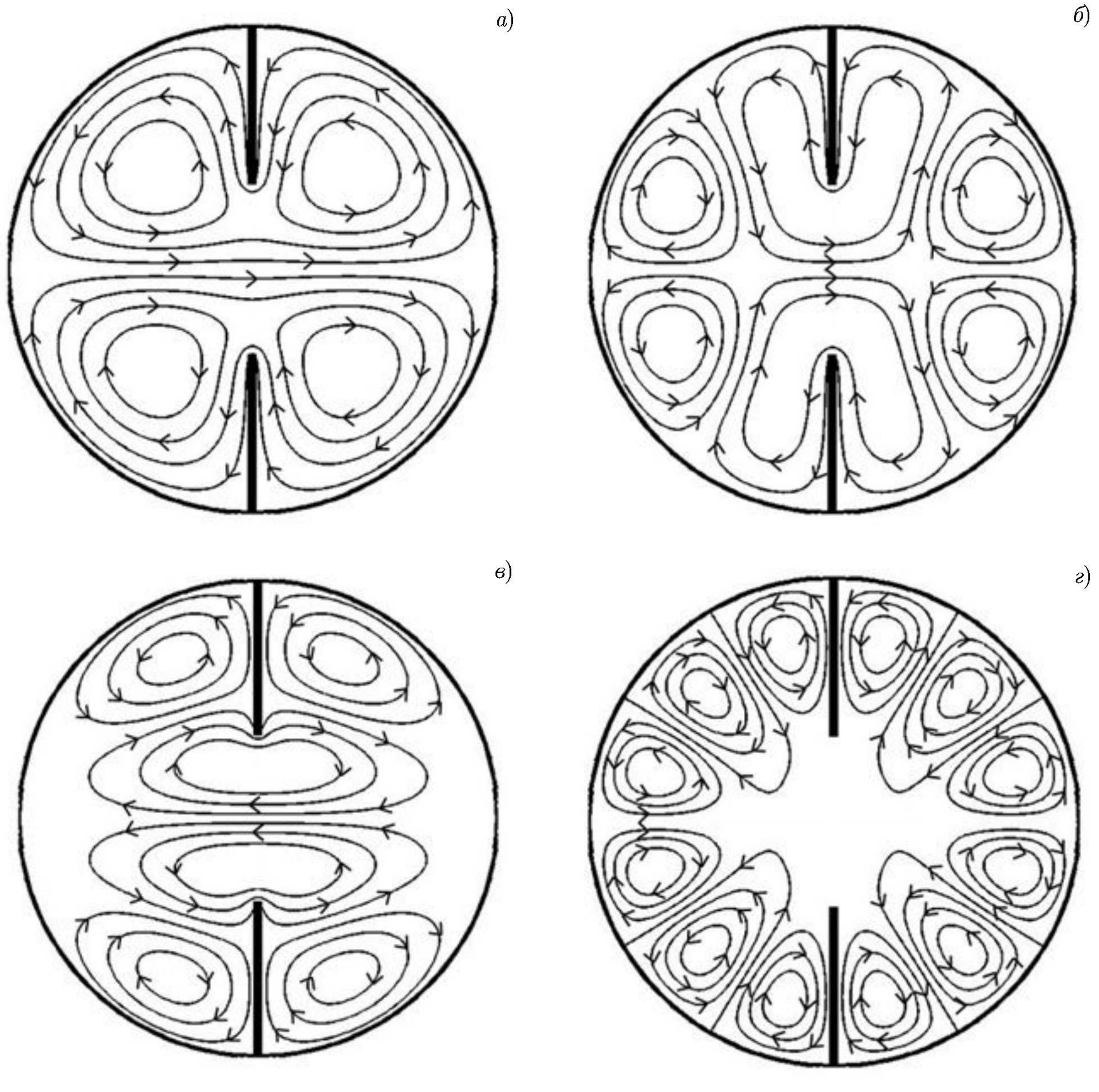

Рис. 6. Поперечная структура электромагнитных полей E-волн для мод 1 (*а*), 2 (*б*), 3 (*в*) и 4 (*г*) при $g = 0$

Данная зависимость является общей для всех типов гребневых волноводов, например для волноводов прямоугольного поперечного сечения. Однако уже для первой высшей моды наблюдается значительное отличие её чувствительности к величине металлического гребня, что полностью объясняется различиями в распределении поля данной волны по поперечному сечению волновода: если в прямоугольном волноводе влияние металлического гребня минимально, то в круглом, наоборот, силовые линии замкнуты на гребень по всей его длине, что приводит к заметному падению критического волнового числа. Таким образом, визуализация и анализ электромагнитных полей, особенно в волноводных структурах со сложным поперечным сечением, позволяют максимально эффективное использовать такие структуры на основе рассмотрения поведения как основной, так и высших мод H-и E-волн.

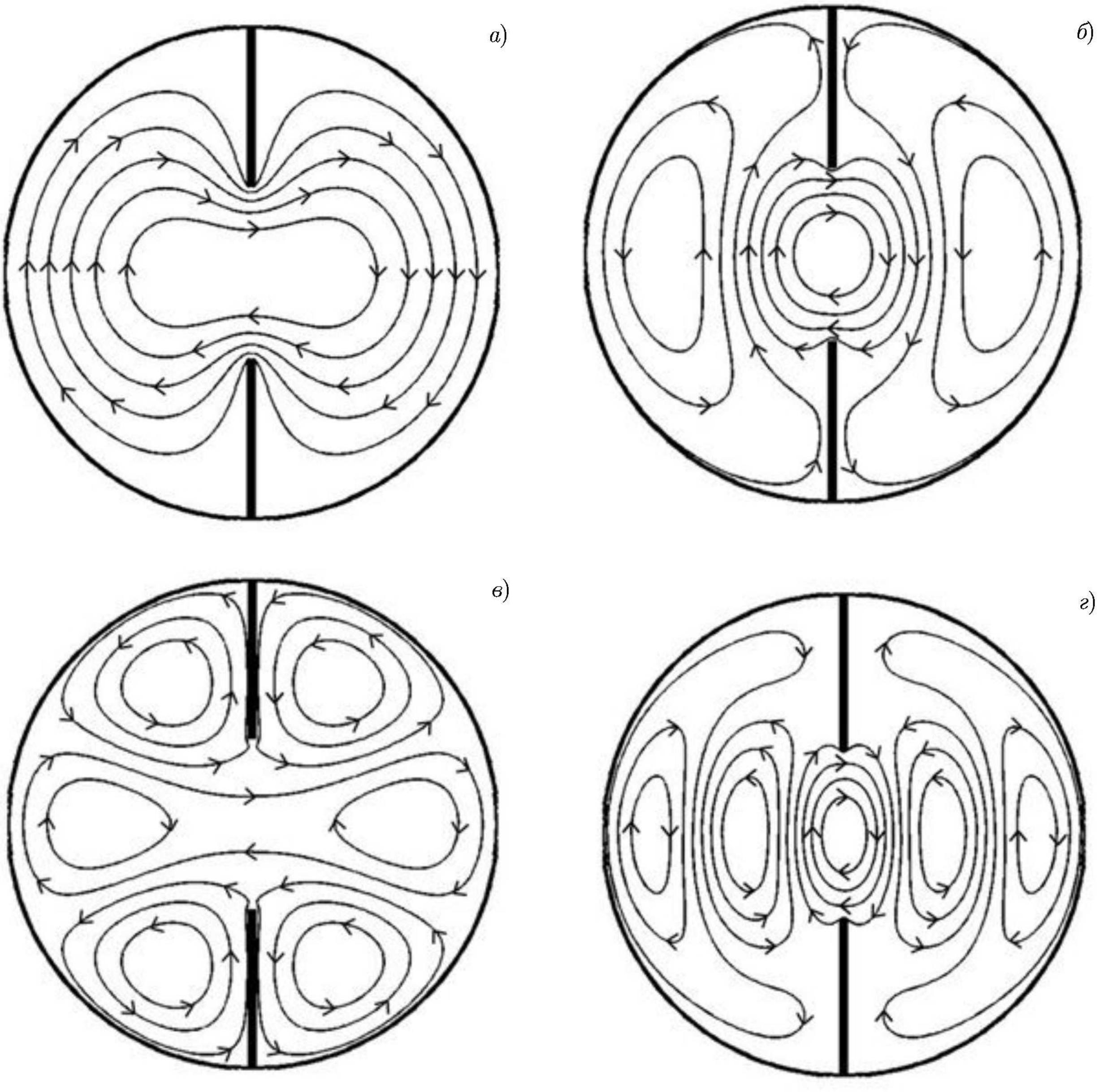

Рис. 7. Поперечная структура электромагнитных полей E-волн для мод 1 (*а*), 2 (*б*), 3 (*в*) и 4 (*г*) при $g = 1$

Предложенный алгоритм электродинамического анализа может быть легко расширен на более широкий класс цилиндрических волноведущих структур с радиальными металлическими рёбрами, включая рёбра конечной толщины и рёбра сложной радиально-симметричной конфигурации.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что применение метода частичных областей с учётом особенности электромагнитного поля на металлических рёбрах позволяет строить высокоточные и быстродействующие алгоритмы электродинамического анализа электромагнитных полей круглых волноводов с тонкими радиальными металлическими рёбрами. Рассчитанные в явном виде выражения для электромагнитных полей основной и высших типов волн позволяют не только проводить визуализацию их распределения по поперечному сечению волновода, но и строить на их основе алгоритмы расчёта элементов и устройств на базе данного типа волноводов сложного сечения.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МД-118.2017.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rong Y., Zaki K. A. // IEEE Trans. MTT. 2000. V. 48, No. 2. P. 258.
2. Amari S., Catreux S., Vahldieck R., Bornemann J. // IEEE Trans. MTT. 1998. V. 46, No. 5. P. 479.
3. Bornemann J., Amari S., Uher J., Vahldieck R. // IEEE Trans. MTT. 1999. V. 47, No. 3. P. 330.
4. Губский Д. С., Ляпин В. П., Синявский Г. П. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 1. С. 12.
5. Губский Д. С., Земляков В. В., Лонкина Д. В., Синявский Г. П. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. Т. 20, № 6. С. 27.
6. Губский Д. С., Синявский Г. П. // Физические основы приборостроения. 2012. Т. 1, № 1. С. 51.
7. Yu S. Y., Bornemann J. // Proc. 2011 IEEE Pacific Rim Conf. Commun. Computers and Signal Processing. Victoria, Canada, 23–26 August 2011. P. 504.
8. Zhang C., Wang J., Chen M., Zhang Z. // Proc. 2011 Cross Strait Quad-Regional Radio Sci. Wireless Technology Conf. Harbin, 26–30 July 2011. P. 479.
9. Ma C., Wang J. // 2015 IEEE 6th Int Symposium on Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies, Shanghai, 28–30 October 2015. P. 587.
10. Хандамиров В. Л., Сергеев Д. А. //Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2016. № 5. С. 66.
11. Елеусинова Г. М. // Достижения науки и образования. 2016. С. 5.
12. Скворцов А. А. // Вестник Саратовского гос. техн. ун-та. 2005. № 2. С. 56.
13. Fanti A., Montisci G., Mazzarella G., Casula G. A. // Appl. Computat. Electromagn. Soc. J. 2013. No. 11. P. 1 100.
14. Бирюков В. В. // Антенны. 2016. № 4. С. 62.
15. Новоселова Н. А., Раевский С. Б., Титаренко А. А. // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. 2010. № 2. С. 30.
16. Малышев Г. С., Раевский С. Б., Седаков А. Ю., Титаренко А. А. // Антенны. 2017. № 1. С. 61.
17. Li G., Cheng Y., Ma A. // 2016 Progress Electromagn Res. Sympos. Shanghai, 8–11 August 2016. P. 1 170.
18. Li P., Liu J., Lin G., et al. // Int. J. Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. 2017. No. 2.
19. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 328 с.
20. Заргано Г. Ф., Ляпин В. П., Михалевский В. С. и др. Волноводы сложных сечений. М.: Радио и связь, 1986. 124 с.
21. Заргано Г. Ф., Земляков В. В., Кривопустенко В. В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13, № 5. С. 54.

Поступила в редакцию 9 ноября 2017 г.; принята в печать 31 мая 2018 г.

ELECTRODYNAMIC ANALYSIS OF A CIRCULAR WAVEGUIDE WITH THIN METAL RIBS

D. S. Gubsky, V. V. Zemlyakov, and D. V. Lonkina

We solve the problem of electrodynamic analysis of the radiation content in a circular waveguide with thin radial metal ribs. The algorithms for calculation of critical wave numbers and components of the electromagnetic fields of the H and E waves have been developed with allowance for the specific feature of the wave behavior near a thin metal rib. Spectral characteristics of the waveguide are studied. Structures of the electromagnetic fields of the fundamental mode and higher modes are determined.