

УДК 533.951

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*Е. А. Широков\**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Статья посвящена развитию численного метода моментов для решения интегрального уравнения, описывающего распределение заряда вдоль тонкого антенного провода с конечной длиной в квазистатическом приближении в анизотропной среде. Показано, что метод моментов может быть использован для расчётов электродинамических характеристик такой антенны в условиях, когда ядро интегрального уравнения имеет особенность, связанную с резонансным конусом. Проанализировано, как соотношение компонент тензора диэлектрической проницаемости и способ сегментации поверхности антенны влияют на точность вычислений. Показано, что относительная погрешность расчёта характеристик антенны составляет небольшую величину, порядка 1%, при сегментации антенного провода на 10 частей.

### ВВЕДЕНИЕ

Строгая электродинамическая теория передающих антенн сводится к получению и решению интегрального уравнения, описывающего распределение тока (заряда) по поверхности антенны [1]. Если последняя представляет собой идеальный проводник, то это интегральное уравнение получается из условия, что электрическое поле имеет на поверхности антенны только нормальную компоненту. Решение этого уравнения позволяет вычислить различные электродинамические характеристики антенны, например входной импеданс, и рассчитать поле её излучения во всём пространстве. В то же время хорошо известно, что в анизотропных средах электродинамические характеристики металлических антенн могут отличаться от соответствующих вакуумных величин не только количественно, но и качественно. К таким средам относятся, например, магнитоактивная и движущаяся плазма [2, 3], а также метаматериалы некоторых типов [4]. Тензор диэлектрической проницаемости таких сред в общем случае имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Анализ работы передающих антенн в таких средах представляет собой весьма значительный практический интерес, обусловленный в первую очередь проведением различных радиофизических экспериментов с помощью искусственных спутников в околоземной плазме и плазме солнечного ветра [5, 6], а также созданием антенн в оболочках из метаматериалов [7]. Фундаментальное значение таких исследований состоит в развитии электродинамической теории анизотропных сред и антенн в них.

Особый интерес представляют тонкие электрические антенны, длина которых много меньше длины электромагнитной волны в среде. Такие антенны при  $\epsilon\eta < 0$  могут достаточно эффективно излучать квазиэлектростатические волны в направлении, близком к образующим так называемого резонансного конуса [3]. В статье [8] путём приближённого решения интегрального уравнения

\* eshirokov@yandex.ru

было найдено распределение заряда вдоль тонкого кругового цилиндра с конечной длиной в анизотропной среде, ориентированного не слишком близко к резонансному направлению, а также был вычислен его импеданс. В работе [9] соответствующие расчёты были проведены и для ориентации цилиндра вдоль резонансного направления.

Однако в реальных условиях, например в лабораторных или космических экспериментах, антенные системы могут иметь достаточно сложную форму и сопрягаться с несущими конструкциями. Ясно, что в таких случаях даже приближённое решение соответствующего интегрального уравнения невозможно, поэтому приходится использовать численные методы. Наиболее универсальным методом, позволяющим численно решать линейные интегральные уравнения, является метод моментов. Он очень широко применяется при анализе антенн в изотропных средах [10–12], и на его основе был разработан программный код NEC [13]. При этом применение метода моментов для расчётов антенн в анизотропных средах практически не рассматривалось. В статье [14] были сделаны попытки получить и решить соответствующее интегральное уравнение для анизотропной среды, однако не было уделено должного внимания случаю  $\varepsilon\eta < 0$ .

В данной работе метод моментов развивается для расчётов электродинамических характеристик антенны в форме тонкого кругового цилиндра с конечной длиной, ориентированного вдоль оси анизотропии внешней среды: численно решается интегральное уравнение для распределения заряда вдоль цилиндра, определяется соответствующий импеданс и рассматривается, каким образом соотношение компонент тензора диэлектрической проницаемости и способ сегментации поверхности проводника влияют на точность расчётов. Основное внимание уделяется случаю  $\varepsilon\eta < 0$ , для сравнения также приводятся некоторые результаты расчётов для  $\varepsilon\eta > 0$ . Указанный выбор формы антенны обусловлен тем, что для неё известны формула для импеданса и приближённое аналитическое решение интегрального уравнения для распределения заряда [8, 15]. Эти соотношения используются в данной статье для контроля точности численных расчётов.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается идеально проводящий тонкий круговой цилиндр с длиной  $2L$  и радиусом  $a \ll L$ , ориентированный вдоль оси анизотропии внешней однородной среды и излучающий электромагнитные волны. Электрическое поле этих волн  $\text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$  предполагается квазипотенциальным:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  и  $t$  — радиус-вектор и время соответственно,  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота излучения. На поверхности цилиндра  $S$  задан постоянный в каждый момент времени квазистатический потенциал:

$$\Phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \Phi_0 = \text{const.} \quad (2)$$

Вне цилиндра (во внешней среде) потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению  $\text{div}[\hat{\varepsilon}\nabla\Phi(\mathbf{r})] = 0$ , или

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где ось  $z$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$  совпадает с осью симметрии цилиндра (концы цилиндра расположены в точках с координатами  $z = \pm L$ ) и направлена вдоль оси анизотропии. Существенно, что недиагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости (1) не входят в уравнение (3) в силу однородности среды.

Уравнение (3) с граничным условием (2) представляет собой задачу Дирихле. Известно, что она имеет единственное и устойчивое решение, если уравнение (3) относится к эллиптическому

типу, т. е. при  $\varepsilon\eta > 0$ . В вакууме ( $\varepsilon = \eta = 1$ ) функция Грина этого уравнения равна [16]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ . В более общем случае, когда компоненты  $\varepsilon$  и  $\eta$  отличны от единицы, но по-прежнему одного знака, функция Грина, очевидно, может быть получена масштабированием координат в выражениях (3) и (4). Следует отметить, что вид приведённых соотношений при  $\varepsilon = \eta = 1$  полностью соответствует обычным электростатическим (безызлучательным) задачам в вакууме.

Если же уравнение (3) относится к гиперболическому типу ( $\varepsilon\eta < 0$ ), то нахождение функции Грина в таком случае подразумевает регуляризацию задачи [8]. Запишем уравнение для функции Грина:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \delta(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где  $\mu^2 = |\varepsilon/\eta|$  и  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция. Ограничимся далее случаем  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta < 0$ . Регуляризация задачи заключается в следующем. Пусть величина  $\mu$  имеет малую мнимую часть, т. е.  $\mu = \mu_0 + i\bar{\mu}$ , где  $\mu_0 > 0$ ; для определённости будем полагать  $\bar{\mu} > 0$ . Представляя функцию Грина и дельта-функцию в виде фурье-разложения, из (5) получаем

$$G(\mathbf{r}) = \frac{\mu^2}{2\pi^2\varepsilon} \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}}{\mu^2(k_x^2 + k_y^2) - k_z^2}, \quad (6)$$

где интегрирование ведётся по всему пространству волновых векторов  $\mathbf{k}$ . Перейдём в этом пространстве к цилиндрическим координатам согласно равенствам  $k_x = k_\perp \cos \phi$ ,  $k_y = k_\perp \sin \phi$ . Тогда

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{\mu^2}{2\pi^2\varepsilon} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_\perp(x \cos \phi + y \sin \phi) + ik_z z]}{k_z^2 - \mu^2 k_\perp^2} k_\perp dk_\perp d\phi dk_z. \quad (7)$$

Первым шагом проинтегрируем по  $\phi$ :

$$\int_0^{2\pi} \exp[ik_\perp(x \cos \phi + y \sin \phi)] d\phi = 2\pi J_0(k_\perp \rho), \quad (8)$$

где  $J_0(k_\perp \rho)$  — функция Бесселя I рода 0-го порядка,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_z z)}{k_z^2 - \mu^2 k_\perp^2} dk_z \quad (9)$$

вычисляется с использованием теоремы о вычетах. Контур интегрирования в комплексной плоскости (см. рис. 1) выбирается таким образом, чтобы функция Грина соответствовала расходящимся волнам, т. е. стремилась к нулю на бесконечности. Соответственно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_z z)}{k_z^2 - \mu^2 k_\perp^2} dk_z = \frac{\pi i}{\mu k_\perp} \exp(i\mu_0 |z| k_\perp) \exp(-\bar{\mu} |z| k_\perp). \quad (10)$$

Вычисляя оставшийся интеграл и устремляя  $\bar{\mu}$  к нулю, получаем

$$\int_0^{+\infty} J_0(k_{\perp}\rho) \exp(i\mu_0 |z|k_{\perp}) \exp(-\bar{\mu} |z|k_{\perp}) dk_{\perp} \xrightarrow{\bar{\mu} \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2 z^2}}, & \mu^2 z^2 \leq \rho^2; \\ \frac{i}{\sqrt{\mu^2 z^2 - \rho^2}}, & \mu^2 z^2 > \rho^2. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, функция Грина в гиперболическом случае ( $\varepsilon > 0, \eta < 0$ ) равна [8]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} \sqrt{-(x-x')^2 - (y-y')^2 + \mu^2(z-z')^2}}, & (x-x')^2 + (y-y')^2 < \mu^2(z-z')^2; \\ -\frac{i}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - \mu^2(z-z')^2}}, & (x-x')^2 + (y-y')^2 \geq \mu^2(z-z')^2. \end{cases} \quad (12)$$

Она становится мнимой при пересечении резонансного конуса  $(x-x')^2 + (y-y')^2 = \mu^2(z-z')^2$ . На этом конусе функция Грина имеет особенность.

С учётом граничного условия (2) нетрудно показать, что

$$\Phi_0 = \iint_S \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r} \in S} dS', \quad (13)$$

где  $\sigma(\mathbf{r})$  — распределение поверхностной плотности заряда на проводнике, которое требуется найти. Следовательно, соотношение (13) представляет собой интегральное уравнение. В приближении тонкого провода [8] можно считать, что ток, текущий по поверхности цилиндра, имеет только  $z$ -компоненту, т. е. соответствующая плотность заряда зависит только от координаты  $z$  и не зависит от азимутального угла  $\varphi$ , где  $\text{tg } \varphi = y/x$ . Тогда уравнение (13) принимает вид уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\Phi_0 = 2\pi a \int_{-L}^L \sigma(z') G(z-z') dz' \quad (14)$$

с ядром

$$G(z-z') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{x=y=0, \mathbf{r}' \in S} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}}, & \varepsilon = \eta = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} \sqrt{-a^2 + \mu^2(z-z')^2}}, & \varepsilon > 0, \eta < 0, a^2 < \mu^2(z-z')^2; \\ -\frac{i}{\sqrt{|\varepsilon\eta|} \sqrt{a^2 - \mu^2(z-z')^2}}, & \varepsilon > 0, \eta < 0, a^2 \geq \mu^2(z-z')^2. \end{cases} \quad (15)$$

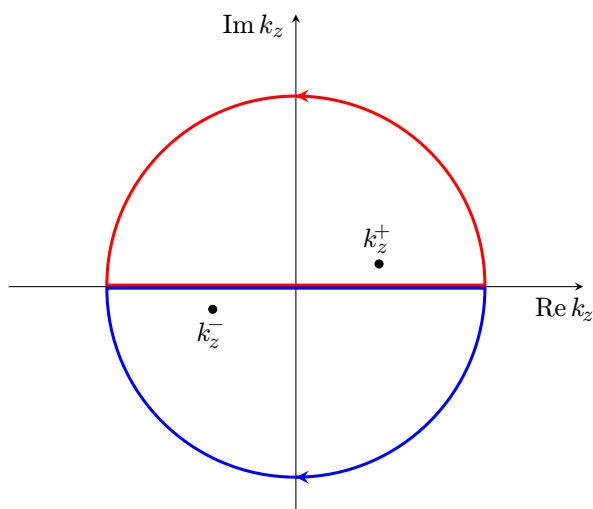


Рис. 1. Выбор контура интегрирования при вычислении интеграла (9). Красный и синий контуры соответствуют случаям  $z > 0$  и  $z < 0$ , радиус полуокружностей полагается бесконечно большим,  $k_z^+ = (\mu_0 + i\bar{\mu})k_{\perp}$  и  $k_z^- = -(\mu_0 + i\bar{\mu})k_{\perp}$  — полюса 1-го порядка подынтегральной функции в (9)

Интегральное уравнение (14) соответствует заполненному той же средой, что и снаружи, полному цилиндру без торцов (трубке), т. к. интегрирование идёт только по боковой поверхности цилиндра, а точка наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  находится не на поверхности цилиндра, а на его оси. Это позволяет существенно упростить расчёты. При этом исчезает особенность функции Грина при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  и остаётся только особенность на резонансном конусе (последняя — при  $\varepsilon\eta < 0$ ). Многочисленные расчёты для случая  $\varepsilon = \eta = 1$  показывают [17], что ядро в упрощённом виде (15) позволяет получить решение с высокой точностью (по сравнению с решением исходного интегрального уравнения (13) с ядром (4)). Относительно гиперболического случая следует отметить следующее. В статье [18] антенный провод в плазме был рассмотрен как сплошной цилиндр, по поверхности которого течёт электрический ток. Было найдено, что электродинамические характеристики такой антенны совпадают с соответствующими характеристиками, полученными в статьях [8, 19], где использовалось упрощённое ядро (15). Это свидетельствует об адекватности представления антенного провода в виде полый цилиндрической трубки без торцов и возможности использования упрощённого ядра (15).

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Приведём известное приближённое аналитическое решение уравнения (14) в эллиптическом [15] и гиперболическом [8] случаях:

$$\sigma_{\text{th}}(z) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{2\pi a \ln(4L^2/a^2)} \left\{ 1 - \frac{\ln[1 - (z/L)^2]}{\ln(4L^2/a^2)} \right\}, & \varepsilon = \eta = 1; \\ \frac{\varepsilon\Phi_0}{2\pi a \{ \ln[4\mu^2(L^2 - z^2)/a^2] - i\pi \}}, & \varepsilon > 0, \eta < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Данное выражение справедливо для тонкого провода, т. е. при  $\ln(4\mu^2 L^2/a^2) \gg 1$  ( $\mu = 1$  при  $\varepsilon = \eta = 1$ ). В силу данного неравенства распределение заряда вдоль проводника почти постоянное, кроме небольшой области вблизи концов, где функция  $\sigma_{\text{th}}(z)$  резко меняется и в эллиптическом случае имеет интегрируемую особенность при  $z = \pm L$ .

Вычислим комплексную амплитуду

$$Q \equiv 2\pi a \int_{-L}^L \sigma(z) dz \quad (17)$$

колебаний полного заряда проводника. Если считать, что  $\sigma(z) \approx \sigma_{\text{th}}(0) = \text{const}$  вдоль всего провода, то

$$Q = \begin{cases} \frac{2L\Phi_0}{\ln(4L^2/a^2)}, & \varepsilon = \eta = 1; \\ \frac{2\varepsilon L\Phi_0}{\ln(4\mu^2 L^2/a^2) - i\pi}, & \varepsilon > 0, \eta < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Поправка  $\delta Q$  к полному заряду, связанная с отличием плотности заряда от постоянной величины  $\sigma_{\text{th}}(0)$ , при этом мала. Интегрированием выражений в (16) нетрудно показать, что  $|\delta Q/Q| \sim 1/[2\ln(4\mu^2 L^2/a^2)] \ll 1$  в силу приближения тонкого провода. Поэтому при вычислении интегральных характеристик, например импеданса проводника  $Z = i\Phi_0/(\omega Q)$  и распределения тока

вдоль провода, обычно полагают, что  $\sigma(z) \approx \sigma_{\text{th}}(0) = \text{const}$ . Далее в данной статье также используется это предположение. Соответствующий импеданс равен [8, 9, 20]

$$Z_{\text{th}} = \begin{cases} \frac{i \ln(2L/a)}{\omega L}, & \varepsilon = \eta = 1; \\ \frac{0,5\pi + i \ln(2\mu L/a)}{\omega \varepsilon L}, & \varepsilon > 0, \eta < 0. \end{cases} \quad (19)$$

### 3. МЕТОД МОМЕНТОВ

Будем решать уравнение (14) с ядром (15) численным методом моментов. Для этого приближённо представим искомую функцию  $\sigma(z)$  в виде линейной комбинации конечного числа  $N$  базисных функций  $f_n(z)$  с неизвестными коэффициентами разложения  $\sigma_n$ :

$$\sigma(z) \approx \sum_{n=1}^N \sigma_n f_n(z). \quad (20)$$

Определим базисные функции  $f_n(z)$  следующим образом. Мысленно разделим антенный провод на  $N$  сегментов вдоль оси  $z$ , которые стыкуются в точках с координатами  $z_n$  (точках коллокации),  $n = 2, \dots, N$ . При этом точки с координатами  $z_1 = -L$  и  $z_{N+1} = L$  являются концами провода и крайних сегментов. Функция  $f_n(z)$  равна единице на  $n$ -м сегменте и нулю за его пределами:

$$f_n(z) = \begin{cases} 1, & z_n \leq z \leq z_{n+1}; \\ 0 & \text{при других } z, \end{cases} \quad (21)$$

где  $n = 1, \dots, N$ .

Подставим  $\sigma(z)$  в виде (20) в исходное уравнение (14). В результате с учётом линейности и (21) получим

$$\Phi_0 = 2\pi a \sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{z_n}^{z_{n+1}} G(z - z') dz'. \quad (22)$$

Теперь зададим  $N$  весовых функций

$$w_m(z) = \delta(z - z_m^c), \quad (23)$$

где  $m = 1, \dots, N$  и  $z_m^c = (z_m + z_{m+1})/2$  — координаты середин сегментов, а также определим скалярное произведение функций следующим образом:

$$\langle q_1(z)q_2(z) \rangle \equiv \int_{-L}^L q_1(z)q_2(z) dz. \quad (24)$$

Умножая скалярно обе части равенства (22) на  $w_m(z)$ , получим  $N$  соотношений

$$\langle \Phi_0 w_m(z) \rangle = 2\pi a \sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{z_n}^{z_{n+1}} \langle G(z - z') w_m(z) \rangle dz',$$

или с учётом (23)

$$\Phi_0 = 2\pi a \sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{z_n}^{z_{n+1}} G(z_m^c - z') dz', \tag{25}$$

где  $m = 1, \dots, N$ . Эти соотношения образуют систему  $N$  линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \tag{26}$$

где  $\mathbf{b}$  — вектор-столбец из  $N$  элементов, каждый из которых равен  $\Phi_0$ ;  $\boldsymbol{\sigma}$  — искомый вектор-столбец из коэффициентов разложения  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ ;  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица с размером  $N \times N$ , элементы которой равны

$$A_{mn} = 2\pi a \int_{z_n}^{z_{n+1}} G(z_m^c - z') dz', \quad \{m, n\} = 1, \dots, N. \tag{27}$$

С учётом (15) интеграл в выражении (27) берётся аналитически:

$$A_{mn} = 2\pi a \Psi_n(z_m^c), \tag{28}$$

где

$$\Psi_n(z) = \begin{cases} \begin{cases} g_1(z) \Big|_{z_n-z}^{z_{n+1}-z}, \\ g_2(z) \Big|_{z_n-z}^{z_{n+1}-z}, \\ g_3(z) \Big|_{z_n-z}^{z_{n+1}-z}, \end{cases} & \begin{cases} \varepsilon = \eta = 1; \\ \varepsilon > 0, \eta < 0, z_{n+1} - z < -a/\mu; \\ \varepsilon > 0, \eta < 0, -a/\mu < z_n - z < a/\mu, \\ -a/\mu < z_{n+1} - z < a/\mu; \end{cases} \\ \begin{cases} g_2(z) \Big|_{z_n-z}^{z_{n+1}-z}, \\ g_2(z) \Big|_{z_n-z}^{-a/\mu} + g_3(z) \Big|_{-a/\mu}^{a/\mu} + g_2(z) \Big|_{a/\mu}^{z_{n+1}-z}, \end{cases} & \begin{cases} \varepsilon > 0, \eta < 0, z_n - z \geq a/\mu; \\ \varepsilon > 0, \eta < 0, -a/\mu \geq z_n - z, \\ a/\mu < z_{n+1} - z; \end{cases} \\ \begin{cases} g_2(z) \Big|_{z_n-z}^{-a/\mu} + g_3(z) \Big|_{-a/\mu}^{z_{n+1}-z}, \\ g_3(z) \Big|_{z_n-z}^{a/\mu} + g_2(z) \Big|_{a/\mu}^{z_{n+1}-z}, \end{cases} & \begin{cases} \varepsilon > 0, \eta < 0, -a/\mu \geq z_n - z, \\ -a/\mu < z_{n+1} - z \leq a/\mu; \\ \varepsilon > 0, \eta < 0, a/\mu < z_{n+1} - z, \\ -a/\mu < z_n - z \leq a/\mu, \end{cases} \end{cases}$$

$$g_1(z) = \ln \left( z + \sqrt{a^2 + z^2} \right), \quad g_2(z) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left( \mu z + \sqrt{-a^2 + \mu^2 z^2} \right), \quad g_3(z) = -\frac{i}{\varepsilon} \arcsin \left( \frac{\mu z}{a} \right).$$

Существенно, что матричные элементы  $A_{mn}$  конечны даже при  $\varepsilon\eta < 0$ . Таким образом, метод моментов может быть использован и в гиперболическом случае, когда функция Грина — ядро интегрального уравнения — обращается в бесконечность на резонансной поверхности  $a^2 = \mu^2(z - z')^2$ .

Таким образом, исходное интегральное уравнение (14) сведено к системе линейных алгебраических уравнений (26), которая может быть решена стандартными численными методами [21, 22]. В расчётах, о результатах которых рассказывается в следующем разделе, использовался метод LU-разложения.

Строгое математическое изучение сходимости кусочно-постоянных функций вида (20) к решению интегрального уравнения (14) подразумевает использование нормы в пространствах Соболева  $H^{-1/2}$  или  $H^{1/2}$  (см. монографию [23] и цитируемую там литературу). Выбор такой нормы отчасти обусловлен тем, что она сравнительно просто связана с амплитудой поля переизлучения

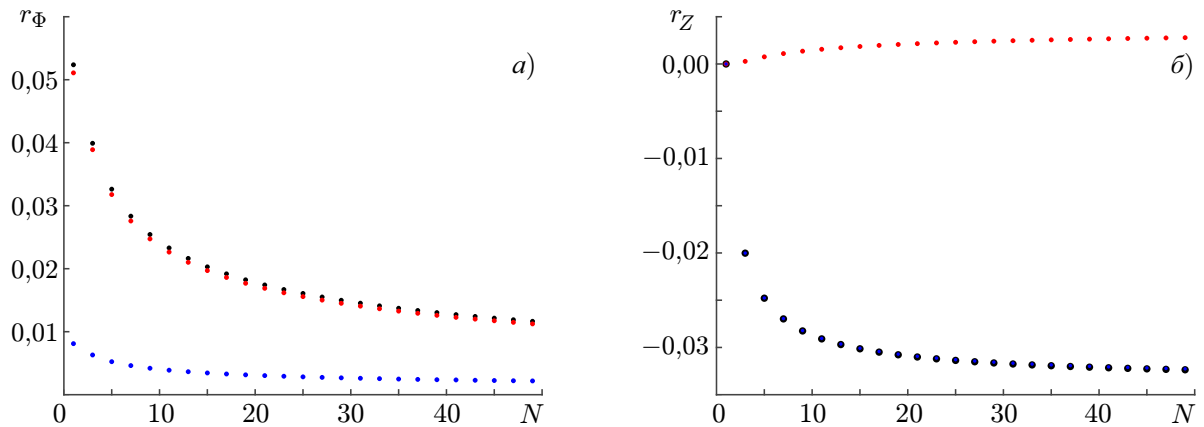


Рис. 2. Графики зависимостей  $r_\Phi(N)$  и  $r_Z(N)$  при однородной сегментации провода для  $\varepsilon = 1$  и  $\eta = 1$  (чёрный цвет), а также для  $\varepsilon = 1$  и  $\eta = -1$  (красный цвет соответствует действительной части исследуемых характеристик, синий — мнимой)

(рассеяния) [24]. В то же время в большинстве ситуаций вычислить такие нормы достаточно сложно. Поэтому в данной работе в соответствии с общепринятым подходом [23] используется более простой метод. Вначале найденное методом моментов распределение  $\sigma(z)$  подставляется в исходное интегральное уравнение (14). Затем в полученном равенстве вычисляется правая часть

$$\tilde{\Phi}(z) \equiv 2\pi a \int_{-L}^L \sigma(z') G(z - z') dz' = 2\pi a \sum_{n=1}^N \sigma_n \Psi_n(z) \quad (29)$$

и определяются нормированные стандартные отклонения её действительной и мнимой частей от  $\text{Re } \Phi_0$  и  $\text{Im } \Phi_0$  соответственно:

$$r_\Phi = \frac{1}{|\Phi_0|} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [R(\bar{z}_j) - R_0]^2}. \quad (30)$$

Здесь  $\bar{z}_j$  — эквидистантные точки на отрезке  $-L < z < L$ , в которых вычисляется функция  $R(z)$ ;  $j = 1, \dots, M$ ;  $M$  — число выборок;  $R(z) = \{\text{Re } \tilde{\Phi}(z); \text{Im } \tilde{\Phi}(z)\}$  и  $R_0 = \{\text{Re } \Phi_0, \text{Im } \Phi_0\}$ .

Ниже, в разделе 4, также сравниваются значения импеданса, рассчитанные методом моментов ( $Z$ ) и по формуле (19): определяются соответствующие относительные ошибки  $r_Z$  вычисления импеданса  $Z$  отдельно для действительной и мнимой частей. Такое рассмотрение может иметь большое значение для практических приложений, в которых обычно важно знать интегральные электродинамические характеристики антенн.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчёты проводились для  $\Phi_0 = 1$  В,  $a = 1$  мм и  $f = 100$  кГц. Было выполнено несколько серий расчётов.

Первая серия расчётов проводилась с целью анализа влияния особенности функции Грина на работоспособность метода моментов. Эти расчёты проводились для  $L = 10$  м и двух наборов параметров среды:  $\varepsilon = 1$ ,  $\eta = 1$  и  $\varepsilon = 1$ ,  $\eta = -1$ . Сегментация провода была выбрана однородной: длина каждого сегмента равна  $\Delta = 2L/N$ . Были найдены нормированные стандартные отклонения  $r_\Phi$  действительной и мнимой частей величины  $\tilde{\Phi}(z)$  от  $\text{Re } \Phi_0$  и  $\text{Im } \Phi_0$  (см. (30);  $M = 1000$ ), а также относительные ошибки  $r_Z$  вычислений действительной и мнимой частей импеданса  $Z$



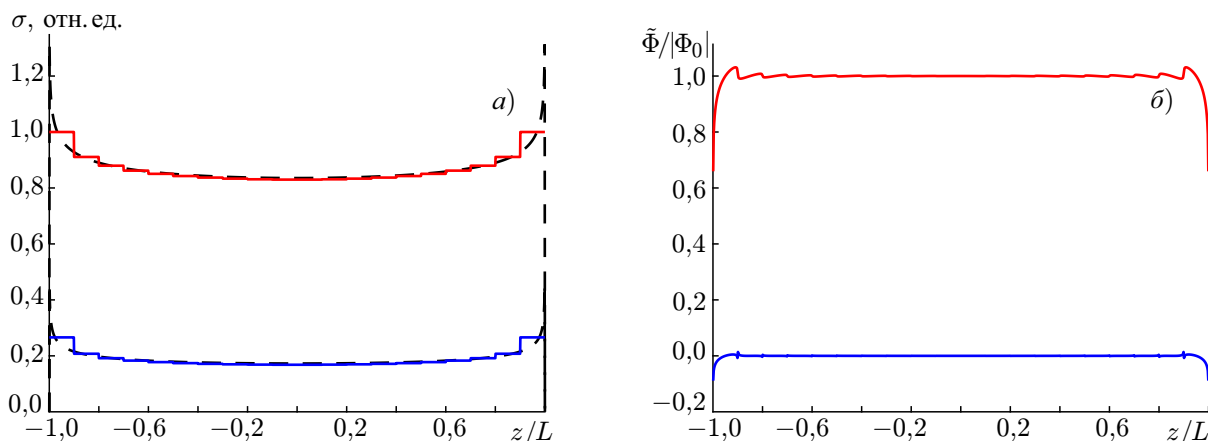


Рис. 3. Графики рассчитанных зависимостей  $\sigma(z)$  и  $\tilde{\Phi}(z)$  при однородной сегментации провода. Красный и синий цвета соответствуют действительной и мнимой частям этих функций, чёрными штриховыми линиями показаны графики соответствующих теоретических зависимостей  $\text{Re } \sigma_{\text{th}}(z)$  и  $\text{Im } \sigma_{\text{th}}(z)$

относительно  $\text{Re } Z_{\text{th}}$  и  $\text{Im } Z_{\text{th}}$  соответственно. Графики  $r_{\Phi}(N)$  и  $r_Z(N)$  приведены на рис. 2. Зависимости  $r_Z(N)$  для мнимой части импеданса в эллиптическом и гиперболическом случаях практически совпадают. Видно, что в обоих случаях ( $\epsilon\eta > 0$  и  $\epsilon\eta < 0$ ) величина  $r_{\Phi}$  уменьшается с ростом числа сегментов, достигая при  $N \approx 30$  приемлемых для практических целей значений порядка 0,015 и 0,003 для  $\text{Re } \tilde{\Phi}$  и  $\text{Im } \tilde{\Phi}$  соответственно. Полезно отметить, что погрешность  $r_Z$  вычисления импеданса равна нулю при  $N = 1$ . Это обусловлено тем, что выражения (19) были получены в приближении постоянного распределения заряда вдоль провода. При большем числе сегментов величины  $r_Z$  стремятся к некоторым квазипредельным значениям, отвечающим, очевидно, расчёту импеданса с учётом отличия функции  $\sigma(z)$  от постоянной величины. При  $N \gtrsim 20$  значения  $|r_Z|$  также невелики для большинства приложений — около 0,003 и 0,030 для действительной и мнимой частей соответственно. Число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  монотонно растёт от 1,2 до 1,9 с увеличением числа сегментов от 4 до 50. Ясно, что система (26) при таком числе сегментов хорошо обусловлена.

График рассчитанного распределения  $\sigma(z)$  для  $\epsilon = 1$ ,  $\eta = -100$  (такие параметры типичны для нижнегибридного диапазона частот в ионосфере Земли),  $L = 10$  м и  $N = 20$  (с однородной сегментацией) приведён на рис. 3. На этом же рисунке для сравнения показан график теоретической зависимости  $\sigma_{\text{th}}(z)$  (см. соотношение (16)), а также приведён график соответствующей зависимости  $\tilde{\Phi}(z)$ . Видно, во-первых, что рассчитанные распределения  $\sigma(z)$  достаточно близки к соответствующим теоретическим зависимостям, кроме окрестности концов провода, где функция  $\sigma(z)$  быстро меняется. Во-вторых, как и следовало ожидать, действительная часть функции  $\tilde{\Phi}(z)$  близка к  $\Phi_0 = 1$  В, а мнимая — к нулю (т.к.  $\text{Im } \Phi_0 = 0$  В), опять же за исключением окрестности концов провода.

Резкое изменение функции  $\sigma(z)$  вблизи  $z = \pm L$  в силу краевых эффектов означает необходимость выбора более коротких сегментов. Можно, однако, сделать сегментацию неоднородной, т.е. использовать сегменты, длины которых уменьшаются от центра провода ( $\Delta_{\text{max}}$ ) к его концам ( $\Delta_{\text{min}}$ ), и при этом не увеличивать число сегментов и размер матрицы  $\mathbf{A}$ . Способ построения такой сегментации подробно описан в приложении. Соответственно, во второй серии расчётов использовалась неоднородная сегментация провода с параметрами  $\Delta_{\text{max}} = 1,5\Delta$  и  $\Delta_{\text{min}} = 0,5\Delta$ . Соответствующие графики зависимостей  $r_{\Phi}(N)$  и  $r_Z(N)$  приведены на рис. 4 (построение начинается с  $N = 5$ , т.к. при меньших  $N$  неоднородная сегментация не имеет смысла). Видно, что

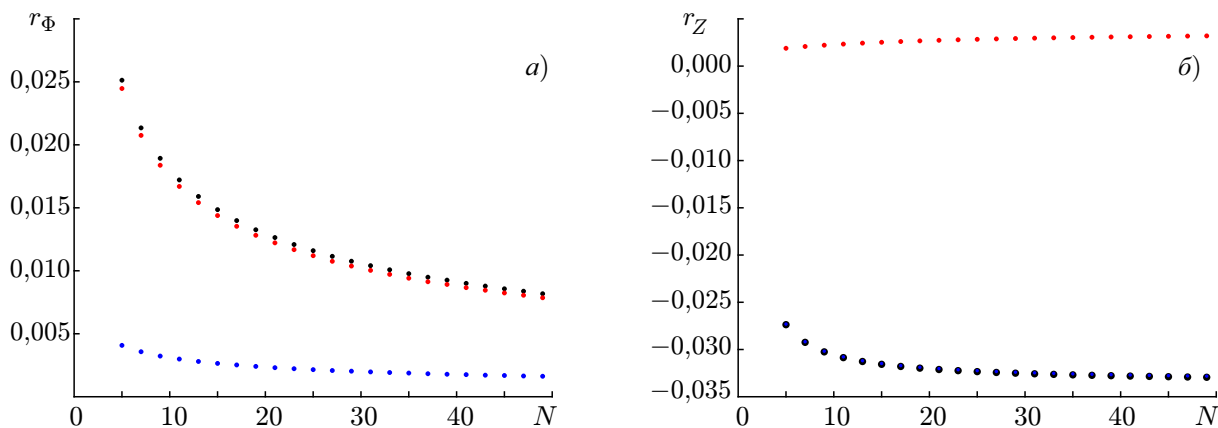


Рис. 4. Графики зависимостей  $r_\Phi(N)$  и  $r_z(N)$  при неоднородной сегментации провода; обозначения такие же, как на рис. 2

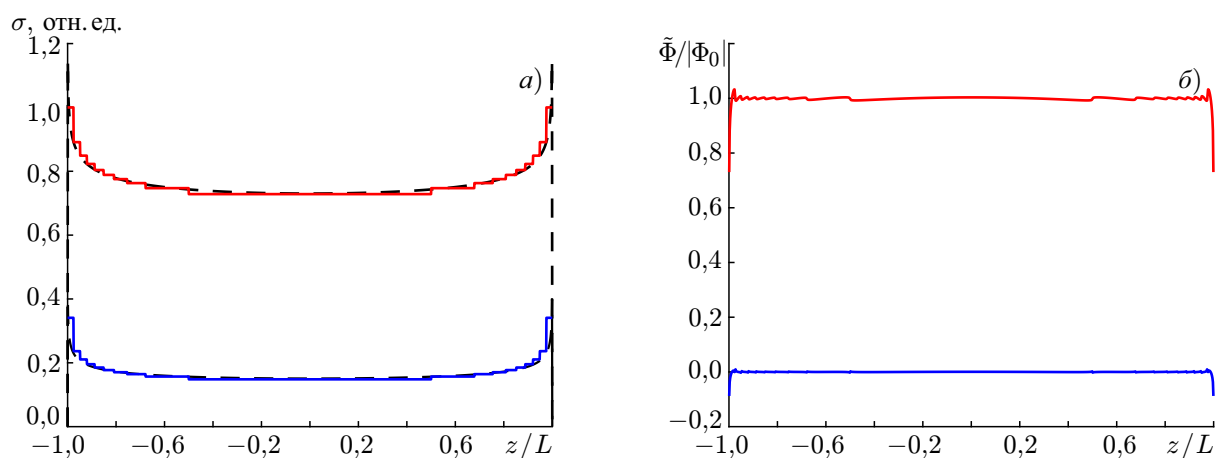


Рис. 5. Графики зависимостей  $\sigma(z)$  и  $\tilde{\Phi}(z)$  при неоднородной сегментации провода; обозначения такие же, как на рис. 3

значения  $r_\Phi$  и  $r_z$  при заданном  $N$  примерно такие же, как и при однородной сегментации.

Графики рассчитанных функций  $\sigma(z)$  и  $\tilde{\Phi}(z)$  для неоднородной сегментации (с параметрами  $\Delta_{\max} = 5\Delta$  и  $\Delta_{\min} = 0,25\Delta$ ) для  $\varepsilon = 1$ ,  $\eta = -100$ ,  $L = 10$  м и  $N = 20$  показаны на рис. 5. Видно, что неоднородная сегментация позволяет точнее описать резкое изменение функции  $\sigma(z)$  вблизи концов провода. В то же время ясно, что использование кусочно-постоянных функций  $f_n(z)$  вида (21) всё же налагает ограничения на точность нахождения распределения  $\sigma(z)$  вблизи  $z = \pm L$ . В самом деле, использование значительно более мелких сегментов нецелесообразно: при значительном уменьшении длины сегмента число обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  может достигнуть нескольких порядков, т. е. система (26) становится плохо обусловленной. В то же время следует отметить, что для практических целей обычно важно знать не распределение заряда, а интегральные характеристики — распределение тока вдоль антенного провода  $I(z)$  и его импеданс  $Z$ . Вычисление обеих этих характеристик подразумевает интегрирование функции  $\sigma(z)$  вдоль провода [3]. В соответствии с разделом 2 точность расчёта функции  $\sigma(z)$  слабо влияет на точность нахождения интегральных характеристик, т. к. области резкого изменения функции  $\sigma(z)$  дают очень небольшой вклад в полный заряд  $Q$ . Соответственно, погрешность вычисления, например, импеданса  $Z$  мала даже при  $N \sim 10$  (когда система уравнений хорошо обусловлена). Следовательно, несмотря на несколько худший (по сравнению с серединой провода) численный рас-

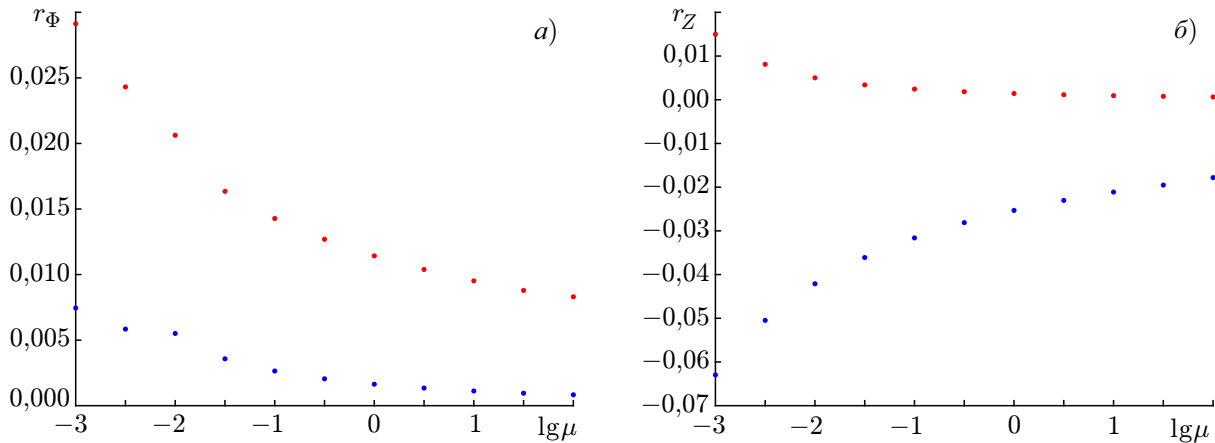


Рис. 6. Графики зависимостей  $r_\phi$  и  $r_Z$ . Красным и синим цветом представлены действительная и мнимая части исследуемых характеристик соответственно

чёт распределения  $\sigma(z)$  вблизи  $z = \pm L$ , метод моментов позволяет с высокой точностью найти интегральные электродинамические характеристики квазистатической антенны в анизотропной среде.

Третья серия расчётов проводилась для выяснения зависимости точности расчётов от параметра  $\mu = \sqrt{|\varepsilon/\eta|}$ , характеризующего отношение компонент тензора диэлектрической проницаемости. Расчёты выполнялись для  $L = 100$  м,  $N = 30$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $\eta < 0$  (величина  $\eta = -1/\mu^2$  определялась для каждого расчёта отдельно). Использовалась однородная сегментация. Графики зависимостей  $r_\phi(\mu)$  и  $r_Z(\mu)$  показаны на рис. 6. Видно, что значения  $r_\phi$  и  $|r_Z|$  уменьшаются с ростом параметра  $\mu$ . Это связано с тем, что с ростом  $\mu$  функция  $\sigma(z)$  меняется вблизи  $z = \pm L$  всё менее резко (см. выражение (16)), т. е. распределение заряда при этом рассчитывается точнее.

## ВЫВОДЫ

Основной вывод из данной работы состоит в том, что метод моментов может быть использован для численного решения интегральных уравнений с ядром, соответствующим функции Грина гиперболического уравнения. Такое ядро обращается в бесконечность не только при совпадении точек интегрирования и наблюдения, но и на резонансном конусе.

На примере идеально проводящего тонкого кругового цилиндра с конечной длиной, ориентированного вдоль оси анизотропии внешней среды, показано, что метод моментов позволяет рассчитать распределение заряда вдоль антенного провода  $\sigma(z)$  и его интегральные электродинамические характеристики, в частности импеданс. Вблизи концов провода, где в силу краевых эффектов плотность заряда быстро меняется, заданные кусочно-постоянные базисные функции не позволяют рассчитать  $\sigma(z)$  с такой же высокой точностью, как и в середине провода, где плотность заряда меняется плавно. Таким образом, вблизи концов провода целесообразно использовать более мелкую сегментацию. Однако в любом случае вклад областей быстрого изменения функции  $\sigma(z)$  в полный заряд сравнительно мал и вычисление интегральных электродинамических характеристик возможно с достаточной для большинства приложений точностью. Например, ошибка вычисления импеданса относительно теоретического значения составляет величину порядка 1% при сегментации провода примерно на 10 частей. Также установлено, что погрешность расчётов падает с ростом параметра  $\mu = \sqrt{|\varepsilon/\eta|}$ , характеризующего отношение поперечной и продольной компонент тензора диэлектрической проницаемости внешней среды.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Зададим преобразование координат концов сегментов с равной длиной в соответствующие величины для сегментов с различной длиной (отмечены тильдой) в виде кубической функции

$$z(\tilde{z}) = a_1 \tilde{z}^3 + a_2 \tilde{z}^2 + a_3 \tilde{z} + a_4.$$

Будем искать коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  из условий

$$\begin{aligned} z|_{\tilde{z}=\Delta_{\max}/p} &= \Delta/p, \\ dz/d\tilde{z}|_{\tilde{z}=\Delta_{\max}/p} &= \Delta/\Delta_{\max}, \\ z|_{\tilde{z}=L-\Delta_{\min}} &= L - \Delta, \\ dz/d\tilde{z}|_{\tilde{z}=L-\Delta_{\min}} &= \Delta/\Delta_{\min}, \end{aligned}$$

где  $p = 1$  для чётных  $N$  и  $p = 2$  для нечётных  $N$ . Эти условия означают, что кубическая парабола на плоскости  $(z, \tilde{z})$  гладко сопрягается с отрезками прямых, отвечающими отображению сегментов с наибольшей и наименьшей длиной. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_1(\Delta_{\max}/p)^3 + a_2(\Delta_{\max}/p)^2 + a_3\Delta_{\max}/p + a_4 - \Delta/p &= 0, \\ 3a_1(\Delta_{\max}/p)^2 + 2a_2\Delta_{\max}/p + a_3 - \Delta/\Delta_{\max} &= 0, \\ a_1(L - \Delta_{\min})^3 + a_2(L - \Delta_{\min})^2 + a_3(L - \Delta_{\min}) + a_4 - (L - \Delta) &= 0, \\ 3a_1(L - \Delta_{\min})^2 + 2a_2(L - \Delta_{\min}) + a_3 - \Delta/\Delta_{\min} &= 0, \end{aligned}$$

из которой определяются коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$ .

Новые координаты точек коллокации  $\tilde{z}_n$ , где  $n = [N/2] + 3, \dots, N - 1$ , определяются как решения кубического уравнения  $z(\tilde{z}_n) = z_n$  на отрезке  $\Delta_{\max}/p < \tilde{z}_n < L - \Delta_{\min}$ , где  $[N/2]$  — целая часть числа  $N/2$  и  $z_n$  — координаты точек коллокации, отвечающие равномерной сегментации. В силу поставленных условий  $\tilde{z}_{[N/2]+2} = \Delta_{\max}/p$ ,  $\tilde{z}_N = L - \Delta_{\min}$  и  $\tilde{z}_{N+1} = L$ ; кроме того,  $\tilde{z}_{0,5N+1} = 0$  при чётных  $N$ . Новые координаты при  $\tilde{z} < 0$  определяются как  $\tilde{z}_n = -\tilde{z}_{N+2-n}$ , где  $n = 1, \dots, [N/2]$  для нечётных  $N$  и  $n = 1, \dots, (N/2) - 1$  для чётных  $N$ , т.е. сегментация симметрична относительно середины антенного провода. Схема, поясняющая эту процедуру, показана на рис. П1 для  $L = 10$  м,  $N = 20$ ,  $\Delta_{\max} = 5\Delta$  и  $\Delta_{\min} = 0,25\Delta$ .

Автор посвящает статью светлой памяти Юрия Владимировича Чугунова. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-72-10106).

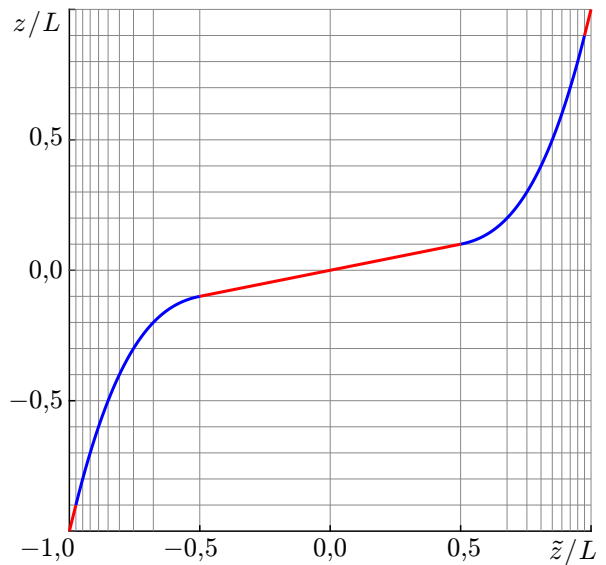


Рис. П1. Схема построения неоднородной сегментации. Красными линиями показаны отрезки прямых, отвечающие отображению сегментов с наибольшей (в середине) и наименьшей (по краям) длиной, синими — отрезки кубических парабол. Вертикальные и горизонтальные линии изображают границы сегментов

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balanis C. A. Antenna theory: Analysis and design. 4th edition. Hoboken: Wiley, 2016. 1 096 p.
2. Андронов А. А., Чугунов Ю. В. // Успехи физ. наук. 1975. Т. 116, № 1. С. 79.
3. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 231 с.
4. Metamaterials: Physics and engineering explorations / ed. by N. Engheta and R. W. Ziolkowski. Piscataway: Wiley–IEEE Press, 2006. 440 p.
5. Chugunov Y. V., Fiala V., Hayosh M., James H. G. // Radio Sci. 2012. V. 47, No. 6. Art. no. RS6002.
6. Agapitov O. V., Artemyev A. V., Mourenas D., et al. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2014. V. 119, No. 3. P. 1606.
7. Poddubny A., Iorsh I., Belov P., Kivshar Y. // Nat. Photonics. 2013. V. 7. P. 948.
8. Чугунов Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 12. С. 1829.
9. Чугунов Ю. В., Широков Е. А., Фомина И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 5. С. 352.
10. Harrington R. F. Field computation by moment methods. Piscataway: IEEE Press, 1993. 240 p.
11. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 487 с.
12. Gibson W. C. The method of moments in electromagnetics. 2nd edition. Boca Raton: CRC Press, 2014. 450 p.
13. Burke G. J., Miller E. K., Poggio A. J. // IEEE Antennas Propag. Society Symposium. 20–25 June, 2004, Monterey, USA. P. 2871.
14. Chew W. C. // Prog. Electromagn. Res. 2014. V. 149. P. 69.
15. Jackson J. D. // Am. J. Phys. 2000. V. 68, No. 9. P. 789.
16. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.
17. Poggio A. J., Adams R. W. Approximations for terms related to the kernel in thin-wire integral equations. Tech. rep. AFWL-TR-76-98. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1977. 44 p.
18. Lee W. S. // Radio Sci. 1969. V. 4, No. 2. P. 179.
19. Чугунов Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 6. С. 830.
20. Balmain K. G. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1964. V. 12, No. 5. P. 605.
21. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix computations. 4th edition. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013. 784 p.
22. Trefethen L. N., Bau D. Numerical linear algebra. Philadelphia: SIAM, 1997. 361 p.
23. Warnick K. F. Numerical analysis for electromagnetic integral equations. Norwood: Artech House, 2008. 233 p.
24. Davis C. P., Warnick K. F. // Appl. Comput. Electromagn. Soc. J. 2005. V. 20, No. 2. P. 144.

Поступила в редакцию 28 июля 2017 г.; принята в печать 29 мая 2018 г.

**APPLICATION OF THE MOMENTS METHOD TO CALCULATING  
ELECTRODYNAMIC PROPERTIES OF A QUASI-STATIC ANTENNA  
IN AN ANISOTROPIC MEDIUM**

*E. A. Shirokov*

We develop the numerical moments method aiming at solving the integral equation, which describes the distribution of the charge along a thin finite-length antenna wire in an anisotropic medium within

the quasi-static approximation. It is shown that the moments method can be used to calculate the electrodynamic properties of such an antenna under the conditions, where the kernel of the integral equation has a singularity related to the resonance cone. The influence of the ratio between the components of the dielectric-permittivity tensor and the method of segmentation of the antenna surface on the calculation accuracy is analyzed. It is shown that the relative error of calculations of the antenna properties is a fairly small value of about 1%, if the antenna wire is divided into ten segments.