

УДК 537.876.23

## ДВУХЧАСТОТНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ДЛЯ ПОЛЯ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В МНОГОМАСШТАБНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*М. В. Тинин*

Научно-исследовательский институт прикладной физики Иркутского госуниверситета,  
г. Иркутск, Россия

Исследуются возможности интегрального представления для двухчастотной функции взаимной когерентности поля волны в многомасштабной случайно-неоднородной ионосфере, полученного методом двойного взвешенного фурье-преобразования. Отмечается, что условия применимости приближения геометрической оптики для частотной когерентности слабее такого же условия для отдельных реализаций. Приводятся примеры расчёта функций частотной когерентности волн в ионосферной плазме с неоднородностями, описываемыми гауссовым спектром и моделью Шкаровского. Результаты моделирования показали, что дифракционные эффекты уменьшают ширину функции частотной когерентности. Исследуются возможности методов пространственной обработки поля волны и её двухчастотной функции взаимной когерентности, устраняющих эти эффекты на базе френелевской инверсии и инверсии двойного взвешенного фурье-преобразования.

### ВВЕДЕНИЕ

Для описания пространственно-временной структуры сигнала, прошедшего через случайно-неоднородные ионосферу и нижнюю атмосферу, обычно используют двухчастотную функцию взаимной когерентности (см., например, [1–4]). Учёт многомасштабности неоднородной среды распространения требует при исследовании этой функции использования различных методов расчёта.

Приближение геометрической оптики для поля в плавно неоднородной среде [5, 6] неприменимо к описанию эффектов неоднородностей с масштабами меньше радиуса Френеля и эффектов случайных каустик [6, 7]. Учёт дифракционных эффектов, вызванных наличием таких неоднородностей, обычно проводится с помощью метода плавных возмущений [3, 5, 8], а интегральные представления поля волны в неоднородной среде, полученные методами фазовых экранов [9–12] и путевых интегралов [12–14], позволяют учесть статистическую фокусировку и насыщение флуктуаций.

Спектральные интегральные представления, полученные путём фурье-преобразования по поперечным координатам наблюдателя (метод Маслова) или излучателя (метод интерференционного интеграла), также позволяют учесть каустические эффекты [7, 15]. В этих методах применяется разложение по парциальным волнам, имеющим вид плоских волн, либо в окрестности наблюдателя, либо в окрестности источника. При этом обычно решение для парциальных волн находят в приближении геометрической оптики и пренебрегают вариациями их амплитуд, т. е. для этих волн используется фазовое приближение геометрической оптики. Однако при распространении в неоднородной среде плоская волна испытывает фокусировку и дефокусировку, и это пренебрежение не обосновано, особенно в окрестности каустик плоских волн. Поэтому для описания парциальных волн используют не только приближение геометрической оптики, но и их каустическое приближение [16], дифрагирующие волны (см. [17] и цитируемую там литературу) и гауссовы пучки [18].

*М. В. Тинин*

291

В ряде работ (см., например, [19]) при построении двухточечного пропагатора, усреднение которого даёт двухчастотную функцию взаимной когерентности, применяется метод двух масштабных разложений, где фактически используется комбинация метода интерференционного интеграла и метода Маслова [15]. В результате получены интегральные представления для функций когерентности поля и интенсивности [19].

Большое распространение в настоящее время получил метод параболического уравнения (марковское приближение) [1–3, 5, 12], в котором в предположении дельта-коррелированности показателя преломления вдоль пути распространения выводятся уравнения для моментов поля в случайно неоднородной среде. Полученные уравнения для двухчастотной функции когерентности имеют строгое аналитическое решение только для одной модели случайно неоднородной среды [20]. В остальных случаях они решаются численно [1, 2], а также с помощью метода разложения решения по модам [21], двух масштабных разложений [22] и квазиоптических методов [23].

В работах [24–29] для исследования поля волны, распространяющейся в многомасштабной случайно неоднородной среде, использовано двойное взвешенное фурье-преобразование. Полученное интегральное представление поля, в отличие от упомянутых выше интегральных представлений, обладает сочетанием следующих свойств.

1) Оно может быть использовано для описания эффектов неоднородностей различных масштабов, что следует из перехода его результатов в результаты приближения геометрической оптики [24–26], плавных возмущений [24, 25] и фазовых экранов [26, 27] в областях их применимости.

2) Парциальные волны, по которым раскладывается поле, имеют достаточно простой вид волны в приближении геометрической оптики без флуктуаций амплитуды (фазовое приближение геометрической оптики) с точностью до второго порядка флуктуаций диэлектрической проницаемости.

3) Флуктуации эйконалов в этих парциальных волнах не зависят от поперечных координат источника и наблюдателя.

Учитывая эти свойства двойного взвешенного фурье-преобразования, ранее были предложены методы увеличения разрешения при диагностике неоднородных сред [24–26, 29], уменьшения флуктуаций амплитуды [30] и повышения точности измерений в экспериментах с использованием глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [31, 32]. В работах [33, 34] это интегральное представление поля использовано для построения интегрального представления двухчастотной функции взаимной когерентности в многомасштабной случайно неоднородной среде. Здесь мы используем данное интегральное представление для исследования частотной когерентности ионосферных радиоволн и возможностей их пространственной обработки.

## 1. МЕТОД ДВОЙНОГО ВЗВЕШЕННОГО ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ ИОНОСФЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

Для анализа работы систем связи, радиолокации, навигации и других радиотехнических систем, использующих распространение радиоволн в случайно неоднородной ионосферной плазме, необходимо знать двухчастотную функцию взаимной когерентности

$$\Gamma_E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) = \langle E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_{01}, z, \omega_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_{02}, z, \omega_2) \rangle, \quad (1)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю, индекс \* обозначает комплексное сопряжение,  $E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega)$  — измеренное в точке  $\mathbf{r} = \{\boldsymbol{\rho}, z\}$  поле расположенного в точке  $\mathbf{r} = \{\boldsymbol{\rho}_0, z_0\}$  точечного источника с временной зависимостью, пропорциональной  $\exp(-i\omega t)$ . Используется система декартовых координат с осью  $z$ , проходящей в окрестности источника и приёмника.

Диэлектрическую проницаемость ионосферной плазмы  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$  на высоких частотах можно выразить через флуктуирующую  $\tilde{N}$  и фоновую  $\bar{N}$  компоненты электронной концентрации следующим образом (см., например, [1]):

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 - \alpha \bar{N}(\mathbf{r}) (2\pi/\omega)^2 - \alpha \tilde{N}(\mathbf{r}) (2\pi/\omega)^2 = 1 - \alpha \bar{N}(\mathbf{r}) (2\pi/\omega)^2 - (k_p/k)^2 [\tilde{N}(\mathbf{r})/\bar{N}(\mathbf{r})], \quad (2)$$

где  $\langle \tilde{N}(\mathbf{r}) \rangle = 0$ ,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $k_p = \omega_p/c = 2\pi/\lambda = 2\pi\sqrt{\alpha\bar{N}}/c$  — волновое число, соответствующее плазменной частоте  $\omega_p$ ,  $\alpha = 80,6 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$  — коэффициент пропорциональности,  $c$  и  $\lambda$  — скорость света и длина волны в свободном пространстве соответственно.

Учтём, что на высоких частотах  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$  слабо отличается от единицы и размеры неоднородностей превышают длину волны, что позволяет использовать малоугловое приближение. В общем случае необходимо учитывать как детерминированную фоновую неоднородность ионосферы, описываемую зависимостью  $\bar{N}(\mathbf{r})$ , так и случайные неоднородности, задаваемые случайным квазиоднородным полем  $\tilde{N}(\mathbf{r})$ . Большие масштабы фоновой неоднородности позволяют считать, что  $\bar{N}(\mathbf{r}) = \bar{N}(\boldsymbol{\rho}, z) \approx \bar{N}(0, z)$ . Тогда, используя результаты работ [24–29, 33] с учётом (2), решение волновой задачи методом двойного взвешенного фурье-преобразования в первом приближении можно записать в виде

$$E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = E_0(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) [k(z - z_0)/\pi]^2 \times \\ \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i2k[-\mathbf{p}\mathbf{s}(z - z_0) - \mathbf{s}\boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\rho}] + ik\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega)\} d\mathbf{s} d\mathbf{p}. \quad (3)$$

Здесь интегрирование по вектору подразумевает интегрирование по каждой координате,

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \omega) = -(\alpha/2) (2\pi/\omega)^2 \int_{z_0}^z \tilde{N}[\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, z'), z'] dz', \quad (4)$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, z') = \mathbf{p}(z' - z) + \mathbf{s}(z' - z_0), \quad (5)$$

$$E_0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = \frac{-A_0 U_0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z - z_0, \omega)}{4\pi(z - z_0)} \exp\left\{ik\left[(z - z_0) - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \int_{z_0}^z \bar{N}(\mathbf{r})(0, z') dz'\right]\right\} \quad (6)$$

— поле волны в отсутствие случайных неоднородностей,

$$U_0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z - z_0, \omega) = \exp\left[ik\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)^2}{2(z - z_0)}\right]. \quad (7)$$

Интегрирование в (4) ведётся вдоль лучей (5), соединяющих точки  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{s}(z - z_0)$  и  $\boldsymbol{\xi}_0 = -\mathbf{p}(z - z_0)$  на приёмной и передающей плоскостях соответственно.

При выполнении условия превышения масштаба неоднородности  $l_\varepsilon$  над радиусом Френеля  $r_{\text{fr}}$ ,

$$r_{\text{fr}}(z, z', z_0) = \sqrt{(z - z')(z' - z_0)/[k(z - z_0)]} < l_\varepsilon, \quad (8)$$

с помощью метода стационарной фазы из выражения (3) получаем приближение геометрической оптики:

$$E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) \approx E_0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) \left[1 + \frac{z - z_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\rho}_0} \tilde{\varphi}_c(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega)\right]^{-1} \exp[ik\tilde{\varphi}_c(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega)], \quad (9)$$

где

$$\tilde{\varphi}_c(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = -(\alpha/2) (2\pi/\omega)^2 \int_{z_0}^z \tilde{N}[\boldsymbol{\rho}_c(z'), z'] dz', \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\rho}_c(z') = \boldsymbol{\rho}_0(z' - z)/(z - z_0) + \boldsymbol{\rho}(z' - z_0)/(z - z_0) \tag{11}$$

— траектория луча, соединяющего точки излучения и приёма. В пренебрежении флуктуациями амплитуды выражение (9) сводится к фазовому приближению геометрической оптики:

$$E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) \approx E_{go}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = E_0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) \exp[ik\tilde{\varphi}_c(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega)]. \tag{12}$$

Полагая случайную величину  $\tilde{\varphi}$  распределённой по нормальному закону, усредним выражение (3) и получим [33, 34] для среднего поля результат, совпадающий с усреднением приближения геометрической оптики (12) [5].

Подставляя выражение (3) в формулу (1), для двухчастотной функции взаимной когерентности получаем

$$\Gamma_E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) = E_0(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_{01}, z, \omega_1) E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_{02}, z, \omega_2) \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2). \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) &= \hat{\Gamma}(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta\boldsymbol{\rho}_0, k_0, X) = [\hat{k}_0 (z - z_0)/(2\pi)]^2 \exp[i\hat{k}_0 \Delta\boldsymbol{\rho} \Delta\boldsymbol{\rho}_0/(z - z_0)] \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-i\hat{k}_0 [-\mathbf{p}\mathbf{s} (z - z_0) + \mathbf{s}\Delta\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{p}\Delta\boldsymbol{\rho}] - D(\mathbf{p}, \mathbf{s})/2\} ds d\mathbf{p} \end{aligned} \tag{14}$$

— нормированная двухчастотная функция взаимной когерентности,

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{1/2}{[k_0 (1 - X^2)]^2} \int_{z_0}^z k_p^4 \frac{\sigma_N^2(\eta)}{N^2} \left\{ (1 + X^2) \bar{\Psi}_N(0, \eta) - (1 - X^2) \bar{\Psi}_N[\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \eta), \eta] \right\} d\eta, \tag{15}$$

функция  $\sigma_N^2(\eta) \bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho}, \eta)$  (в работе [1] обозначенная как  $A_N(\boldsymbol{\rho}, \eta)$ ) определяется соотношением

$$\sigma_N^2(\eta) \bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho}, \eta) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_N[\boldsymbol{\rho}, \xi, \boldsymbol{\rho}_\eta(0, \eta), \eta] d\xi,$$

$$\Psi_N(\Delta\boldsymbol{\rho}, \xi, \boldsymbol{\rho}_N, \eta) = \langle \tilde{N}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1) \tilde{N}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2) \rangle \quad \text{и} \quad \sigma_N^2(\eta) = \Psi_N[0, 0, \boldsymbol{\rho}_N(0, \eta), \eta]$$

— функция корреляции квазиоднородного случайного поля электронной концентрации  $\tilde{N}(\boldsymbol{\rho}, z)$  и дисперсия этой концентрации соответственно. Здесь  $\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$ ,  $\Delta\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\rho}_{01} - \boldsymbol{\rho}_{02}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_\eta = (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)/2$ ,  $\xi = z_1 - z_2$ ,  $\eta = (z_1 + z_2)/2$  и использованы обозначения работы [1]:

$$k_0 = (k_1 + k_2)/2, \quad X = (k_2 - k_1)/(2k_0) = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1), \quad \hat{k}_0 = k_0 (X^{-1} - X).$$

Для того, чтобы из выражений (13)–(15) получить пространственную функцию когерентности, положим равной нулю частотную расстройку:  $X = 0$ . В этом случае интегралы в (14) вычисляются, в результате получаем

$$\Gamma_E(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \omega, \omega) = \Gamma(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta\boldsymbol{\rho}_0, k_0, 0) = E_0(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_{01}, z, \omega) E_0^*(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_{02}, z, \omega) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4k_0^2} \int_{z_0}^z k_p^4 \frac{\sigma_N^2(\eta)}{N^2} \left\{ \bar{\Psi}_N(0, \eta) - \bar{\Psi}_N\left[\frac{\Delta\boldsymbol{\rho}_0(z-\eta)}{z-z_0} + \frac{\Delta\boldsymbol{\rho}_0(\eta-z_0)}{z-z_0}, \eta\right] d\eta \right\}\right). \quad (16)$$

Это решение, совпадающее с результатами марковского приближения [5], также можно получить, подставляя фазовое приближение геометрической оптики (12) в выражение (1).

Теперь, положив в (14)  $\Delta\boldsymbol{\rho} = \Delta\boldsymbol{\rho}_0 = 0$ , получим следующее выражение для нормированной функции частотной когерентности:

$$\hat{\Gamma}_\omega(k_0, X) = \hat{\Gamma}(0, 0, k_0, X) = [\hat{k}_0(z-z_0)/(2\pi)]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\hat{k}_0 \mathbf{p} \mathbf{s} (z-z_0) - D(\mathbf{p}, \mathbf{s})/2] d\mathbf{s} d\mathbf{p}, \quad (17)$$

где структурная функция фазы парциальных волн  $D(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  определяется выражениями (5) и (15).

Для узкополосного сигнала, когда в силу малой величины расстройки  $X$  выполняется условие

$$l_\varepsilon > \hat{r}_{\text{fr}}(z, z', z_0) = \sqrt{(z-z')(z'-z_0)/[\hat{k}_0(z-z_0)]} = \hat{r}_{\text{fr}}(z, z', z_0) / \sqrt{X^{-1} - X} < r_{\text{fr}}(z, z', z_0), \quad (18)$$

из выражения (17) после асимптотического вычисления интегралов можно получить, что

$$\hat{\Gamma}_\omega(k_0, X) \approx \hat{\Gamma}_{\omega\text{go}}(k_0, X) = \exp\left\{ \frac{-0,5X^2}{[k_0(1-X^2)]^2} \int_{z_0}^z k_p^4 \frac{\sigma_N^2(\eta)}{N^2} \bar{\Psi}_N(0, \eta) d\eta \right\}. \quad (19)$$

К такому же результату можно прийти, используя фазовое приближение геометрической оптики (12), но при условии (8), более жёстком, чем условие (18). Как видно из выражений (17) и (19), при выполнении условия (18) в пучке волн (3) основной вклад в усреднённую структуру сигнала даёт волна с частотной когерентностью (19).

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

В качестве примеров использования полученных выше формул рассмотрим результаты расчёта нормированной функции частотной когерентности  $\hat{\Gamma}_\omega(k_0, X)$  для некоторых моделей статистической неоднородности ионосферной плазмы. Заметим, что при использовании формулы (17) нужна только структурная функция  $D(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  для фазы парциальных волн.

Хотя гауссов спектр не соответствует современным представлениям о спектре турбулентности ионосферной плазмы, его часто используют [1, 2] для некоторых оценок и исследования роли различных неоднородностей. Мы возьмём этот спектр в виде [1]

$$\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}) = l_0^3 \sigma_N^2 \pi^{-3/2} \exp(-l_0^2 \boldsymbol{\kappa}^2). \quad (20)$$

В этом случае

$$\Psi_N(\mathbf{r}) = \sigma_N^2 \exp[-r^2/(4l_0^2)] = \sigma_N^2 \exp[-(\rho^2 + z^2)/(4l_0^2)], \quad (21)$$

$$\bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho}, \eta) = \sigma_N^2(\eta) 2\sqrt{\pi} l_0 \exp[-\rho^2/(4l_0^2)]. \quad (22)$$

После подстановки выражения (22) в формулу (15) получаем

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{\sqrt{\pi} l_0}{[k_0(1-X^2)]^2} \int_{z_0}^z k_p^4 \frac{\sigma_N^2(\eta)}{N^2} \left\{ (1+X^2) - (1-X^2) \exp[-|\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \eta)|^2/(4l_0^2)] \right\} d\eta. \quad (23)$$

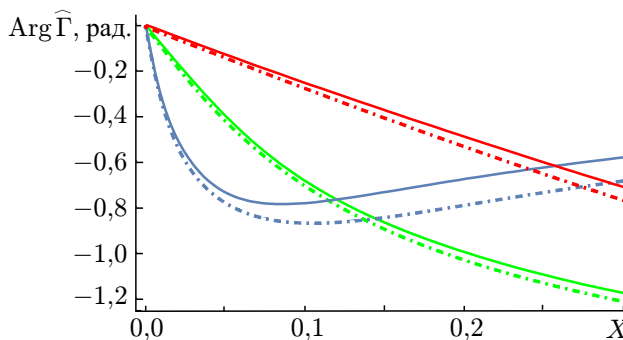
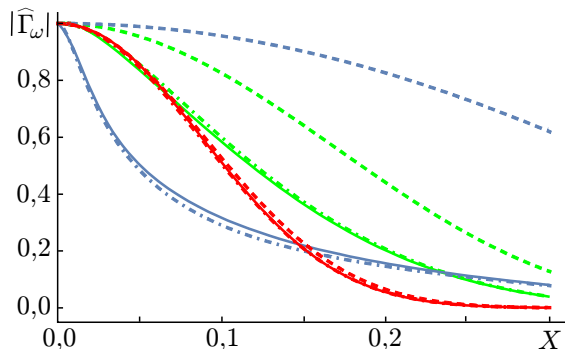


Рис. 1. Зависимости модуля функции когерентности от относительной расстройки для гауссова спектра (20) с  $\sigma_N^2 = 0,05\bar{N}$  и с масштабами  $l_0 = 70$  м (синие линии),  $l_0 = 300$  м (зелёные линии) и  $l_0 = 1$  км (красные линии), рассчитанные по формулам (17) и (23) (сплошные линии) и по формуле (19) (штриховые линии)

Рис. 2. Зависимость аргумента (фазы) функции когерентности от расстройки  $X$ . Обозначения и параметры такие же, как на рис. 1

Результаты моделирования с использованием формул (17) и (23) при расположении наблюдателя в точке  $\mathbf{r} = (0, 0)$ , а источника излучения с частотой  $f = \omega/(2\pi) = 100$  МГц — в точке  $\mathbf{r} = (0, 800 \text{ км})$  для масштабов  $l_0 = 70; 100$  м и 1 км приведены на рис. 1 и 2. Полагалось, что статистически однородные неоднородности занимают слой между высотами 150 и 400 км. Флуктуации полагались равными 5 % от концентрации фоновой плазмы ( $\sigma_N = 0,05\bar{N}$ ), плазменная частота которой была постоянной и равной 6 МГц. На рисунках, помимо расчётов по формулам (17) и (23), штриховой линией приводятся расчёты по формуле геометрической оптики (19). Заметим, что в приближении геометрической оптики (19) аргумент функции когерентности равен нулю. Кроме того, из рисунков видно, что в приближении геометрической оптики ширина полосы канала шире, т.е. дифракционные эффекты сужают полосу канала. Это также следует из результатов численного моделирования [1] и отмечалось при исследовании близкой задачи распространения радиоволн в стохастическом ионосферном отражательном радиоканале в работе [35]. Отсюда следует, что для улучшения канала передачи сигнала необходима обработка сигнала, устраняющая дифракционные эффекты (см. далее раздел 4).

По сравнению с гауссовым спектром (20) степенной спектр  $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}) \propto \kappa^{-p}$  для ионосферной турбулентности является более соответствующим реальности. Однако особенности этого спектра заставляют использовать кармановский спектр вида [5, 36]

$$\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sigma_N^2 \Gamma(p/2)}{\pi^{3/2} \Gamma[(p-3)/2] \kappa_0^{3-p}} (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-p/2}, \tag{24}$$

где  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ,  $L_0$  — внешний масштаб турбулентности. Такой спектр удобен в методе плавных возмущений. Однако применению его в наших формулах мешает то, что функция  $\bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho}, \eta)$  выражается через функцию Ханкеля мнимого аргумента, имеющую особенность в нуле. Избежать этой проблемы в численном моделировании и более корректно описать поведение спектра  $\Phi_N(\boldsymbol{\kappa})$  при больших  $\boldsymbol{\kappa}$  введением внутреннего масштаба  $l_m = 1/\kappa_m$  позволяют модифицированный кармановский спектр [5, 36]

$$\Phi_N(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sigma_N^2 \Gamma(p/2)}{\pi^{3/2} \Gamma[(p-3)/2] \kappa_0^{3-p}} (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-p/2} \exp(-\kappa^2/\kappa_m) \tag{25}$$

и модель Шкаровского [37]. При использовании спектра (25) для расчёта функции  $\bar{\Phi}_N(\boldsymbol{\rho}, \eta)$  приходится применять либо численные методы, либо её асимптотические выражения, различные

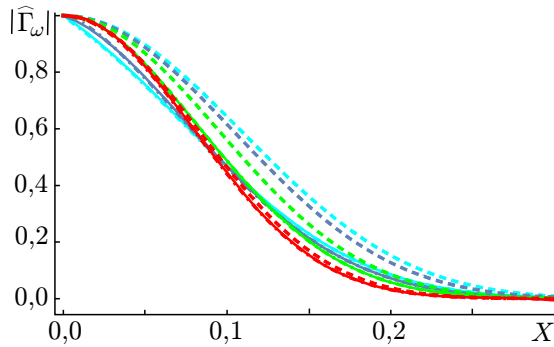


Рис. 3. Зависимости модуля функции когерентности от относительной расстройки  $X$  для спектра Шкаровского (27) с  $\sigma_N^2 = 0,05\bar{N}$ , внешним масштабом  $L_0 = 10$  км и с внутренним масштабом 7 м (голубые линии), 70 м (синие линии), 300 м (зелёные линии) и 1 км (красные линии), рассчитанные по формулам (17) и (29) (сплошные линии) и по формуле (19) (штриховые линии)

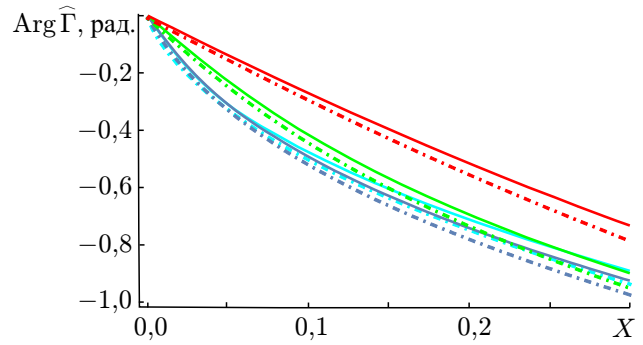


Рис. 4. Зависимости аргумента (фазы) функции когерентности от относительной расстройки. Обозначения и параметры такие же, как на рис. 3

в разных областях значений её аргумента [38]. Это неудобно при численном моделировании. Поэтому расчёт проведён для модели Шкаровского, в которой функция корреляции равна [37]

$$\Psi_N(\mathbf{r}) = \sigma_N^2 \frac{(\kappa_0 \sqrt{r^2 + l_m^2})^{(p-3)/2}}{(\kappa_0 l_m)^{(p-3)/2}} \frac{K_{(p-3)/2}(\kappa_0 \sqrt{r^2 + l_m^2})}{K_{(p-3)/2}(\kappa_0 l_m)}. \quad (26)$$

Соответствующий спектр [37, 39, 40]

$$\Phi_N(\kappa) = \frac{\sigma_N^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\kappa_0 l_m)^{(p-3)/2} l_m^3}{(l_m \sqrt{\kappa_0^2 + \kappa^2})^{p/2}} \frac{K_{p/2}(l_m \sqrt{\kappa_0^2 + \kappa^2})}{K_{(p-3)/2}(\kappa_0 l_m)}. \quad (27)$$

Этот спектр при малых  $l_m$  согласуется с модифицированным кармановским спектром (25), при этом для спектра (27) имеются аналитические соотношения не только для функции корреляции (26), но и для функции  $\bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho})$  [39], необходимой для расчётов структурной функции фазы парциальных волн  $D(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ :

$$\bar{\Psi}_N(\boldsymbol{\rho}) = \frac{(\kappa_0 \sqrt{\rho^2 + l_m^2})^{(p-2)/2}}{\kappa_0 (\kappa_0 l_m)^{(p-3)/2}} \frac{K_{(p-2)/2}(\kappa_0 \sqrt{\rho^2 + l_m^2})}{K_{(p-3)/2}(\kappa_0 l_m)}. \quad (28)$$

Подставляя функцию (28) в выражение (15), получаем

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{[\kappa_0 (1 - X^2)]^2 \kappa_0 (\kappa_0 l_m)^{(p-3)/2} K_{(p-3)/2}(\kappa_0 l_m)} \int_{z_0}^z k_p^4 \frac{\sigma_N^2(\eta)}{\bar{N}^2} d\eta \times \\ \times \left\{ (1 + X^2) (\kappa_0 l_m)^{(p-2)/2} K_{(p-2)/2}(\kappa_0 l_m) - \right. \\ \left. - (1 - X^2) \left[ \kappa_0 \sqrt{|\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \eta)|^2 + l_m^2} \right]^{(p-2)/2} K_{(p-2)/2} \left[ \kappa_0 \sqrt{|\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \eta)|^2 + l_m^2} \right] \right\}. \quad (29)$$

На рис. 3–6 приведены результаты расчётов нормированной функции частотной когерентности, в которых, в отличие от предыдущих расчётов, в (17) использовано выражение (29) для модели Шкаровского с индексом спектра  $p = 11/3$ .

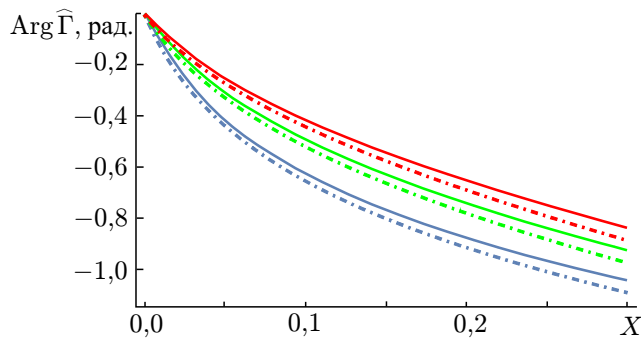
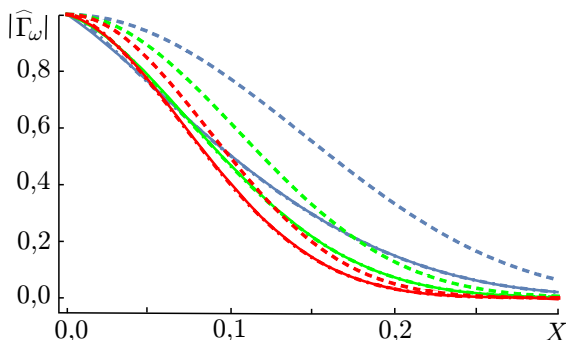


Рис. 5. Зависимости модуля функции когерентности от относительной расстройки  $X$  для спектра Шкаровского (30) с  $\sigma_N^2 = 0,05\bar{N}$ , внутренним масштабом  $l_m = 70$  м и внешним масштабом 5 км (синие линии), 10 км (зелёные линии) и 15 км (красные линии), рассчитанные по формулам (17) и (29) (сплошные линии) и по формуле (19) (штриховые линии)

Рис. 6. Зависимости аргумента (фазы) функции когерентности от относительной расстройки. Обозначения и параметры такие же, как на рис. 5

Влияние внутренних масштабов проиллюстрировано на рис. 3 и 4. Здесь расчёты проведены при внешнем масштабе  $L_0 = 10$  км для различных внутренних масштабов  $l_m = 7$  м (голубые линии),  $l_m = 70$  м (синие линии),  $l_m = 300$  м (зелёные линии) и  $l_m = 1$  км (красные линии). Случай  $l_m = 7$  м соответствует переходу  $l_m \rightarrow 0$ , т.е. переходу к кармановскому спектру (24). Из результатов расчёта видна слабая зависимость полосы пропускания от внутреннего масштаба  $l_m$ . С другой стороны очевидна тенденция сближения результатов расчёта по выражениям (17) и (29) с результатами приближения геометрической оптики (штриховые линии) при увеличении  $l_m$ , что соответствует уменьшению дифракционных эффектов.

На рис. 5 и 6 показана зависимость функции частотной когерентности от внешнего масштаба  $L_0$ . При внутреннем масштабе  $l_m = 70$  м взяты внешние масштабы, равные  $L_0 = 5$  км (синие линии),  $L_0 = 10$  км (зелёные линии) и  $L_0 = 15$  км (красные линии). Из рис. 5 и 6 видно заметное влияние внешнего масштаба на поведение функции частотной когерентности.

### 3. ЧАСТОТНАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ВОЛН ЧЕРЕЗ УДАЛЁННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Сложность расчётов по полученным формулам связана с вычислением многократных интегралов. В работе [27] при большом удалении неоднородностей от источника и наблюдателя в решении (3), полученном с помощью двойного взвешенного фурье-преобразования, проведена замена переменных, в результате которой интегралы по одной из поверхностей можно вычислить асимптотически. Перейдём в выражениях (14) и (15) к переменным  $\mathbf{\rho}_b$  и  $\mathbf{p}_s$ :

$$\mathbf{s} = [\boldsymbol{\rho}_b - (z - z_b) \mathbf{p}_s] / (z - z_0), \quad \mathbf{p} = -[\boldsymbol{\rho}_b + (z_b - z_0) \mathbf{p}_s] / (z - z_0). \tag{30}$$

В результате для нормированной двухчастотной функции взаимной когерентности из выражений (14) и (15) получаем

$$\hat{\Gamma}(\Delta \boldsymbol{\rho}, \Delta \boldsymbol{\rho}_0, k_0, X) = \left( \frac{\hat{k}_0}{2\pi} \right)^{2+\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i\hat{k}_0 (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_{s0})^2 \frac{(z - z_b)(z_b - z_0)}{z - z_0} + \right]$$



$$+ i \frac{(\boldsymbol{\rho}_b - \boldsymbol{\rho}_{b0})^2}{4\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)} - D(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\rho}_b)/2 \Big] d\mathbf{p}_s d\boldsymbol{\rho}_b. \quad (31)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\rho}_{b0} = [\Delta\boldsymbol{\rho}(z_b - z_0) + \Delta\boldsymbol{\rho}_0(z - z_b)]/(z - z_0), \quad (32)$$

$$\mathbf{p}_{s0} = 0,5 [(\boldsymbol{\rho}_b - \Delta\boldsymbol{\rho})(z - z_b)^{-1} - (\boldsymbol{\rho}_b - \Delta\boldsymbol{\rho}_0)(z_b - z_0)^{-1}], \quad (33)$$

$\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)$  определено в (18), а  $D(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\rho}_b)$  даётся выражением (15), где

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(\eta) = \boldsymbol{\rho}_b + \mathbf{p}_s(z_b - \eta). \quad (34)$$

Таким образом, мы перешли от системы лучей (5), соединяющих точки на приёмной и передающих плоскостях, к системе лучей (34), пересекающих под направлением  $\mathbf{p}_s$  виртуальную плоскость  $z = z_b$  в точках  $(z_b, \boldsymbol{\rho}_b)$ .

Поскольку  $|z - z_b| > |z_b - \eta|$  и  $|z_b - z_0| > |z_b - \eta|$ , то зависимость  $D(\mathbf{p}_s, \boldsymbol{\rho}_b)$  от  $\mathbf{p}_s$  медленная. С учётом этого интеграл по  $\mathbf{p}_s$  в выражении (31) вычисляется асимптотически, в результате чего получаем

$$\hat{\Gamma}(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta\boldsymbol{\rho}_0, k_0, X) \approx \frac{-i}{4\pi\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i \frac{1}{4} \frac{(\boldsymbol{\rho}_b - \boldsymbol{\rho}_{b0})^2}{\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)} - \frac{D(\boldsymbol{\rho}_b)}{2} \right] d\boldsymbol{\rho}_b. \quad (35)$$

Здесь  $D(\boldsymbol{\rho}_b)$  определяется выражением (15), где

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(\eta) = \bar{\boldsymbol{\rho}}_b(\boldsymbol{\rho}_b, \eta) = \boldsymbol{\rho}_b + [(\boldsymbol{\rho}_b - \Delta\boldsymbol{\rho})/(z - z_b) - (\boldsymbol{\rho}_b - \Delta\boldsymbol{\rho}_0)/(z_b - z_0)](z_b - \eta)/2. \quad (36)$$

Из выражения (35) для нормированной частотной функции когерентности имеем

$$\hat{\Gamma}_\omega(k_0, X) = \hat{\Gamma}(0, 0, k_0, X) \approx \frac{-i}{4\pi\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{i}{4} \frac{\boldsymbol{\rho}_b^2}{\hat{r}_{\text{fr}}^2(z, z_b, z_0)} - \frac{D_b(\boldsymbol{\rho}_b)}{2} \right] d\boldsymbol{\rho}_b. \quad (37)$$

Здесь  $D_b(\boldsymbol{\rho}_b)$  определяется выражением (15) с учётом (36), где нужно положить  $\Delta\boldsymbol{\rho} = \Delta\boldsymbol{\rho}_0 = 0$ . На рис. 1–6 штрих-пунктирными линиями приведены результаты расчётов по приближённой формуле (37) для сравнения с результатами расчётов по формулам (5), (15) и (17), приведёнными сплошными линиями. Следует отметить большую точность приближённой формулы (37) даже не при очень большом удалении неоднородностей.

#### 4. УСТРАНЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ В ИЗМЕРЕНИЯХ ЧАСТОТНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Роль функции частотной когерентности в задачах связи, локации и навигации в случайно неоднородных средах примерно такая же, как роль передаточной функции в анализе и синтезе детерминированных систем.

Для использования определённой полосы частот также необходимо, чтобы в её пределах амплитудная характеристика слабо менялась, а фазовая характеристика мало отличалась от линейной функции. Как видно из приведённых выше результатов моделирования, дифракционные эффекты, связанные с наличием неоднородностей меньше радиуса Френеля, приводят к нарушению этих требований. Поэтому желательно проводить обработку сигнала, подавляющую дифракционные эффекты в частотной когерентности. На базе метода двойного взвешенного фурье-преобразования рассмотрим некоторые возможности пространственной обработки для решения этой задачи.

#### 4.1. Применение инверсии двойного взвешенного фурье-преобразования к полю сигнала

Поддействуем на измеряемое поле оператором  $L$ :

$$E_{\text{inv}} = LE(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) U_0^*(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_0, z - z_0, \omega) d\boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\rho}_0. \quad (38)$$

Подставляя в выражение (38) решение (3), получаем фазовое приближение геометрической оптики (12):

$$E_{\text{inv}} = [k(z - z_0)/\pi]^2 E_0(0, z, \omega) \exp[ik\tilde{\varphi}_c(0, 0, z, \omega)] = [k(z - z_0)/\pi]^2 E_{\text{go}}(0, 0, z, \omega). \quad (39)$$

Подставляя формулу (39) в выражение (1), получаем, что функция частотной когерентности поля волны, обработанного по алгоритму (38), пропорциональна этой функции в приближении геометрической оптики (19).

#### 4.2. Применение френелевской инверсии к полю сигнала

В приближении метода Кирхгофа [5] поле вдали от области с неоднородностями можно рассчитать с помощью преобразования Френеля поля на выходе неоднородной области. При небольшой протяжённости неоднородной области для слабых неоднородностей при нахождении этого поля можно использовать фазовое приближение геометрической оптики и получить приближение фазового экрана [5]. Это приближение можно использовать не только для расчёта поля вдали от неоднородностей с учётом случайных каустик и других дифракционных эффектов, но и, при использовании инверсии преобразования Френеля (френелевской инверсии), для обработки принимаемого поля с целью устранения дифракционных эффектов [41]. Учитывая уже отмеченную связь двойного взвешенного фурье-преобразования с методом фазового экрана, исследуем такую пространственную обработку сигнала.

Поддействуем на поле оператором френелевской инверсии  $L_{\text{inv Fr}}$ :

$$E_{\text{inv Fr}}(\boldsymbol{\rho}^*, \boldsymbol{\rho}_0, z) = L_{\text{inv Fr}} E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0, z, \omega) U_0^*(\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{\rho}, z - z_b, \omega) d\boldsymbol{\rho}, \quad (40)$$

где  $U_0^*(\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{\rho}, z - z_b, \omega)$  — комплексное сопряжение функции (7). После замены переменных (30), подставим (3) в выражение (40). При большом удалении источника и наблюдателя от неоднородностей получаем [27]

$$E_{\text{inv Fr}}(0, 0, z) = -i2\pi(z - z_0)(z - z_b)/[k(z_b - z_0)] E_{\text{go}}(0, 0, z, \omega). \quad (41)$$

Таким образом устранить дифракционные эффекты и получить функцию частотной когерентности в рамках приближения геометрической оптики (19) можно не только путём обработки поля в двух плоскостях как в выражении (38), но и при обработке только в одной плоскости.

### 4.3. Применение инверсии двойного взвешенного фурье-преобразования к двухчастотной двухпозиционной функции когерентности

Пусть в результате измерений и последующего усреднения мы имеем двухчастотную двухпозиционную функцию когерентности  $\Gamma_E(\rho_1, \rho_{01}, \rho_2, \rho_{02}, \omega_1, \omega_2)$  при  $\rho_1 = -\rho_2 = \Delta\rho/2$ ,  $\rho_{01} = -\rho_{02} = \Delta\rho_0/2$ . Тогда, учитывая представление (13) и (14), можно для устранения дифракционных эффектов использовать оператор  $L_{2pl}$

$$\Gamma_{\omega 2pl}(k_0, X) = L_{2pl}\Gamma_E(\Delta\rho, \Delta\rho_0, \omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\rho d\Delta\rho_0 \Gamma_E(\rho_1, \rho_{01}, \rho_2, \rho_{02}, \omega_1, \omega_2) \times \\ \times U_0^*(\Delta\rho - \Delta\rho_0, z - z_0, \omega_1) U_0(\Delta\rho - \Delta\rho_0, z - z_0, \omega_2) \exp[-ik_0 \Delta\rho \Delta\rho_0 / (z - z_0)]. \quad (42)$$

Подставляя в формулу (42) выражения (7), (13) и (14), получаем

$$\Gamma_{\omega 2pl}(k_0, X) = [2\pi(z - z_0)/\hat{k}_0]^2 \Gamma_{\omega go}(k_0, X). \quad (43)$$

Таким образом, пространственная обработка (42) двухчастотной функции взаимной когерентности по плоскостям излучения и измерений устраняет дифракционные эффекты из результатов измерений.

### 4.4. Применение френелевской инверсии к двухчастотной функции взаимной когерентности

Френелевскую инверсию можно применить не только к полю принимаемого сигнала, но и к функции взаимной когерентности для удалённых неоднородностей:

$$\Gamma_{1pl}(k_0, X) = L_{1pl}\Gamma_E(\Delta\rho, \Delta\rho_0, \omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\rho \Gamma_E(\Delta\rho, \Delta\rho_0, \omega_1, \omega_2) \times \\ \times U_0^*(\Delta\rho - \Delta\rho_0, z - z_0, \omega_1) U_0(\Delta\rho - \Delta\rho_0, z - z_0, \omega_2) \exp[-ik_0 \Delta\rho \Delta\rho_0 / (z - z_0)]. \quad (44)$$

Подставляя выражение (35) вместо  $\hat{\Gamma}(\Delta\rho, \Delta\rho_0, k_0, X)$ , при  $\Delta\rho_0 = 0$  получаем

$$\Gamma_{1pl}(k_0, X) = -4\pi\hat{r}_{Fr}^2 [(z - z_0)/(z_b - z_0)]^2 \Gamma_{\omega go}(k_0, X). \quad (45)$$

Таким образом, пространственная обработка двухчастотной функции взаимной когерентности только в одной (приёмной) плоскости на базе френелевской инверсии позволяет устранить дифракционные эффекты. Заметим, что выбор расположения виртуальной плоскости  $z = z_b$ , в отличие от обычного использования френелевской инверсии, не ограничен областью вне неоднородностей и может быть сделан исходя из условия наименьшего влияния неоднородностей на структуру сигнала.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода двойного взвешенного фурье-преобразования получена формула для двухчастотной функции взаимной когерентности сферических волн в многомасштабной случайно неоднородной ионосфере. Найдено условие перехода этой формулы в приближение геометрической оптики, которое в узкополосных системах значительно слабее соответствующего условия для

отдельных реализаций. Приведённые результаты расчётов частотной функции когерентности, когда случайные ионосферные неоднородности занимают слой конечной толщины и описываются гауссовым спектром или моделью Шкаровского с постоянными параметрами, предполагается дополнить исследованиями влияния зависимости параметров (дисперсии, внутренних и внешних масштабов) случайных неоднородностей от координат. Для удалённых неоднородностей формула для двухчастотной функции взаимной когерентности в виде двойного взвешенного преобразования с помощью замены переменных и асимптотического интегрирования сведена к однократному преобразованию Френеля (35). Результаты численного моделирования показали хорошую точность этого приближения при оценке влияния дифракционных эффектов на поведение функции частотной когерентности. Для устранения дифракционных эффектов рассматриваются методы пространственной обработки поля как в двух плоскостях, так и в одной. Кроме того, показано, что такая же обработка возможна не для поля, а для двухчастотной функции взаимной когерентности, что может оказаться предпочтительнее в реальных условиях.

Пространственная обработка может быть использована как в оптимальной и квазиоптимальной обработке сигналов в системах связи и навигации, так и при расширении возможностей методов диагностики неоднородной ионосферной плазмы. Расчёты функции частотной когерентности с учётом дифракционных эффектов необходимы, например, для оценок остаточных ошибок многочастотных измерений характеристик сигналов ГНСС [42–44]. Устранение этих эффектов и повышение точности измерений характеристик сигналов ГНСС можно осуществить с помощью пространственной обработки [31, 32]. Кроме того, обычно параметры функции корреляции неоднородной космической плазмы по частотной функции когерентности [45] определяются для крупномасштабных неоднородностей. Предложенная здесь пространственная обработка позволяет делать это для неоднородностей с поперечными размерами меньше радиуса Френеля. В работе [41] предложено получать такое сверхфренелевское разрешение с помощью френелевской инверсии при радиозатменных измерениях параметров ионосферы и тропосферы. Наш способ обработки позволяет выполнять аналогичную обработку без предположения о тонком слое и указывает на способы выбора позиции виртуального экрана. Наши исследования наиболее близки к радиотомографии ионосферы [46], т. к. используют аналогичную систему лучей. При этом решётка источников синтезируется движением спутников, а наземная решётка (линейка) позволяет осуществлять преобразование Фурье во второй плоскости [46].

Заметим, что обычно в экспериментальных исследованиях наблюдают временные характеристики сигнала, а пространственные характеристики получают, используя гипотезу «вмороженности» [8]. Это соответствует учёту движения неоднородностей и связанного с ним доплеровского смещения и пренебрежению флуктуациями формы неоднородности и связанным с ним уширением доплеровской линии [40]. Приведённые в работе результаты можно использовать для исследования с помощью численного моделирования вклада нестационарности неоднородностей в наблюдаемый спектр. С помощью эксперимента с антенными приёмными и передающими решётками можно, в частности, определить правомерность гипотезы «вмороженности» в различных условиях и возможности пространственной обработки.

Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части госзадания Минобрнауки РФ (задание 3.903.2017/4.6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee C. H., Yeh K. C. // *Radio Sci.* 1975. V. 10, No. 12. P. 1 055.
2. Hong S. T., Sreenivasiah I., Ishimaru A. // *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1977. V. AP-25, No. 6. P. 822.

3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. М.: Мир, 1981. 319 с.
4. Fante R. L. // *J. Opt. Soc. Am.* 1981. V. 71, No. 12. P. 1446.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
6. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
7. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. *Caustics, catastrophes and wave fields.* Berlin: Springer-Verlag, 1999. 216 p.
8. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
9. Ерухимов Л. М., Урядов В. П. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1968. Т. 11, № 12. С. 1852.
10. Кнерр D. L. // *Proc. IEEE.* 1983. V. 71, No. 6. P. 722.
11. Кандидов В. П. // *Успехи физ. наук.* 1996. Т. 166, № 12. С. 1309.
12. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
13. Charnotskii M. I., Gozani J., Tatarskii V. I., Zavorotny V. I. // *Progress in Optics.* 1993. V. 32. P. 203.
14. Morozov A. V. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2002. V. 19, No. 10. P. 2074.
15. Tinin M. V. // *Waves in Random Media.* 1998. V. 8, No. 4. P. 329.
16. Орлов Ю. И. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1974. Т. 17, No. 7. С. 1035.
17. Zernov N. N., Lundborg B. // *Radio Science.* 1996. V. 31, No 1. P. 67.
18. Červený V., Popov M. M., Psencik I. // *Geophys. J. Royal Astron. Soc.* 1982. V. 70, No 1. P. 109.
19. Mazar R. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1990. V. 7, No. 1. P. 34.
20. Sreenivasiah I., Ishimaru A., Hong S. T. // *Radio Sci.* 1976. V. 11, No. 10. P. 775.
21. Oz J., Heyman E. // *Waves in Random Media.* 1997. V. 7, No. 1. P. 79.
22. Frankenthal S. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85, No. 1. P. 104.
23. Bitjukov A. A., Gherm V. E., Zernov N. N. // *Radio Sci.* 2002. V. 37, No. 4. P. 19.
24. Kravtsov Yu. A., Tinin M. V. // *Radio Sci.* 2000. V. 35, No 6. P. 1315.
25. Tinin M. V., Kravtsov Yu. A. // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* 2008. V. 50, No. 3. Art. no. 035010.
26. Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Книжин С. И. // *Радиотехника и электроника.* 2011. Т. 56, № 7. С. 816.
27. Тинин М. В. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2012. Т. 55, № 6. С. 431.
28. Tinin M. V., Kolesnik S. N., Kravtsov Yu. A. // *Proc. SPIE.* 2002. V. 4678. P. 605.
29. Тинин М. В., Книжин С. И. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2013. Т. 56, № 7. С. 458.
30. Tinin M. V., Kim B. C. // *Waves in Random and Complex Media.* 2011. V. 21, No. 4. P. 645.
31. Tinin M. V. // *J. Geodesy.* 2015. V. 89. P. 491.
32. Tinin M. V. // *Adv. Meteorology.* 2015. V. 2015. Art. no. 532015.
33. Tinin M. V. // *Adv. Mathematical Phys.* 2018. V. 2018. Art. no. 1570407.
34. Tinin M. V. // *Proc. SPIE.* 2017. V. 10466. Art. no. 1046616.
35. Zernov N. N., Lundborg B. // *J. Atmosph. Terr. Phys.* 1995. V. 57, No. 1. P. 65.
36. Andrews L. C., Phillips R. L. *Laser beam propagation through random media.* Washington: SPIE, 2005. 782 p.
37. Shkarofsky I. P. // *Can. J. Phys.* 1968. V. 46, No. 19. P. 2133.
38. Фукс И. М. // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1974. Т. 17, № 11. С. 1665.
39. Yeh K. C., Lee C. H. // *Radio Sci.* 1977. V. 12, No. 5. P. 675.

40. Yeh K. C., Lee C. H. // Proc. IEEE. 1982. V. 70, No. 4. P. 324.
41. Mortensen M. D., Hoeg P. // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25, No. 13. P. 2441.
42. Kim B. C., Tinin M. V. // Waves in Random and Complex Media. 2009. V. 19, No. 2. P. 284.
43. Kim B. C., Tinin M. V. // J. Atmosph. Solar-Terr. Phys. 2009. V. 71, No. 17–18. P. 1967.
44. Gherm V. E., Zernov N. N., Strangeways H. J. // Radio Sci. 2011. V. 46, No. 3. Art. no. RS3002.
45. Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Физматлит, 1984. 392 с.
46. Куницын В. Е., Терещенко Е. Д., Андреева Е. С. Радиотомография ионосферы. М.: Физматлит, 2007. 336 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.; принята в печать 27 апреля 2018 г.

## TWO-FREQUENCY COHERENCE FUNCTION FOR THE FIELD OF A WAVE PROPAGATING THROUGH A MULTISCALE RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

*M. V. Tinin*

We study the possibilities of integral representation for the two-frequency mutual coherence function of the wave field in a randomly inhomogeneous ionosphere. The integral representation was obtained using the Double Weighted Fourier Transform (DWFT) method. We point out that the conditions of validity of the geometrical-optics approximation for frequency coherence are weaker than the same condition for individual realizations. Examples of calculation of the frequency wave coherence functions in the ionospheric plasma with the irregularities described by the Gaussian spectrum and Shkarofsky's model are given. Simulation results show that diffraction effects reduce the width of the frequency coherence function. The capabilities of the methods for spatial processing of the wave field and its two-frequency mutual coherence function, which eliminate these effects through the Fresnel and DWFT inversions, are examined.