

УДК 621.396.6

## УГЛОВОЕ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ В АНТЕННОЙ РЕШЁТКЕ С ПОМОЩЬЮ КОРНЕВОГО МЕТОДА МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

*В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман\*, А. В. Елохин, О. А. Шмонин*

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен новый вариант сверхразрешающего метода минимального многочлена корреляционной матрицы для оценки числа и угловых координат близкорасположенных источников сигналов, регистрируемых антенной решёткой. Метод обеспечивает пеленгацию источников путём определения корней знаменателя псевдоспектральной функции (корневой метод). Особое внимание уделяется случаям сильно коррелированных источников сигналов и короткой выборке входного процесса, когда число выборок меньше числа элементов решётки. Проведено сравнение эффективности углового сверхразрешения для корневого и спектрального вариантов метода минимального многочлена, а также для корневого метода MUSIC (Multiple Signal Classification).

### ВВЕДЕНИЕ

Методы оценки параметров источников сигналов с помощью антенных решёток широко используются во многих областях науки и техники, в частности в радиосвязи, радиолокации и гидроакустике [1–6]. Для оценки угловых координат близко расположенных источников применяются сверхразрешающие методы, с помощью которых можно значительно превзойти рэлеевский предел углового разрешения, равный ширине луча антенной решётки. К таким методам относятся методы Кейпона, MUSIC (Multiple Signal Classification) и ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), а также методы максимально правдоподобной классификации сигналов и минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в решётке [7–11].

По способам обзора пространства сверхразрешающие методы разделяются на методы с последовательной и параллельной пеленгацией источников сигналов [8]. При использовании методов первого класса необходимо вначале сформировать функцию угловых координат (так называемую псевдоспектральную функцию), а затем оценить направления на источники по соответствующим максимумам этой функции. Недостатками последовательной пеленгации являются достаточно низкая скорость обзора пространства и высокая вычислительная сложность алгоритмов формирования псевдоспектральной функции и поиска её экстремумов, особенно в случае многоэлементных антенных решёток с узким лучом. Отмеченные выше методы Кейпона, MUSIC и минимального многочлена обеспечивают последовательную пеленгацию источников сигналов. Ко второму классу относятся корневой метод MUSIC (root MUSIC) и метод ESPRIT. При их использовании вместо экстремумов псевдоспектральной функции ищутся корни соответствующих полиномов и в рамках единой вычислительной процедуры определяются угловые координаты всех источников, находящихся в области наблюдения.

Корневой метод MUSIC обеспечивает более высокую точность оценки угловых координат по сравнению с обычным (спектральным) методом MUSIC [7, 8, 12]. Этот метод не даёт оценку числа источников. Предполагается, что оно должно быть известно или предварительно оценено, например с помощью критериев AIC (Akaike's Information Criterion) или MDL (Minimum Description

\* flak2402@gmail.com

Length) [7, 8]. Иногда за оценку числа источников принимают число максимумов псевдоспектральной функции, что является теоретически необоснованным.

Метод минимального многочлена основан на построении матричного проектора на шумовое подпространство. Для формирования этого проектора предлагается, в свою очередь, оценить параметры (степень и корни) минимального многочлена корреляционной матрицы входного процесса в антенной решётке. Статистически обоснованный функционал среднеквадратической ошибки (СКО) для оценки минимального многочлена предложен в работе [10]. В этой работе показано, что знание корней и степени данного многочлена позволяет определить как число источников сигналов, так и их угловые координаты.

Источники сигналов могут быть произвольным образом коррелированы между собой. Например, в пространственном канале с многолучевым распространением, что характерно для систем сотовой связи и гидроакустики, один источник создаёт несколько волновых фронтов, приходящих с различных направлений и суммирующихся на антенной решётке. С другой стороны, такую ситуацию можно рассматривать как приём коррелированных сигналов от нескольких источников. В этом случае некоторые из сигнальных собственных чисел корреляционной матрицы  $\mathbf{M}$  становятся близкими к шумовому собственному числу. Это затрудняет оценку числа источников, связанную с разделением собственных чисел корреляционной матрицы на сигнальные и шумовые.

При обработке сигналов в антенной решётке используется максимально правдоподобная оценка  $\hat{\mathbf{M}}$  корреляционной матрицы, полученная на основе выборки входного процесса в элементах решётки. Элементы корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  являются случайными величинами из-за конечного числа  $L$  выборочных векторов. В случае антенной решётки с достаточно большим числом элементов  $N \gg 1$  актуальным является случай короткой выборки входного процесса, когда число  $L$  выборочных векторов меньше числа элементов решётки  $N$  ( $L < N$ ). Такая ситуация может иметь место, например, из-за нестационарности сигнальной обстановки. Выборочная корреляционная матрица  $\hat{\mathbf{M}}$  становится вырожденной и имеет  $L$  положительных собственных чисел, а остальные  $N - L$  её собственных чисел равны нулю. Высокая эффективность применения метода минимального многочлена в случаях коррелированных источников сигналов и короткой выборки входного процесса показана в работах [10, 11, 13]. Однако в этих работах направления на источники оценивались по максимумам псевдоспектральной функции. Представляет интерес разработка корневого варианта метода минимального многочлена и исследование его эффективности в сравнении с эффективностью спектрального метода минимального многочлена и корневого метода MUSIC.

## 1. ОЦЕНКА МАТРИЧНОГО ПРОЕКТОРА НА ШУМОВОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Корреляционная матрица  $\mathbf{M}$  входного процесса на выходе приёмных устройств в элементах антенной решётки имеет минимальный многочлен, корнями которого являются неравные между собой собственные числа  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{J+1}$  матрицы  $\mathbf{M}$  [14]. Эти корни являются простыми (единичной кратности), а их число определяется числом источников сигналов  $J$  и равно  $J + 1$ . Исключением является ситуация, когда источники имеют одинаковую мощность и расположены относительно решётки так, что векторы направлений на эти источники ортогональны между собой [15]. Тогда число корней минимального многочлена становится меньше числа источников. Однако вероятность появления на практике такой ситуации является пренебрежимо малой. Наименьшее (шумовое) собственное число  $\lambda_{J+1}$  связано с собственным шумом и равно его мощности, а остальные (сигнальные)  $J$  собственных чисел зависят от параметров источников сигналов (угловых координат, мощностей и коэффициентов корреляции амплитуд сигналов на входе антенной

решётки). Таким образом, степень  $m$  минимального многочлена определяется числом  $J$  источников сигналов ( $m = J + 1$ ).

На практике вместо истинной матрицы  $\mathbf{M}$  используется её максимально правдоподобная оценка  $\hat{\mathbf{M}}$ , полученная по  $L$  выборочным векторам  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса и равная [16]

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H, \quad (1)$$

где индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение.

Статистические свойства выборочной корреляционной матрицы зависят от соотношения между числом  $L$  выборок входного процесса и числом  $N$  элементов антенной решётки. Следует выделить случаи длинной ( $L > N$ ) и короткой ( $L < N$ ) выборки входного процесса. При длинной выборке матрица  $\hat{\mathbf{M}}$  имеет  $N$  положительных неравных между собой собственных чисел  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$ . Вероятность равенства некоторых собственных чисел является пренебрежимо малой. Следовательно, шумовое собственное число  $\lambda_{J+1}$  точной корреляционной матрицы  $\mathbf{M}$  расщепляется на  $N - J$  шумовых собственных чисел  $\mu_{J+1} > \dots > \mu_N$  выборочной корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ . Это является следствием того, что минимальный многочлен точной корреляционной матрицы переходит в характеристический многочлен этой матрицы, который состоит из  $N$  сомножителей:  $\psi(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_N)$ . Отличие сигнальных собственных чисел точной и выборочной корреляционных матриц, а также разброс шумовых собственных чисел возрастают с уменьшением  $L$ . В случае короткой выборки входного процесса ( $L < N$ ) выборочная корреляционная матрица является вырожденной и имеет  $L$  положительных и  $N - L$  нулевых собственных чисел. Её минимальный многочлен можно записать в виде  $\psi(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_L)$  [17]. Таким образом, при переходе от точной корреляционной матрицы к выборочной степень минимального многочлена увеличивается с  $J + 1$  до  $N$  (длинная выборка) или до  $L$  (короткая выборка) и, следовательно, перестаёт зависеть от числа  $J$  источников сигналов.

Для корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  сформируем матричный многочлен  $\mathbf{I}^{(m)} = (\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}})$  (здесь  $\mathbf{I}$  — единичная матрица) и найдём минимум  $I^{(m)} = \min_{\gamma_n} \|\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})\|^2$  квадрата евклидовой нормы этого многочлена путём выбора коэффициентов  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). Величина  $I^{(m)}$  представляет собой СКО аппроксимации минимального многочлена корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  многочленом минимальной степени. Коэффициенты  $\gamma_n$  являются оценками обратных значений собственных чисел выборочной корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  ( $\gamma_n = 1/\mu_n$ ) и находятся из решения системы нелинейных уравнений вида [10]

$$\gamma_n = \text{Sp} \left[ \hat{\mathbf{M}} \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \left\{ \text{Sp} \left[ \hat{\mathbf{M}}^2 \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (2)$$

где  $\text{Sp}(\mathbf{X})$  — след матрицы  $\mathbf{X}$ .

Для решения системы (2) удобно использовать итерационную процедуру, начиная с  $m = 1$ . При этом  $m$  чисел  $\gamma_n$ , вычисленных для функционала  $\mathbf{I}^{(m+1)}(\hat{\mathbf{M}})$ , будем считать начальными приближениями для вычисления  $(m + 1)$  чисел  $\gamma_n$  для функционала  $\mathbf{I}^{(m+1)}(\hat{\mathbf{M}})$ . Среднеквадратическая ошибка  $I^{(m)}$  аппроксимации минимального многочлена корреляционной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  многочленом минимальной степени не должна превышать заданный порог  $\text{Th}$ . С ростом степени  $m$  от 1 до  $N$  аппроксимация минимального многочлена становится более точной, и поэтому СКО  $I^{(m)}$  является убывающей функцией  $m$ . Следовательно, существует некоторое значение  $m = \hat{m}$ , при котором  $I^{(m)} < \text{Th}$ . Величина  $\hat{m}$  принимается за оценку степени минимального многочлена, а оценка числа источников сигналов будет определяться степенью этого многочлена:  $\hat{J} = \hat{m} - 1$ .

Порог  $\text{Th}$  находится на основе априорной информации о корреляционной матрице собственных шумов. Если шумы имеют единичную корреляционную матрицу, то при отсутствии внешних источников сигналов ( $J = 0$ ) степень минимального многочлена  $m = 1$ . Обозначим функционал  $I^{(1)}$  при наличии только шума через  $I^{(0)}$  и выберем порог равным  $\text{Th} = \langle I_0^{(1)} \rangle + \chi \sigma_1$ , где  $\sigma_1$  — среднеквадратическое отклонение функционала  $I_0^{(1)}$ , угловые скобки означают статистическое усреднение. Параметр  $\chi$  можно найти, задавая вероятность ложной тревоги, обусловленной влиянием собственных шумов. Для многоэлементной антенной решётки ( $N^2 \gg 1$ ) имеем [18]

$$\langle I_0^{(1)} \rangle = \frac{N}{1 + L/N}, \quad \sigma_1^2 = \frac{2}{(1 + L/N)^2} (1 + 2N/L). \quad (3)$$

В результате итерационной процедуры получим оценку матричного проектора на шумовое подпространство в виде

$$\hat{\mathbf{P}}^{(n)} = \left[ \prod_{p=1}^j (\mathbf{I} - \gamma_p \hat{\mathbf{M}}) \right] \left[ \prod_{p=1}^j (1 - \gamma_p / \gamma_{j+1}) \right]^{-1}. \quad (4)$$

## 2. ДВА ВАРИАНТА МЕТОДА МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

### 2.1. Спектральный вариант

Часть выходной мощности антенной решётки, соответствующей подпространству собственного шума при сканировании лучом решётки, равна  $|\hat{\mathbf{P}}^{(n)} \mathbf{S}(\varphi)|^2$ , где  $\mathbf{S}(\varphi)$  — вектор произвольного направления  $\varphi$  (вектор поиска). В случае линейной эквидистантной решётки  $n$ -я компонента вектора  $\mathbf{S}(\varphi)$  равна  $S_n = \exp[j(n-1)2\pi d_\lambda \sin \varphi]$ , где  $d_\lambda$  — период антенной решётки, выраженный в длинах волн  $\lambda$ . Сформируем обратную (называемую псевдоспектральной) функцию угла  $\varphi$  вида

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}^{(n)H} \hat{\mathbf{P}}^{(n)} \mathbf{S}(\varphi)}. \quad (5)$$

Когда угол  $\varphi$  совпадает с направлением на  $j$ -й источник, вектор  $\mathbf{S}(\varphi)$  принадлежит сигнальному подпространству и его проекция на шумовое подпространство равна нулю, поэтому функция  $\eta(\varphi)$  в точке  $\varphi = \varphi_j$  будет неограниченно возрастать. По этому пику можно найти угловую координату  $j$ -го источника сигналов.

### 2.2 Корневой вариант

Если антенная решётка является линейной и эквидистантной, то вместо действительной переменной  $\varphi$  можно ввести комплексную переменную  $z = \exp(j2\pi d_\lambda \sin \varphi)$ . Тогда вектор поиска  $\mathbf{S}(z) = (1, z, z^2, \dots, z^{N-1})^T$  (индекс T — знак транспонирования). Обозначим знаменатель псевдоспектральной функции  $\eta(\varphi)$  в выражении (5), который становится функцией  $z$ , через  $f(z)$  и преобразуем его к виду

$$f(z) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k z^k, \quad a_m = \sum_{k=1}^{N-m} \left( \hat{\mathbf{P}}^{(n)H} \hat{\mathbf{P}}^{(n)} \right)_{k, k+m}, \quad m \geq 0. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что  $a_{-m} = a_m^*$ , где индекс \* обозначает комплексное сопряжение.

Таким образом, функция  $f(z)$  является полиномом степени  $2N - 2$ , коэффициенты которого представляют собой сумму элементов соответствующих диагоналей матрицы  $\hat{\mathbf{P}}^{(n)H} \hat{\mathbf{P}}^{(n)}$ . При

$m = 0$  суммирование проводится вдоль главной диагонали, при отрицательных  $m$  — вдоль диагоналей, лежащих ниже главной, а при положительных  $m$  — вдоль диагоналей, лежащих выше главной. Корни полинома  $f(z)$  можно разбить на пары, т.к. если  $z_1$  — корень полинома  $f(z)$ , то  $(z_1^*)^{-1}$  — также его корень. Один из этих корней находится снаружи окружности единичного радиуса на комплексной плоскости  $z$ , другой — внутри неё. Оба корня имеют одинаковые аргументы, поэтому для оценки угловых координат источников можно использовать любой из них.

Для точного проектора  $\mathbf{P}_n$ , соответствующего точной корреляционной матрице  $\mathbf{M}$ , функция  $f(z)$  имеет  $2J$  корней, которые лежат на единичной окружности. Для оценочного проектора  $\hat{\mathbf{P}}_n$ , соответствующего выборочной корреляционной матрице  $\hat{\mathbf{M}}$ , имеется по  $N-1$  корней, находящихся снаружи и внутри единичной окружности. Учтём полученную оценку  $\hat{J}$  числа сигналов и выберем  $\hat{J}$  корней, наиболее близких к этой окружности и находящихся либо снаружи, либо внутри неё. Угол для  $j$ -го источника находится с помощью формулы  $\varphi_j = \arcsin[\arg(z_j)/2\pi d_\lambda]$ , где  $\arg(z_j)$  — фаза числа  $z_j$ .

### 2.3. Оценка объёма вычислений

Основной объём вычислений для многоэлементной ( $N \gg 1$ ) антенной решётки связан с оценкой (4) матричного проектора  $\hat{\mathbf{P}}_n$  на шумовое подпространство, которая предполагает, в свою очередь, решение системы нелинейных уравнений (2). Для формирования коэффициентов  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots, m$ ) необходимо вычислить след степенных матриц  $\mathbf{M}, \mathbf{M}^2, \dots, \mathbf{M}^{2(m+1)}$ . Эти матрицы можно найти последовательно с помощью итерационной процедуры, которая следует из выражения (1) и имеет вид

$$\hat{\mathbf{M}}^k = L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H \hat{\mathbf{M}}^{k-1}. \quad (7)$$

Каждый шаг этой процедуры предполагает выполнение  $LN^2$  операций комплексного умножения. Поэтому для вычисления всех  $2(m+1)$  степенных матриц необходимо выполнить  $2(m+1)LN^2$  комплексных умножений. Таким образом, для оценки матричного проектора требуется объём вычислений, пропорциональный квадрату числа элементов антенной решётки ( $N^2$ ). В то же время оценка этого проектора на основе поиска собственных чисел и векторов в соответствии с методом MUSIC требует выполнения числа комплексных умножений, пропорционального кубу числа элементов решётки ( $N^3$ ).

## 3. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ

Корреляция источников сигналов приводит к снижению эффективности сверхразрешающих методов. Поэтому при наличии коррелированных источников применяется пространственное сглаживание корреляционной матрицы (Spatial Smoothing) [7, 8], которое основано на разделении решётки на  $K = N - Q + 1$  перекрывающихся подрешёток, состоящих из  $Q$  соседних элементов и сдвинутых на один элемент относительно друг друга. Сглаживание может быть прямым (forward), обратным (backward) и совместным (forward+backward). В первом случае подрешётки формируются начиная с первого элемента решётки, а во втором — с последнего элемента, т.е. вместо вектора  $\mathbf{X}(l)$   $l$ -й выборки входного процесса используется вектор  $\mathbf{Y}(l) = \mathbf{U}\mathbf{X}^*(l)$ , где  $\mathbf{U}$  — матрица перестановок, состоящая из единичных элементов на побочной диагонали и нулевых на остальных. Для каждой подрешётки находится максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы с размерностью  $Q \times Q$  и затем вычисляется средняя корреляционная матрица.

При прямом сглаживании корреляционной матрицы на выходе  $i$ -й подрешётки  $\bar{\mathbf{M}}_{(Q,Q)}^{\{i\}} = \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H}$ , где  $\mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} = [\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{I}_Q, \mathbf{0}_{i+Q}, \dots, \mathbf{0}_N]$  — матрица с размерностью  $Q \times N$ , которая состоит из первых  $i-1$  и последних  $N-Q-i+1$  нулевых столбцов и единичной матрицы с размерностью  $Q \times Q$  между ними,  $\mathbf{0}_l$  —  $l$ -й нулевой столбец. Сглаженная корреляционная матрица будет равна

$$\mathbf{M}^{(f)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{U} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H}. \quad (8)$$

Если коэффициент корреляции  $j$ -го и  $q$ -го источников сигналов равен  $\rho_{jq}$ , то после процедуры прямого сглаживания эффективный коэффициент корреляции станет равным  $\bar{\rho}_{jq} = \gamma_{jq}^{(f)} \rho_{jq}$ , где

$$\gamma_{jq}^{(f)} = \frac{\sin(Kb_{jq})}{K \sin(b_{jq})} \exp[i(K-1)b_{jq}], \quad b_{jq} = \pi d_\lambda (\sin \varphi_j - \sin \varphi_q). \quad (9)$$

При обратном сглаживании корреляционной матрицы на выходе  $i$ -й подрешётки  $\bar{\mathbf{M}}_{(Q,Q)}^{\{i\}} = \mathbf{U} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H} \mathbf{U}$  и для сглаженной матрицы получим

$$\mathbf{M}^{(b)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{U} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H} \mathbf{U}. \quad (10)$$

Коэффициент корреляции  $j$ -го и  $q$ -го источников сигналов будет равен  $\rho_{jq}^{(b)} = \gamma_{jq}^{(b)} \rho_{jq}^*$ , где  $\gamma_{jq}^{(b)} = \gamma_{jq}^{(f)*} \exp[-i2(Q-1)b_{jq}]$ . Поскольку  $|\gamma_{jq}^{(b)}| = |\gamma_{jq}^{(f)}|$ , то эффективность прямого и обратного сглаживаний является одинаковой.

При совместном (прямом и обратном) сглаживании результирующая корреляционная матрица  $\mathbf{M}^{(f+b)} = (\mathbf{M}^{(f)} + \mathbf{M}^{(b)})/2$ , коэффициент корреляции  $\rho_{jq}^{(f+b)} = \{\rho_{jq}^{(f)} + \rho_{jq}^{(f)*} \exp[-i2(Q-1)b_{jq}]\}/2$ . Отсюда для модуля коэффициента уменьшения корреляции  $j$ -го и  $q$ -го источников найдём формулу

$$\left| \gamma_{jq}^{(f+b)} \right| = \left| \frac{\sin(Kb_{jq})}{K \sin(b_{jq})} \exp[i(K-1)b_{jq}] \right| \left| \cos[(N-1)b_{jq} + \arg(\rho_{jq})] \right|. \quad (11)$$

Совместное сглаживание является наиболее эффективным, т. к.  $|\gamma_{jq}^{(f+b)}| \leq |\gamma_{jq}^{(f)}|$ .

Пространственное сглаживание имеет два преимущества, связанных с увеличением (удвоением) общего числа выборок и снижением коэффициента корреляции источников сигналов, однако его применение приводит к уменьшению апертуры решётки. Отметим также, что результирующая корреляционная матрица  $\mathbf{M}^{(f+b)}$  является не только эрмитовой (аналогично матрице (1)), но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали).

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 4.1. Сигнальная модель

Будем считать, что антенная решётка принимает узкополосные сигналы от  $J$  точечных источников. Тогда выборку вектора  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса в  $N$ -элементной решётке в  $l$ -й момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{X}(l) = \sum_{j=1}^J a_j(l) \mathbf{S}_j + \mathbf{Z}(l), \quad (12)$$

где  $\mathbf{S}_j$  и  $a_j(l)$  — вектор амплитудно-фазового распределения и комплексная амплитуда сигнала  $j$ -го источника в элементах решётки соответственно,  $\mathbf{Z}(l)$  — вектор собственных шумов приёмных устройств. Будем считать  $a_j(l)$  и  $\mathbf{Z}(l)$  гауссовыми шумовыми процессами. Выборочные векторы  $\mathbf{X}(l)$  берутся через временной интервал  $\Delta t \approx 1/\Delta f$ , где  $\Delta f$  — частотная ширина полосы приёмных устройств, что обеспечивает статистическую независимость выборок по времени. В случае линейной и эквидистантной антенной решётки  $n$ -я компонента вектора  $\mathbf{S}_j$  равна  $(\mathbf{S}_j)_n = \exp[j(n-1)2\pi d_\lambda \sin \varphi_j]$ , где  $\varphi_j$  — угловая координата  $j$ -го источника, отсчитываемая от нормали к решётке.

Статистическую связь разных источников сигналов зададим матрицей с элементами  $\mathbf{B}_{jq} = \langle a_j(l) a_q^*(l) \rangle = \sqrt{v_j v_q} \rho_{jq}$ , где  $v_j$  — мощность сигнала  $j$ -го источника в элементах антенной решётки. В случае некоррелированных источников матрица  $\mathbf{B}$  становится диагональной:  $\mathbf{B} = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_J\}$ . Если собственные шумы имеют нулевое среднее значение и единичную дисперсию, то для корреляционной матрицы входного процесса будем иметь [5–7]

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{S}^{(0)} \mathbf{B} \mathbf{S}^{(0)H}. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{S}^{(0)} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_J]$  — матрица волновых фронтов источников сигналов в элементах решётки, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{S}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ), зависящие от углового расположения соответствующих источников относительно решётки.

Рассмотрим 20-элементную линейную антенную решётку с периодом  $d_\lambda = 0,5$ , для которой ширина луча по уровню половинной мощности  $\Delta\varphi_{\text{beam}} = 5,04^\circ$ . Для уменьшения объёма вычислений обработку сигналов можно проводить в два этапа. Сначала выполняется сканирование пространства лучом антенной решётки и находится область расположения источников сигналов, а затем в этой области применяются сверхразрешающие методы. Будем считать ширину данной области равной  $2\Delta\varphi_{\text{beam}}$ . Длину выборки входного процесса зададим равной  $L = 10$ . Вначале оценим число  $\hat{J}$  источников, а затем — их угловые координаты. Оценку числа источников будем проводить двумя способами: на основе оценки степени минимального многочлена или числа пиков псевдоспектральной функции (5). Оценку угловых координат источников также проведём двумя способами: на основе вычисления аргументов корней минимального многочлена или по положениям максимумов псевдоспектральной функции. При моделировании будем проводить 1 000 независимых численных экспериментов для каждого набора параметров.

#### 4.2. Один источник

На рис. 1 приведена СКО  $\sigma$  оценки угловой координаты источника в зависимости от его мощности  $\nu$ , полученная с помощью корневого и спектрального вариантов метода минимального многочлена (кривые 2 и 3 соответственно). Кривая 1 отвечает потенциальной СКО (границе Крамера—Рао). Видно, что оба метода дают практически одинаковую СКО, близкую к потенциально достижимой. Вероятность правильной оценки числа источников, т. е. вероятность получения оценки  $\hat{J} = 1$ , также практически одинакова для обоих методов и превышает  $p = 80\%$  при мощности  $\nu > -9$  дБ.

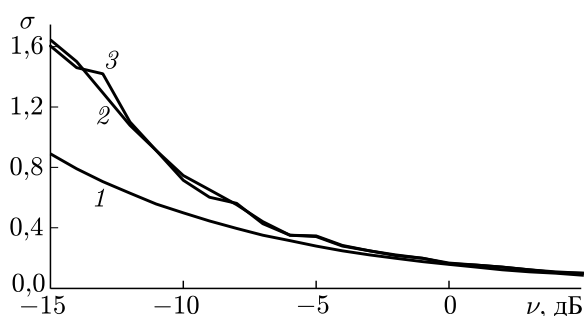


Рис. 1

### 4.3. Два источника

Будем располагать два источника с одинаковой мощностью  $\nu$  симметрично относительно нормали к решётке ( $\varphi_1 = -\varphi_2$ ) и зададим угловое расстояние между ними равным  $0,6\Delta\varphi_{\text{beam}}$  (т.е.  $\varphi_1 = 1,51^\circ$ ,  $\varphi_2 = -1,51^\circ$ ). Если пространственное сглаживание не применяется, то порог зададим равным среднему значению функционала в выражении (3), т.е.  $\text{Th} = (N^2 - 1)/(N + L)$ . При сглаживании учтём, что размер апертуры уменьшается до размера подрешёток  $Q$ , а эффективное число выборок увеличивается в  $K = N - Q + 1$  раз. Размер подрешётки зададим равным  $Q = 15$ . Вычисление средних значений  $\langle\varphi_1\rangle$  и  $\langle\varphi_2\rangle$  и СКО оценки углового положения источников будем проводить для мощностей, при которых вероятность правильной оценки числа источников  $p > 80\%$ .

### 4.4. Некоррелированные источники сигналов

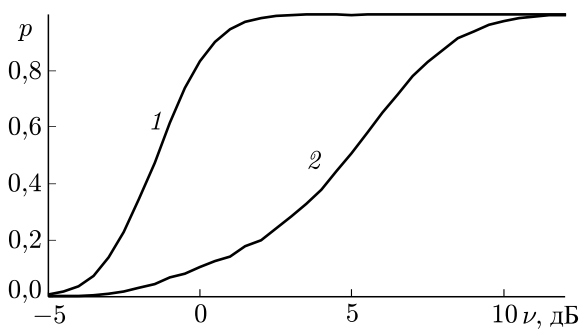


Рис. 2

Результаты моделирования для вероятности  $p$  правильной оценки числа источников в зависимости от мощности  $\nu$ , т.е. оценки, полученные с помощью корневого и спектрального вариантов метода минимального многочлена (кривые 1 и 2 соответственно), показаны на рис. 2. Видно, что корневой метод является более эффективным. Например, вероятность  $p = 80\%$  обеспечивается для мощности  $\nu = -0,2$  дБ (корневой метод) и  $\nu = 7,2$  дБ (спектральный метод).

На рис. 3 приведены результаты 8 экспериментов для  $\nu = 2,5$  дБ. На панели *a* показаны корни псевдоспектральной функции (точки), истинное положение источников на комплексной плоскости (радиальные линии) и единичная окружность. Внутри окружности меньшего радиуса находятся сигнальные корни, а вне её — шумовые корни. Справа приведены реализации псевдо-

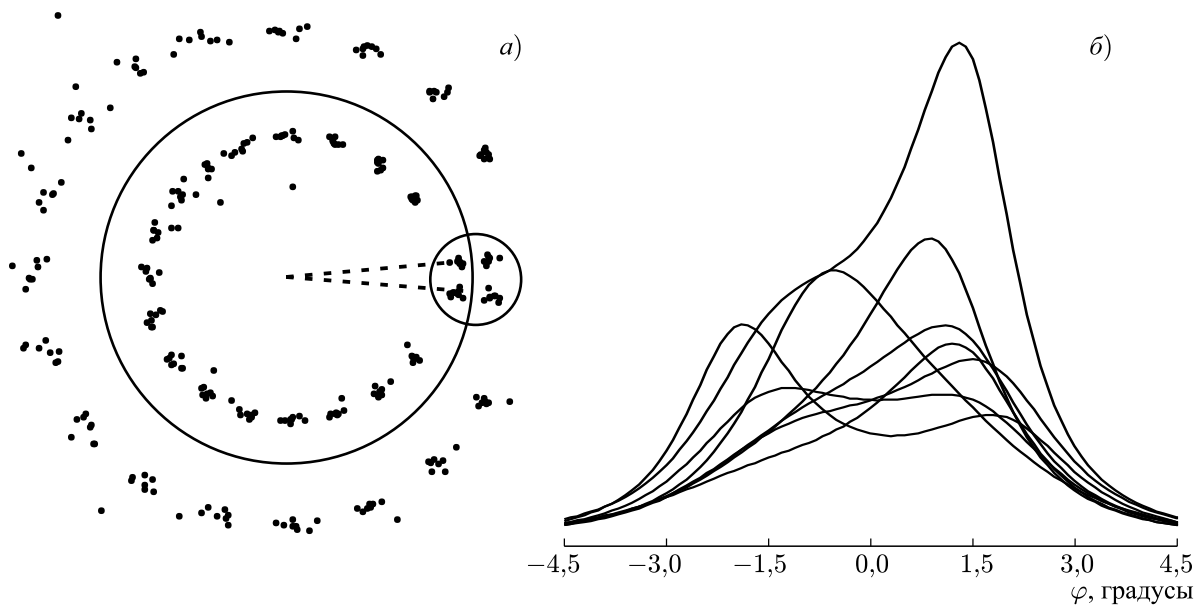


Рис. 3



Таблица 1

$\nu$ , дБ	Псевдоспектральный МММ			Корневой МММ			Корневой MUSIC		
	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы
0,0	—	—	—	-1,53	1,52	0,57	-1,54	1,53	0,76
2,5	—	—	—	-1,53	1,52	0,42	-1,52	1,53	0,54
5,0	—	—	—	-1,54	1,54	0,28	-1,53	1,54	0,36
7,5	-1,30	1,30	0,23	-1,55	1,54	0,19	-1,54	1,54	0,24
10,0	-1,38	1,38	0,17	-1,54	1,54	0,14	-1,54	1,53	0,17
12,5	-1,44	1,44	0,11	-1,53	1,53	0,10	-1,53	1,53	0,13
15,0	-1,47	1,47	0,08	-1,52	1,52	0,07	-1,52	1,52	0,09
17,5	-1,49	1,49	0,06	-1,52	1,52	0,05	-1,52	1,52	0,07
20,0	-1,50	1,50	0,04	-1,52	1,52	0,04	-1,52	1,52	0,05

спектральной функции (5). Видно, что эта функция имеет два пика (т. е. обеспечивает разрешение источников) только в одном эксперименте. В то же время поиск корней полинома позволяет разрешить источники и оценить их координаты во всех 8 экспериментах.

В табл. 1 приведены средние значения  $\langle\varphi_1\rangle$  и  $\langle\varphi_2\rangle$  и СКО оценки углового положения источников  $\sigma$ , полученные с помощью корневой и спектральной вариантов методов минимального многочлена (МММ) и корневой метода MUSIC. Из полученных результатов следует, что в области достаточно малых мощностей корневой метод минимального многочлена обеспечивает наименьшую СКО.

#### 4.5. Коррелированные источники сигналов

Рассмотрим два сильно коррелированных источника с одинаковой мощностью  $\nu$ . Модуль коэффициента корреляции будем считать постоянным и равным  $|\rho| = 0,9$ . Фазу  $\arg(\rho)$  коэффициента корреляции зададим постоянной при формировании входного процесса в каждом численном эксперименте. Для разных экспериментов фаза является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале  $[0, 2\pi]$ . Физически это означает, что есть два квазикогерентных источника, сигналы которых имеют одинаковый в каждом эксперименте фазовый сдвиг, равный  $\arg(\rho)$ .

На рис. 4 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности  $\nu$ . Сплошные кривые соответствуют оценке, полученной корневой вариант метода минимального многочлена, а пунктирные — по максимумам псевдоспектральной функции  $\eta(\varphi)$ . Кривые 1 построены для совместного (прямого и обратного) сглаживания, кривые 2 — при отсутствии сглаживания. Из приведённых результатов следует, что в случае поиска корней обеспечивается вероятность  $p$  правильной оценки числа источников для меньших мощностей сигналов, чем в случае поиска экстремумов. Вероятность  $p = 80\%$  достигается при  $\nu = 4,1$  и  $5,6$  дБ (со сглаживанием) и при  $\nu = 6,2$  и  $14,2$  дБ (без сглаживания) соответственно. Для корневой метода применение процедуры совместного сглаживания уменьшает требуемую мощность на 2,1 дБ.

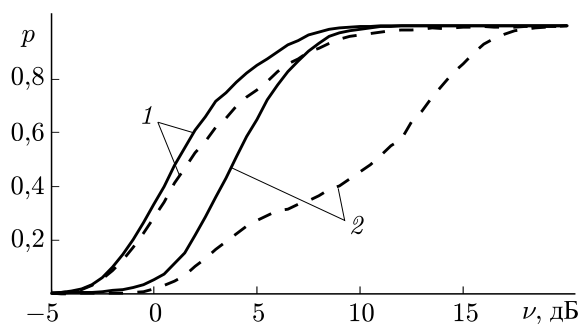


Рис. 4

В табл. 2 приведены средние значения  $\langle\varphi_1\rangle$  и  $\langle\varphi_2\rangle$  и СКО оценки углового положения источников  $\sigma$ , полученные с помощью корневой и спектральной вариантов метода минимального многочлена, а также корневой метода MUSIC. Верхняя строка соответствует применению про-

Таблица 2

$\nu$ , дБ	Псевдоспектральный МММ			Корневой МММ			Корневой MUSIC		
	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы	$\langle\varphi_1\rangle$ , градусы	$\langle\varphi_2\rangle$ , градусы	$\sigma$ , градусы
5,0	—	—	—	–1,54	1,53	0,38	–1,54	1,53	0,38
7,5	–1,47	1,47	0,30	–1,51;	1,51;	0,31;	–1,51;	1,52;	0,31;
10,0	–1,48;	1,48;	0,24;	–1,52;	1,51;	0,24;	–1,51;	1,51;	0,24;
12,5	–1,49;	1,50;	0,18;	–1,51;	1,51;	0,17;	–1,51;	1,51;	0,17;
15,0	–1,50;	1,50;	0,13;	–1,51;	1,51;	0,13;	–1,51;	1,51;	0,13;
17,5	–1,51;	1,50;	0,10;	–1,51;	1,51;	0,10;	–1,51;	1,51;	0,10;
20,0	–1,51;	1,51;	0,07;	–1,51;	1,51;	0,07;	–1,51;	1,51;	0,07;
22,5	–1,51;	1,51	0,05;	–1,51;	1,51;	0,05;	–1,51;	1,51;	0,05;

странственного сглаживания, а нижняя — его отсутствию. Из полученных результатов следует, что если пространственное сглаживание не используется, то корневой метод минимального многочлена обеспечивает наименьшую СКО. Применение сглаживания значительно увеличивает эффективность рассматриваемых методов, особенно в области малых мощностей сигналов. В этой области корневые методы минимального многочлена и MUSIC обеспечивают практически одинаковые систематическую ошибку и СКО. Однако метод минимального многочлена позволяет оценить число источников с вероятностью правильной оценки  $p > 80\%$ , а для метода MUSIC число источников считалось известным и не оценивалось. Отметим, что при оценках средних и СКО методом минимального многочлена учитывались только ситуации с правильной оценкой числа источников.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Предложен корневой вариант сверхразрешающего метода минимального многочлена для определения числа и угловых координат источников сигналов, воздействующих на антенную решётку. Метод основан на оценке степени и коэффициентов минимального многочлена выборочной корреляционной матрицы входного процесса в решётке с помощью статистически обоснованного функционала СКО и построении матричного проектора на шумовое подпространство.

2) Рассмотрены случаи некоррелированных и коррелированных источников сигналов. Приведены сравнительные результаты моделирования для случаев короткой выборки входного процесса, когда число выборок значительно меньше числа элементов антенной решётки, и сильно коррелированных источников. Указанные результаты получены с помощью корневого и спектрального вариантов метода минимального многочлена, а также корневого метода MUSIC.

3) Показано, что предложенный метод имеет наибольшую эффективность. Отмечено, что реализация данного метода предполагает выполнение меньшего объёма вычислений по сравнению с корневым методом MUSIC. Метод может применяться только для линейных эквидистантных антенных решёток.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: справочник / под ред. Я. Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007. 512 с.
2. Ратынский М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках. М.: Радио и связь, 2003. 200 с.
3. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2011. 368 с.
4. Сазонтов А. Г., Малеханов А. И. // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 2. С. 233.
5. Караваев В. В. Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
6. Турчин В. И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. 116 с.
7. Godara L. C. Smart antennas. Boca Raton, London, New York, Washington: CRC Press, 2004. 448 p.
8. Classical and modern direction-of-arrival estimation / Ed. by T. E. Tuncer and B. Friedlander. Burlington: Academic Press, 2009. 456 p.
9. Родионов А. А., Турчин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 1. С. 60.
10. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г., Анушин А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1144.
11. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г., Елохин А. В., Кушцов В. В. // Акуст. журн. 2018. Т. 64, № 1. С. 78
12. Stoica P., Nehorai A. // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1989. V. 37, No. 5. P. 720.
13. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г., Елохин А. В., Кушцов В. В. // Сб. трудов X Всероссийской конф. «Радиолокация и радиосвязь». Москва, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, 21–23 ноября 2016. С. 100.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
15. Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // Intern. J. Electronics. 1993. V. 75, No. 4. P. 753.
16. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
17. Ermolayev V. T., Flaksman A. G., Rodygin Yu. L. // Intern. J. Electronics. 1994. V. 76, No. 3. P. 497.
18. Ермолаев В. Т. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 8. С. 841.

Поступила в редакцию 5 декабря 2017 г.; принята в печать 18 марта 2018 г.

**ANGULAR SUPERRESOLUTION OF THE ANTENNA-ARRAY SIGNALS USING  
THE ROOT METHOD OF THE MINIMUM POLYNOMIAL OF THE  
CORRELATION MATRIX**

*V. T. Ermolayev, A. G. Flaksman, A. V. Elokhin, and O. A. Shmonin*

We propose a new variant of the superresolution method of the minimum polynomial of the correlation matrix for estimating the number and angular coordinates of the closely located sources of the signals recorded by the antenna array. The method ensures the direction finding of the sources by determining the denominator roots of the pseudospectral function (the root method). Special attention is paid to the cases of the strongly correlated signal sources and a short sample of the input process

*V. T. Ермолаев, А. Г. Флакман, А. В. Елохин, О. А. Шмонин*

when the number of the samples is smaller than that of the antenna elements. The efficiencies of the angular superresolutions for the root and spectral variants of the method of the minimum polynomial, as well as for the root MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) method are compared.