УДК 621.396.62

РЕШАЮЩИЕ СТАТИСТИКИ ДЛЯ НЕКОГЕРЕНТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТКАХ

О. В. Болховская, А. А. Мальцев *

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

В статье подробно исследуются характеристики точной решающей статистики для оптимального некогерентного обнаружения сигналов в многоэлементной антенной решётке. Точная решающая статистика выводится из строгого выражения для отношения правдоподобия в случае, когда амплитуды полезного сигнала на элементах антенной решётки одинаковые, а фазы случайные. Анализ проводится в пространстве переменных, которые наблюдаются на выходах некогерентных согласованных фильтров, осуществляющих первичную обработку сигналов на каждом элементе антенной решётки. Показано, что изменение отношения сигнал/шум деформирует границу разбиения многомерного пространства наблюдений, в результате чего при использовании критерия Неймана—Пирсона происходит изменение пороговых значений точной решающей статистики. Проведено подробное сравнение характеристик точной и различных приближённых решающих статистик. Показано, что для антенных решёток с бóльшим числом элементов влияние используемой решающей статистики на вероятность пропуска цели становится весьма существенным. Введена новая комбинированная решающая статистика с характеристиками, близкими к характеристикам точной решающей статистики в широком диапазоне отношения сигнал/шум.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе проведён подробный теоретический и численный анализ характеристик точной решающей статистики и её аппроксимаций при некогерентном приёме полезного сигнала в многоэлементных антенных решётках. В последнее время интерес к некогерентным схемам обнаружения сигналов резко возрос, т. к. многоэлементные антенные решётки стали широко применяться в системах сотовой радиосвязи, работающих в условиях большой начальной априорной неопределённости. Последняя обусловлена сложным многолучевым каналом распространения сигналов (см., например, работы [1, 2]). В отличие от когерентного приёма сигналов, при котором происходит формирование оптимальной диаграммы направленности антенной решётки в соответствии с волновым фронтом приходящего полезного сигнала (в случае свободного пространства и плоского волнового фронта это соответствует ориентации главного лепестка диаграммы направленности антенны в направлении на источник полезного сигнала), при некогерентном обнаружении не требуется априорной информации о волновом фронте полезного сигнала. Поэтому при первоначальном обнаружении источников сигналов реализация схем некогерентного приёма оказывается проще и универсальнее когерентных схем.

В зависимости от постановки задачи для некогерентного обнаружения сигналов применяются два известных подхода: байесовский и метод обобщённого отношения правдоподобия [3–5]. В случае байесовского подхода условное отношение правдоподобия усредняется по неизвестным случайным параметрам сигнала. При использовании метода обобщённого отношения правдоподобия для получения решающей статистики неизвестные параметры в отношении правдоподобия заменяются их максимально правдоподобными оценками, получаемыми путём обработки принимаемого сигнала [6–10]. Хорошо известно [3–5], что полученная на основе реализации байесовского

* maltsev@rf.unn.ru

подхода схема одномерного некогерентного оптимального обнаружения узкополосного детерминированного сигнала со случайной начальной фазой может быть реализована с помощью двух эквивалентных схем: некогерентного согласованного фильтра или квадратурного приёмника, содержащего корреляторы в синфазном и квадратурном каналах и детектор огибающей функции сигнала. В результате на выходе обеих схем формируется точная решающая статистика, на основании которой принимается решение о наличии или отсутствии сигнала по одному из принятых критериев оптимальности. Легко доказывается, что для одномерного случая (одноэлементной антенны) эта решающая статистика (или любая монотонная функция от неё) является оптимальной и её пороговые значения при использовании критерия Неймана—Пирсона не зависят от амплитуды полезного сигнала. При исследовании характеристик некогерентного обнаружения сигналов в многомерном случае многоэлементной антенной решётки обычно считается, что фазы сигналов в её различных элементах являются случайными и независимыми, и делаются определённые предположения о распределении амплитуд этих сигналов. Следует отметить, что по своей математической постановке данная задача близка к классической задаче обнаружения сигналов в радарах путём некогерентного (временно́го) накопления отражённых импульсов в задаче некогерентного обнаружения пакета радарных импульсов. Во многих работах (см., например, [11–15]), посвящённых радарным приложениям, были исследованы различные модели флуктуаций амплитуд. Однако наиболее важными с фундаментальной точки зрения являются следующие два предельных случая.

1) Флуктуации амплитуд полезных сигналов предполагаются независимыми и одинаково распределёнными случайными величинами, а их плотности вероятности описываются рэлеевским распределением.

2) Амплитуды полезных сигналов на элементах антенной решётки или в пакете радарных импульсов являются постоянными величинами (случай нефлуктуирующей цели).

Для первого случая известно точное решение многомерной задачи обнаружения, когда точная решающая статистика представляется в виде суммы квадратов сигналов на выходах некогерентных согласованных фильтров, осуществляющих первичную обработку приходящего излучения на каждом элементе антенной решётки или каждого импульса в пакете в радарных задачах. Функции распределения этой статистики при обеих гипотезах могут быть найдены аналитически и описываются хорошо изученным χ^2-распределением. Однако для второго предельного случая, когда амплитуды сигналов на элементах антенной решётки постоянны, использование точной решающей статистики затрудняется тем, что она выражается в виде произведения специальных функций и её пороговые значения даже при использовании критерия Неймана—Пирсона зависят от отношения сигнал/шум. Поэтому в силу сложности точного решения задачи во всех работах, посвящённых некогерентному обнаружению сигналов, как правило, исследовались только характеристики различных приближённых решающих статистик, представляющих собой простые суммы квадратов, модулей или логарифмов выходных сигналов некогерентных согласованных фильтров [16, 17]. В данной работе мы будем использовать классический байесовский подход в предположении, что фазы полезного сигнала на элементах антенной системы случайны, а амплитуды постоянны. Сделанное предположение в данной постановке задачи достаточно хорошо описывает целый ряд практически важных случаев первоначального обнаружения сигналов в многоэлементных антеннах, например сигналов, приходящих с неизвестного направления; сигналов, принимаемых распределённой антенной системой с неизвестной детально геометрией; сигналов, имеющих произвольную форму волнового фронта. Это предположение строго справедливо для простого канала с аддитивным белым гауссовским шумом и хорошо выполняется в многолучевых каналах, если обнаружение проводится по сигналу от одного наиболее мощного прямого или отражённого луча. Несмотря на многочисленные публикации, посвящённые данной задаче, в классической литературе по радарам подробного теоретического анализа точной решающей статистики в рассматриваемом случае и сравнения её характеристик с используемыми на практике приближёнными решающими статистиками, насколько нам известно, проведено не было. В данной работе поведение точной и приближённых решающих статистик рассматривается в пространстве сигналов на выходах некогерентных согласованных фильтров, осуществляющих первичную обработку приходящего излучения на каждом элементе антенной решётки, и подробно исследуется деформация многомерных гиперповерхностей, определяющих границы разбиения пространства наблюдений на области принятия различных гипотез, в зависимости от вероятности ложной тревоги и отношения сигнал/шум. С использованием численного моделирования проводится подробный анализ характеристик точной решающей статистики в многомерном случае и их сравнение с характеристиками различных приближённых статистик.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И ВЫВОД ТОЧНОЙ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

Рассмотрим классическую задачу обнаружения полезного сигнала заданной формы антенной решёткой, состоящей из M элементов. В общем виде она может быть сформулирована как классическая двухальтернативная задача об отсутствии (гипотеза H_0) и наличии (гипотеза H_1) сигнала:

$$\mathrm{H}_0 : \mathbf{x}[n] = \boldsymbol{\xi}[n], \qquad \mathrm{H1} : \mathbf{x}[n] = \mathbf{s}[n] + \boldsymbol{\xi}[n], \tag{1}$$

где $\mathbf{x}[n] = \{x_1[n], x_2[n], \ldots, x_M[n]\}^{\mathrm{T}}$ — комплексный вектор размерности M отсчётов наблюдаемых сигналов, принимаемых антенными элементами, $\mathbf{s}[n] = \{s_1[n], s_2[n], \ldots, s_M[n]\}^{\mathrm{T}}$ — комплексный вектор той же размерности отсчётов полезного сигнала в элементах антенной решётки, $\boldsymbol{\xi}[n] = \{\xi_1[n], \xi_2[n], \ldots, \xi_M[n]\}^{\mathrm{T}}$ — комплексный гауссовский вектор независимых собственных шумов антенных элементов с нулевыми средними значениями и дисперсией σ^2: $\xi[n] \propto \mathrm{CN}(0, \sigma^2)$, $n = 1, \ldots, N$ — дискретные моменты времени, индекс T означает транспонирование. Хорошо известно [3, 4], что оптимальное решение задачи обнаружения полностью известного сигнала сводится к нахождению отношения правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2], \ldots, \mathbf{x}[N]) = \frac{\{W(\mathbf{x}[1], \ldots, \mathbf{x}[N])/\mathrm{H}_1\}}{W\{(\mathbf{x}[1], \ldots, \mathbf{x}[N])/\mathrm{H}_0\}} \tag{2}$$

и сравнению его с порогом Λ_{th}, который определяется выбранным критерием оптимальности. Здесь $W(\mathbf{x}/\mathrm{H}_0) = W\{(\mathbf{x}[1], \ldots, \mathbf{x}[N])/\mathrm{H}_0\}$, $W(\mathbf{x}/\mathrm{H}_1) = W\{(\mathbf{x}[1], \ldots, \mathbf{x}[N])/\mathrm{H}_1\}$ — функции правдоподобия при нулевой (H_0) и альтернативной (H_1) гипотезах соответственно. Если отношение правдоподобия для отсчётов наблюдённого вектора $\mathbf{x}[n]$ превышает порог Λ_{th}, то принимается решение о наличии полезного сигнала, если нет, то о его отсутствии. Будем предполагать, что полезный сигнал является узкополосным в том смысле, что время его распространения по апертуре антенной системы много меньше времени длительности элементарного символа или времени когерентности сигнала. Рассмотрим случай, когда амплитуды полезного сигнала на антенных элементах одинаковые, а его фазы ψ_m $(m = 1, \ldots, M)$ на каждом антенном элементе являются независимыми и равномерно распределёнными на интервале $[0,\ 2\pi]$ случайными величинами. При сделанных предположениях можно воспользоваться методом усреднения отношения правдоподобия по фазам $\boldsymbol{\psi}[n] = \{\psi_1[n], \psi_2[n], \ldots, \psi_M[n]\}^{\mathrm{T}}$ принимаемых сигналов, используя байесовскую методологию [3, 5]. Несложно показать, что условное отношение правдоподобия при фиксированных фазах сигналов для M-элементной антенной решётки можно представить в виде [5]

$$\Lambda(\mathbf{x}/\boldsymbol{\psi}) = \frac{W(\mathbf{x}/\mathrm{H}_1, \boldsymbol{\psi})}{W(\mathbf{x}/\mathrm{H}_0, \boldsymbol{\psi})} = \frac{\dfrac{1}{\pi^{MN}\sigma^{2MN}} \exp\left\{\dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{n=1}^{N} (\mathbf{x}[n] - \mathbf{s}[n,\boldsymbol{\psi}])^\dagger (\mathbf{x}[n] - \mathbf{s}[n,\boldsymbol{\psi}])\right\}}{\dfrac{1}{\pi^{MN}\sigma^{2MN}} \exp\left\{\dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{x}[n]^\dagger \mathbf{x}[n]\right\}}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{s}[n,\boldsymbol{\psi}] = (s_1[n,\psi_1], s_2[n,\psi_2], \ldots, s_M[n,\psi_M])^{\mathrm{T}}$ — вектор отсчётов полезного сигнала в антенных элементах, зависящий от фаз, $\dagger$ — оператор эрмитова сопряжения. Комплексную амплитуду полезного сигнала в каждом элементе антенной решётки в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$s_m[n,\psi_m] = Aa[n]\exp(j\psi_m), \qquad m = 1, \ldots, M, \qquad (4)$$

где $a[n]$ — функция времени, которая выражает закон модуляции полезного сигнала и в силу сделанных предположений одинакова на всех элементах антенной решётки (сигналы отличаются только фазами), A — амплитудный коэффициент, характеризующий энергию принимаемого сигнала и также одинаковый на всех элементах. Несложно показать, что многомерное условное отношение правдоподобия (3) для антенной решётки может быть представлено в виде произведения одномерных отношений правдоподобия,

$$\Lambda(\mathbf{x}/\boldsymbol{\psi}) = \prod_{m=1}^{M} \Lambda_m(\mathbf{x}_m/\psi_m), \qquad (5)$$

а усреднённое по случайным фазам полезного сигнала безусловное отношение правдоподобия (Λ-статистика) записывается в виде

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^{M} \int \Lambda_m(x_m/\psi_m) W(\psi_m)\,\mathrm{d}\psi_m = \prod_{m=1}^{M} \Lambda_m(x_m), \qquad (6)$$

где $W(\psi_m)$ — плотность вероятности распределения фазы полезного сигнала на m-м элементе. Видно, что в силу сделанного предположения о независимости фаз полезного сигнала на отдельных антенных элементах безусловное отношение правдоподобия (6) также распадается на произведение одномерных усреднённых отношений правдоподобия. При этом для m-го одномерного отношения правдоподобия можно получить следующее аналитическое выражение:

$$\Lambda_m(x_m) = \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N} a^2[n]\right) I_0\left(\frac{A}{\sigma^2}\,Y_m\right), \qquad Y_m = \left|\sum_{n=1}^{N} x_m[n]a^*[n]\right|. \qquad (7)$$

Здесь $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя I рода нулевого порядка, звёздочка означает комплексное сопряжение, а переменные Y_m — амплитуды сигналов на выходах некогерентных согласованных фильтров (или корреляторов) известного на приёмнике опорного сигнала $a[n]$ с сигналами $x_m[n]$, принятыми элементами антенной решётки, на интервале наблюдения $n = 1, \ldots, N$.

Таким образом, с учётом (6) и (7) усреднённое по фазам многомерное отношение правдоподобия будет иметь вид

$$\Lambda(x) = \prod_{m=1}^{M} \Lambda_m(x_m) = \exp\left(-\frac{A^2 M}{\sigma^2}\right) \prod_{m=1}^{M} I_0\left(\frac{A}{\sigma^2}\,Y_m\right) \equiv \Lambda(\mathbf{Y}). \qquad (8)$$

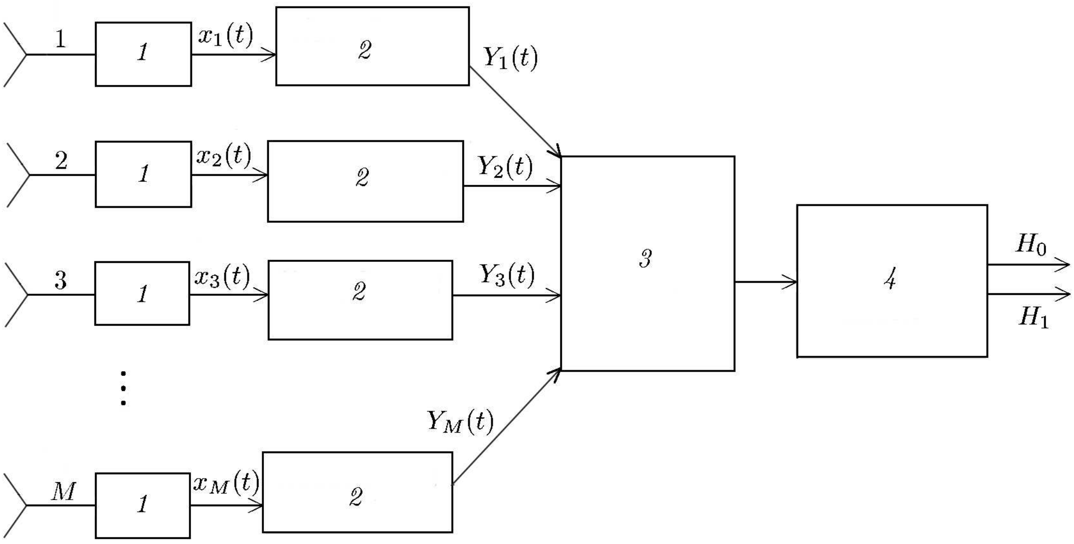


Рис. 1. Блок-схема некогерентной обработки сигналов в многоэлементной антенной решётке: *1* — радиочастотный модуль, *2* — некогерентный согласованный фильтр, *3* — решающая статистика, *4* — пороговое устройство

Здесь $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ — вектор сигналов, наблюдаемых на выходах согласованных фильтров. Следует отметить, что полученное выражение (8) для Λ-статистики является оптимальным для решения задачи некогерентного обнаружения полезного сигнала при сделанных выше предположениях. На рис. 1 приведена общая блок-схема обработки сигналов в многоэлементной антенной решётке, которая реализует некогерентный алгоритм обнаружения полезного сигнала и состоит из набора некогерентных согласованных фильтров и схемы, вычисляющей значение решающей статистики. Для рассматриваемого случая оптимальной будет схема, находящая значение отношения правдоподобия по формуле (8).

В следующем разделе будут приведены результаты подробного исследования характеристик Λ-статистики для задачи обнаружения полезного сигнала при использовании критерия Неймана—Пирсона.

2. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧНОЙ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

Как уже отмечалось выше, исследование решающей статистики $\Lambda(x)$ (8) удобно проводить не в пространстве сигналов на входе антенной решётки $\mathbf{x}[n] = \{x_1[n], x_2[n], \ldots, x_m[n]\}^{\mathrm{T}}$, а в пространстве переменных $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}^{\mathrm{T}}$, наблюдаемых на выходах некогерентных согласованных фильтров. При этом выражения (6) и (8) можно переписать в виде

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{Y}) = \prod_{m=1}^{M} \Lambda_m(Y_m) = \prod_{m=1}^{M} \frac{W(Y_m/\mathrm{H}_1)}{W(Y_m/\mathrm{H}_0)} . \tag{9}$$

Из выражения (8) следует, что введённая нами Λ-статистика зависит от энергетического параметра A и при вариации этого параметра её поведение качественно меняется. На рис. 2 приведены поверхности и линии уровня функции $\Lambda(\mathbf{Y})$ в двумерном случае (антенная решётка с двумя элементами) для разных значений отношения сигнал/шум (SNR) на одном антенном элементе. Поверхности даны в логарифмическом масштабе для малого SNR $= -10$ дБ ($A^2/\sigma^2 = 0{,}1$)

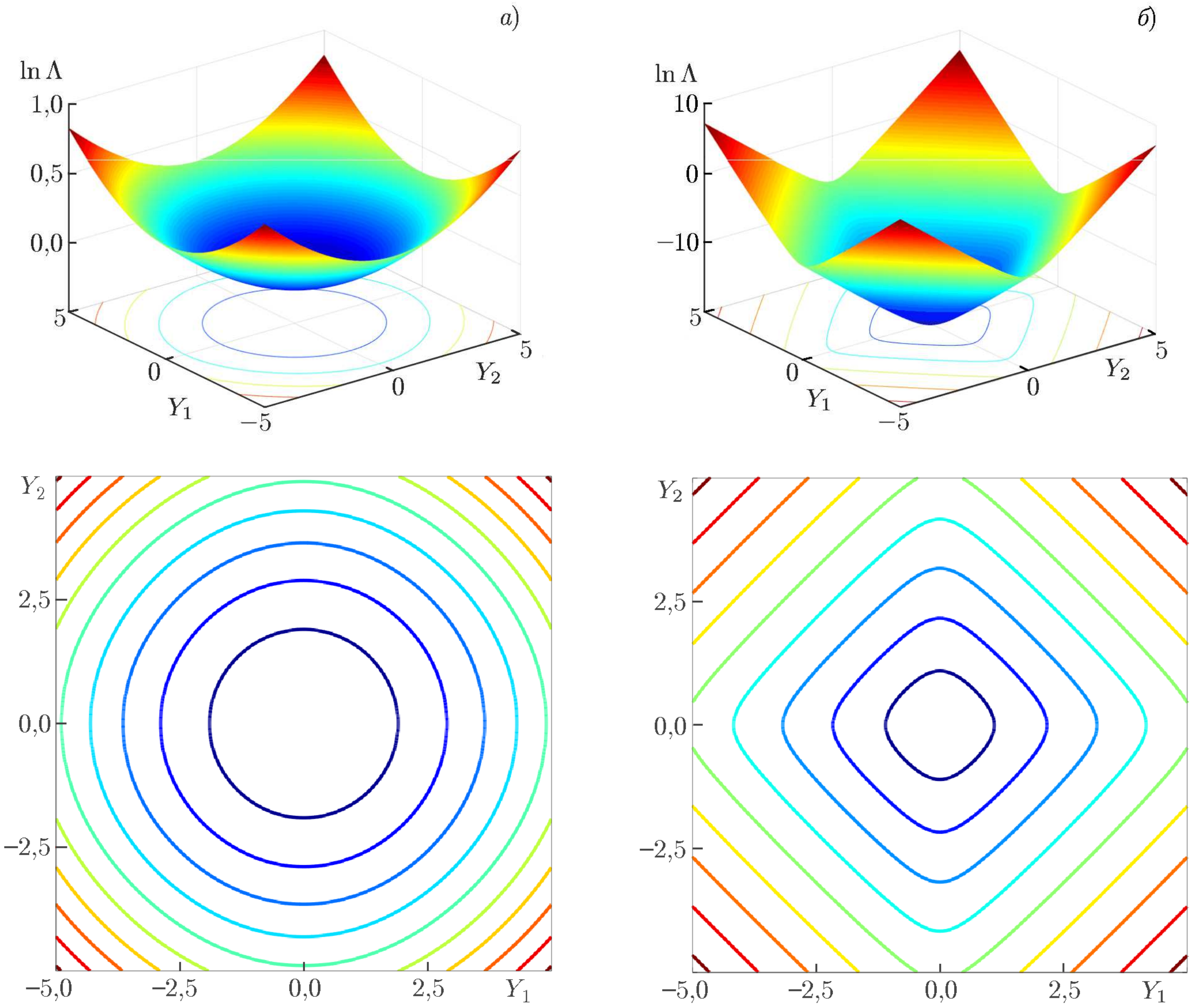


Рис. 2. Поверхности Λ-статистики (верхний ряд) и соответствующие им линии уровня (нижний ряд) для малых и больши́х значений SNR: SNR = −10 дБ (A^2 = 0,1; *а*) и SNR = 10 дБ (A^2 = = 1; *б*)

на рис. 2*а*, а для большого SNR = 10 дБ ($A^2/\sigma^2 = 10$) — на рис. 2*б*. Для большей наглядности форма поверхности $\Lambda(\mathbf{Y})$ и линии уровня приведены для полного пространства переменных $\mathbf{Y}$, включая и отрицательные значения.

Из приведённых рисунков видно, что при малых SNR достаточная статистика $\Lambda(\mathbf{Y})$ в пространстве $\mathbf{Y}$ хорошо аппроксимируется аксиально-симметричной функцией, зависящей от суммы квадратов амплитуд $\sum_{m=1}^{M} Y_m^2$, а при больши́х — некоторой функцией, зависящей от суммы $\sum_{m=1}^{M} |Y_m|$. Действительно, подставляя в (9) известное разложение функции Бесселя первого рода нулевого порядка $I_0(z)$ в степенной ряд [18],

$$I_0(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^k}{(k!)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{4} z^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^3}{(3!)^2}) + \ldots\,, \tag{10}$$

и учитывая при малых значениях аргумента z только первые два слагаемых этого ряда, получим приближённое выражение для многомерного отношения правдоподобия (8) и (9) в виде

$$\Lambda \approx \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} a^2[n]\right)\sum_{m=1}^{M} Y_m^2 \sim \sum_{m=1}^{M} Y_m^2. \tag{11}$$

При бо́льших значениях аргумента z для функции $I_0(z)$ можно использовать асимптотическое разложение [18]

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1-\frac{\mu-1}{8z}+\frac{(\mu-1)\,(\mu-9)}{2!(8z)^2}-\frac{(\mu-1)(\mu-9)\,(\mu-25)}{3!(8z)^3}+\ldots\right]. \tag{12}$$

Оставляя в этом разложении только первое слагаемое, получим следующее приближённое выражение для отношения правдоподобия (8) и (9) в случае больших SNR:

$$\Lambda(\mathbf{Y}) \approx \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} a^2[n]\right)\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma^2}\sum\limits_{m=1}^{M} Y_m\right)}{\left(2\pi\frac{A}{\sigma^2}\right)^{m/2}\prod\limits_{m=1}^{M}\sqrt{Y_m}} \sim \sum_{m=1}^{M} Y_m. \tag{13}$$

Из анализа выражения (13) следует, что поведение отношения правдоподобия при бо́льших SNR определяется в основном экспоненциальной функцией, стоящей в числителе, а степенна́я функция в знаменателе не оказывает на него существенного влияния. Таким образом, можно приближённо считать, что при бо́льших значениях аргумента отношение правдоподобия является монотонной функцией суммы $\sum_{m=1}^{M} Y_m$, стоящей в показателе экспоненты в выражении (13). Как известно, для решения задачи оптимального обнаружения полезного сигнала по критерию Неймана—Пирсона необходимо для заданной вероятности ложной тревоги найти пороговые значения Λ_{th} точной решающей статистики $\Lambda(\mathbf{Y})$. В силу сложности точного выражения для статистики (8) эти пороговые значения могут быть определены только численно, и, кроме того, они будут зависеть от SNR. Для пояснения причины возникновения в многомерной задаче зависимости пороговых значений критерия Неймана—Пирсона от SNR рассмотрим в качестве примера наиболее простой двумерный случай $M = 2$.

На рис. 3 показаны разбиения пространства $\mathbf{Y}$ на области принятия решений о наличии или отсутствии сигнала при различных значениях вероятности ложной тревоги P_{FA}. Из приведённых графиков видно, что граница разбиения пространства $\mathbf{Y}$ на область Γ_0 (принятие гипотезы H_0) и область Γ_1 (принятие гипотезы H_1) меняет свою форму в зависимости от SNR, в результате чего пороги изменяются даже при фиксированном уровне ложной тревоги. Можно показать, что аналогичное поведение граничной разделяющей гиперповерхности в зависимости от вероятности ложной тревоги и SNR имеет место и в многомерном пространстве наблюдений $\mathbf{Y}$.

Следует отметить, что в рассматриваемом случае легко могут быть получены и общие выражения для многомерных условных плотностей вероятности $W(\mathbf{Y}/\mathrm{H}_0)$ и $W(\mathbf{Y}/\mathrm{H}_1)$ (см. выражение (9)). С учётом независимости внутренних шумов в элементах антенной решётки многомерная плотность вероятности $W(\mathbf{Y}/\mathrm{H}_0)$ представляется как произведение M рэлеевских распределений, а в случае гипотезы H_1 — как произведение M распределений Райса:

$$W(\mathbf{Y}/\mathrm{H}_0) = \prod_{m=1}^{M} W(Y_m/\mathrm{H}_0) = \prod_{m=1}^{M}\frac{Y_m}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{Y_m^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$W(\mathbf{Y}/\mathrm{H}_1) = \prod_{m=1}^{M} W(Y_m/\mathrm{H}_1) = \prod_{m=1}^{M}\frac{Y_m}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{Y_m^2+A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A}{\sigma^2}\,Y_m\right). \tag{14}$$

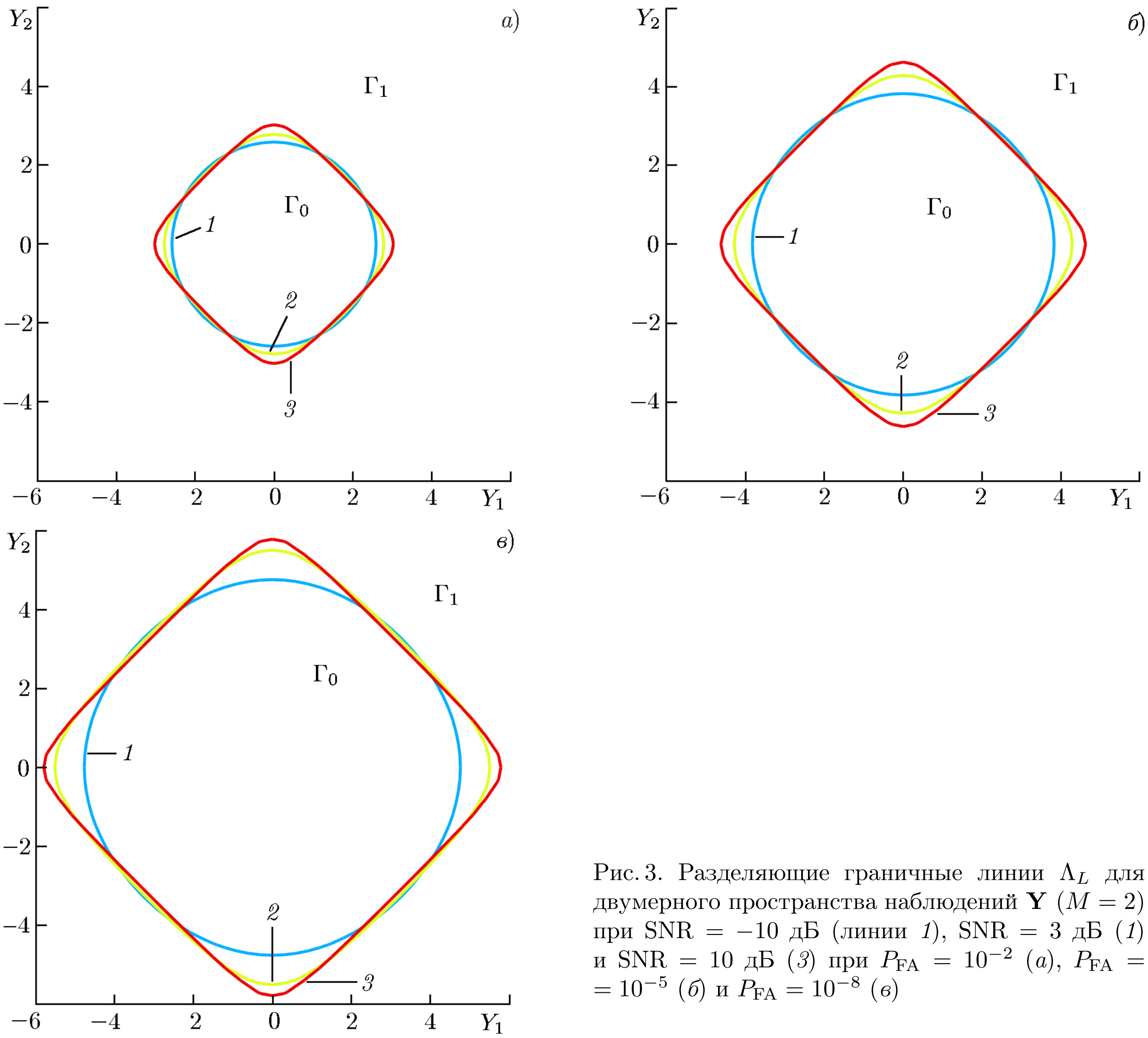
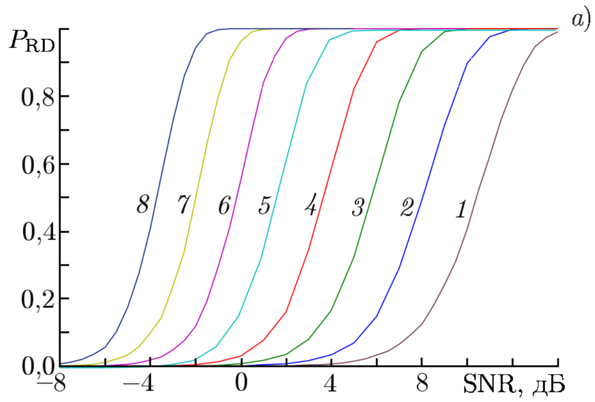


Рис. 3. Разделяющие граничные линии Λ_L для двумерного пространства наблюдений $\mathbf{Y}$ ($M = 2$) при SNR = −10 дБ (линии *1*), SNR = 3 дБ (*1*) и SNR = 10 дБ (*3*) при $P_{\rm FA} = 10^{-2}$ (*а*), $P_{\rm FA} = 10^{-5}$ (*б*) и $P_{\rm FA} = 10^{-8}$ (*в*)

С использованием точной Λ-статистики были получены кривые обнаружения (зависимости вероятности правильного обнаружения от SNR) для антенных решёток с различным числом элементов. Как было отмечено выше, пороговые значения Λ-статистики находились численно. На рис. 4*а* показано, как изменяется вероятность правильного обнаружения при увеличении числа элементов антенной решётки для вероятности ложной тревоги $P_{\rm FA} = 10^{-5}$. Видно, что выигрыш при увеличении числа элементов в два раза составляет около 2 дБ, что совпадает с приближёнными оценками, приведёнными в известных работах по некогерентному обнаружению пакета импульсных сигналов для радарных приложений [11, 16, 17]. Более точные расчёты показывают, что для практически используемых вероятностей правильного обнаружения $P_{\rm RD} \approx 0{,}9$ [11] при увеличении числа элементов в антенной решётке выигрыш несколько снижается и меняется от 2,2 дБ (при изменении числа элементов с двух до четырёх) до 1,9 дБ (при изменении числа элементов с 32 до 64).

Приведённые графики показывают, что увеличение числа элементов в приёмной антенной решётке позволяет существенно увеличить вероятность правильного обнаружения сигналов даже для некогерентного приёма, без формирования диаграммы направленности антенны в со-



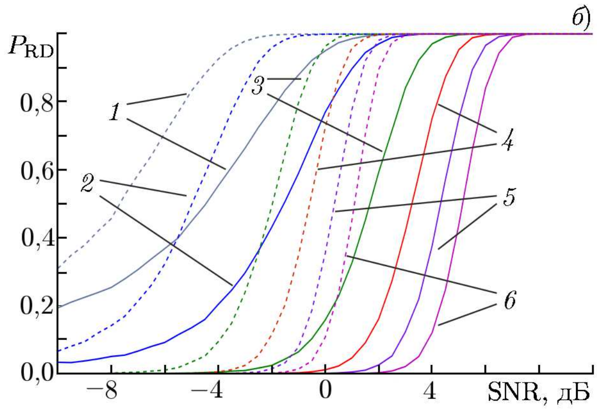


Рис. 4. Кривые обнаружения Λ-статистики для разного числа элементов антенной решётки (*а*; $P_{\rm FA} = 10^{-5}$; $M = 1$ — линия *1*, $M = 2$ — *2*, $M = 4$ — *3*, $M = 8$ — *4*, $M = 16$ — *5*, $M = 32$ — *6*, $M = 64$ — *7*, $M = 128$ — *8*) и разных вероятностей ложной тревоги (*б*; $P_{\rm FA} = 10^{-1}$ — линии *1*, $P_{\rm FA} = 10^{-2}$ — *2*, $P_{\rm FA} = 10^{-5}$ — *3*, $P_{\rm FA} = 10^{-8}$ — *4*, $P_{\rm FA} = 10^{-11}$ — *5*, $P_{\rm FA} = 10^{-14}$ — *6*; сплошные и штриховые линии соответствуют $M = 16$ и $M = 64$)

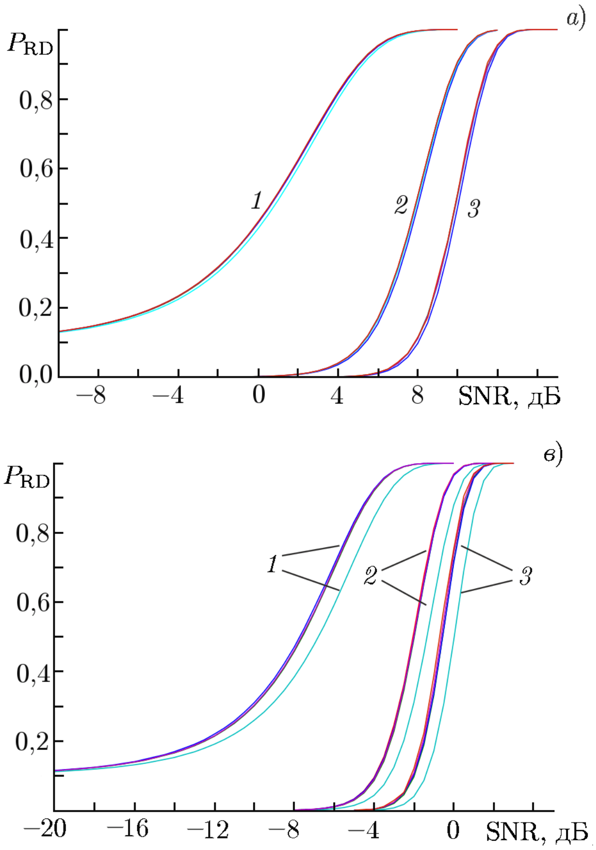
ответствии с направлением прихода полезного сигнала, как это делается при когерентном обнаружении. Так, например, при SNR = 0 дБ вероятность правильного обнаружения сигнала 16-элементной антенной решёткой составляет $P_{\rm RD} = 0{,}15$, 32-элементной $P_{\rm RD} = 0{,}55$, а 64-элементной $P_{\rm RD} = 0{,}97$. Была также исследована зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги (см. рис. 4*б*). Из приведённых кривых видно, что при уменьшении вероятности ложной тревоги $P_{\rm FA}$ до $10^{-11}{\div}10^{-14}$ кривые обнаружения стремятся к некоторому пределу, зависящему от числа элементов приёмной антенной решётки.

3. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШАЮЩИХ СТАТИСТИК ДЛЯ НЕКОГЕРЕНТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Как отмечалось выше, применение точной решающей статистики в рассматриваемом сценарии является достаточно сложным, поскольку и сама статистика, и разбиение пространства наблюдений $\mathbf{Y}$ на области принятия решения зависят от энергетического параметра. Поэтому в большинстве практических задач некогерентного обнаружения сигналов используются различные приближенные решающие статистики, для которых определение пороговых значений при решении задачи обнаружения сигнала по критерию Неймана—Пирсона не зависит от энергии полезного сигнала. Ниже будут исследованы характеристики таких наиболее широко используемых на практике решающих статистик. При бóльших SNR аргумент функции Бесселя в уравнении для достаточной статистики (8) принимает бóльшие значения и приближённое выражение для отношения правдоподобия представляется в виде (13). Поэтому в случае сильных сигналов (бóльших SNR) в качестве решающей статистики в блок-схеме обработки сигналов (см. рис. 1) можно использовать решающую статистику, равную сумме модулей выходных сигналов некогерентных согласованных фильтров:

$$T_1 = T_1[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} T_{1m}[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{n=1}^{N} x_m[n] a^*[n] \right| = \sum_{m=1}^{M} Y_m. \qquad (15)$$

Поскольку сигналы Y_m на выходе некогерентных согласованных фильтров при сделанных выше предположениях независимы и имеют рэлеевские распределения, то очевидно, что распределение



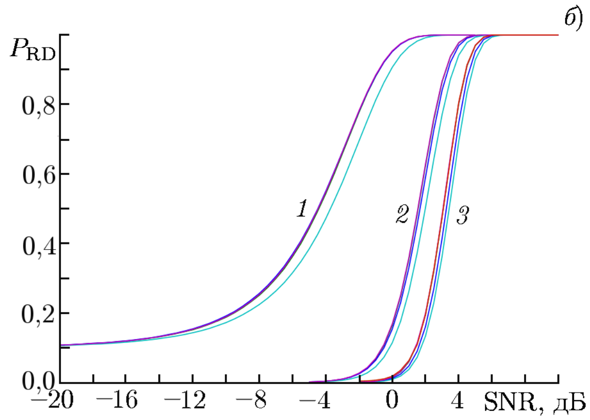


Рис. 5. Кривые обнаружения для различных решающих статистик для антенных решёток с разным числом элементов M: $M = 2$ (*а*), $M = 16$ (*б*), $M = 64$ (*в*). Семейства линий *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $P_{\rm FA} = 10^{-1}$, 10^{-5} и 10^{-8}. Красные линии соответствуют точной Λ-статистике; зелёные, синие, голубые и фиолетовые — статистикам T_1, T_2, T_3 и T_4

статистики T_1 при нулевой гипотезе $\rm H_0$ будет представлять из себя свёртку M рэлеевских распределений, для которой аналитическое выражение в общем виде неизвестно. Поэтому пороговые значения статистики T_1 для различных вероятностей ложной тревоги также приходится находить численно. Однако следует отметить, что при использовании критерия Неймана—Пирсона эти пороги уже не зависят от энергии принимаемого полезного сигнала, что существенно упрощает построение кривых обнаружения. Для статистики T_1 граничная поверхность L_1, разделяющая пространство наблюдений $\mathbf{Y}$ на области Γ_0 (принятие гипотезы $\rm H_0$) и Γ_1 (принятие гипотезы $\rm H_1$), будет представлять из себя гиперплоскость в пространстве $\mathbf{Y}$, описываемую уравнением

$$\sum_{m=1}^{M} Y_m = T_{1\,\rm th}, \tag{16}$$

где параметр $T_{1\,\rm th}$ является пороговым значением статистики T_1 и зависит только от заданного уровня вероятности ложной тревоги. Для иллюстрации на рис. 5 показаны границы разбиения пространства наблюдений $\mathbf{Y}$ на области Γ_0 и Γ_1 в двумерном случае $M = 2$ для всех рассмотренных решающих статистик. Несложно увидеть, что в этом случае граница разбиения для статитики T_1 будет являться прямой линией, для T_2 — окружностью с центром в начале координат, а для T_3 — гиперболой.

При малых SNR аргумент функции Бесселя в выражении для достаточной статистики (8) также принимает малые значения. В этом случае приближённое выражение для отношения правдоподобия представляется в виде (11), монотонно зависящем от суммы квадратов. Поэтому в случае слабых сигналов в качестве решающей статистики в блок-схеме обработки сигналов (см. рис. 1) можно выбрать решающую статистику, равную сумме квадратов выходных сигналов некогерентных согласованных фильтров:

$$T_2 = T_2[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} T_{2\,m}[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} \left| \sum_{n=1}^{N} x_m[n] a^*[n] \right|^2 = \sum_{m=1}^{M} Y_m^2. \tag{17}$$

Таким образом, при использовании статистики T_2 граничная поверхность L_2, разделяющая пространство наблюдений $\mathbf{Y}$ на области Γ_0 (принятия гипотезы H_0) и Γ_1 (принятия гипотезы H_1) будет представлять из себя гиперсферу, описываемую уравнением

$$\sum_{m=1}^{M} Y_m^2 = T_{2\,\mathrm{th}} \tag{18}$$

где параметр $T_{2\mathrm{th}}$ является пороговым значением статистики T_2 и также зависит только от заданного уровня вероятности ложной тревоги. Статистика T_2 при нулевой гипотезе H_0 имеет χ^2-распределение с $2M$ степенями свободы [5]:

$$\frac{T_2}{\sigma^2/2} \sim \chi^2_{2M}. \tag{19}$$

Поэтому пороговое значение в формуле (20) при заданной вероятности ложной тревоги может быть найдено аналитически из уравнения

$$P_{\mathrm{FA}} = \int\limits_{T_{2\,\mathrm{th}}}^{\infty} \chi^2_{2M}\, \frac{T_2}{\sigma^2/2}\, \mathrm{d}T = Q_{\chi^2_{2M}} \left(\frac{T_{2\,\mathrm{th}}}{\sigma^2/2} \right), \tag{20}$$

где

$$\chi_p^2(x) = \int\limits_{x}^{\infty} p(t)\, \mathrm{d}t \tag{21}$$

— вероятность «правого хвоста» для χ^2-распределения. В силу центральной предельной теоремы при большом числе степеней свободы $p = 2M > 30$ χ^2-распределение хорошо аппроксимируется нормальным [19]:

$$\chi_p^2 \approx \mathrm{N}(p, \sqrt{2p}). \tag{22}$$

Таким образом, функцию распределения решающей статистики T_2 уже для 16-элементной антенной решётки можно считать гауссовской и использовать для аналитического вычисления вероятности правильного обнаружения.

В некоторых инженерных приложениях при бóльших диапазонах изменения мощности входных сигналов в качестве решающей статистики схемы некогерентного обнаружения используется сумма логарифмов выходных сигналов некогерентных согласованных фильтров [17]:

$$T_3 = T_3[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} T_{3\,m}[\mathbf{x}] = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \ln |x_m[n] a^*[n]| = \sum_{m=1}^{M} \ln Y_m. \tag{23}$$

Распределение статистики T_3 при нулевой гипотезе H_0 будет представлять из себя свёртку M логарифмов рэлеевских случайных величин, для которой аналитическое выражение в общем виде неизвестно. Поэтому пороговые значения статистики T_3 для различных вероятностей ложной тревоги также приходится находить численно. При этом граничная поверхность L_3, разделяющая пространство наблюдений $\mathbf{Y}$ на области Γ_0 и Γ_1, будет представлять из себя M-мерный гиперболоид в пространстве $\mathbf{Y}$, описываемый уравнениями

$$\sum_{m=1}^{M} \ln Y_m = T_{3\,\mathrm{th}}, \qquad \prod_{m=1}^{M} Y_m = T'_{3\,\mathrm{th}} = e^{T_{3\,\mathrm{th}}}, \tag{24}$$

где параметр $T_{3\,\mathrm{th}}$ является пороговым значением статистики T_3 и зависит только от заданного уровня вероятности ложной тревоги.

Анализ поверхностей, определяющих границы разбиения пространства наблюдений $\mathbf{Y}$ на области принятия решения Γ_0 и Γ_1, показывает, что граница разбиения L_Λ для точной решающей статистики Λ всегда находится в области между границами L_1 и L_2, а граница L_3 оказывается вне этой области. Поэтому представляется логичным рассмотреть комбинированную решающую статистику, представляющую из себя комбинацию статистик T_1 и T_2. Для обоснования вида комбинированной решающей статистики заметим, что нормированную решающую статистику T_1/M можно рассматривать как оценку среднего значения $\langle Y\rangle$ сигналов на выходах некогерентных согласованных фильтров, а нормированную статистику T_2/M — как оценку их средней мощности (среднего квадрата) $\langle Y^2\rangle$. Хорошо известно, что в соответствии с теоремой Чебышёва эти оценки являются состоятельными, т. е. при увеличении числа элементов M антенной решётки значения нормированых статистик T_1/M и T_2/M стремятся к истинным значениям этих параметров:

$$\frac{T_1}{M} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} Y_m \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \langle Y\rangle, \qquad \frac{T_2}{M} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} Y_m^2 \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \langle Y^2\rangle. \tag{25}$$

Поскольку при гипотезе H_0 сигналы на выходах некогерентных согласованных фильтров имеют независимые и одинаковые рэлеевские распределения, их средние значения и средние квадраты будут связаны жёсткой детерминированной связью [3]

$$\langle Y\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\sqrt{\langle Y^2\rangle}\,. \tag{26}$$

Проведённый численный анализ показал, что оценки T_1/M и $\sqrt{T_2/M}$ имеют приблизительно одинаковые дисперсии. Поэтому с учётом (25) и (26) представляется логичным ввести новую комбинированную решающую статистику в виде линейной комбинации, представляющей из себя взвешенное арифметическое среднее этих оценок:

$$T_4 = \frac{T_1}{M} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\sqrt{\frac{T_2}{M}} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} Y_m + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} Y_m^2}\,. \tag{27}$$

Несложно показать, что поверхность L_4, разделяющая пространство наблюдений $\mathbf{Y}$ на области Γ_0 и Γ_1, для статистики T_4 будет представлять собой гиперсферу со смещённым центром и располагаться между гиперповерхностями L_1 и L_2 (см. рис. 6). В силу такого построения комбинированная статистика должна лучше аппроксимировать точную решающую Λ-статистику и в случае малых, и в случае бóльших SNR.

4. СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШАЮЩИХ СТАТИСТИК

Для сравнения характеристик точной решающей статистики и рассмотренных выше приближённых решающих статистик было проведено численное моделирование в среде «Matlab» некогерентного обнаружения полезного сигнала приёмной антенной решёткой с M элементами. Фазы ψ_m полезных сигналов задавались в разных элементах антенной решётки случайными, независимыми и равномерно распределёнными величинами, а амплитуды полезного сигнала на разных антенных элементах — одинаковыми. Собственный шум в антенных элементах моделировался аддитивным белым гауссовским шумом с единичной мощностью. В качестве полезного сигнала $a[n]$ рассматривался сложный сигнал (код Баркера), обладающий хорошей автокорреляционной функцией с длительностью 13 элементарных импульсов. Полная энергия сложного сигнала

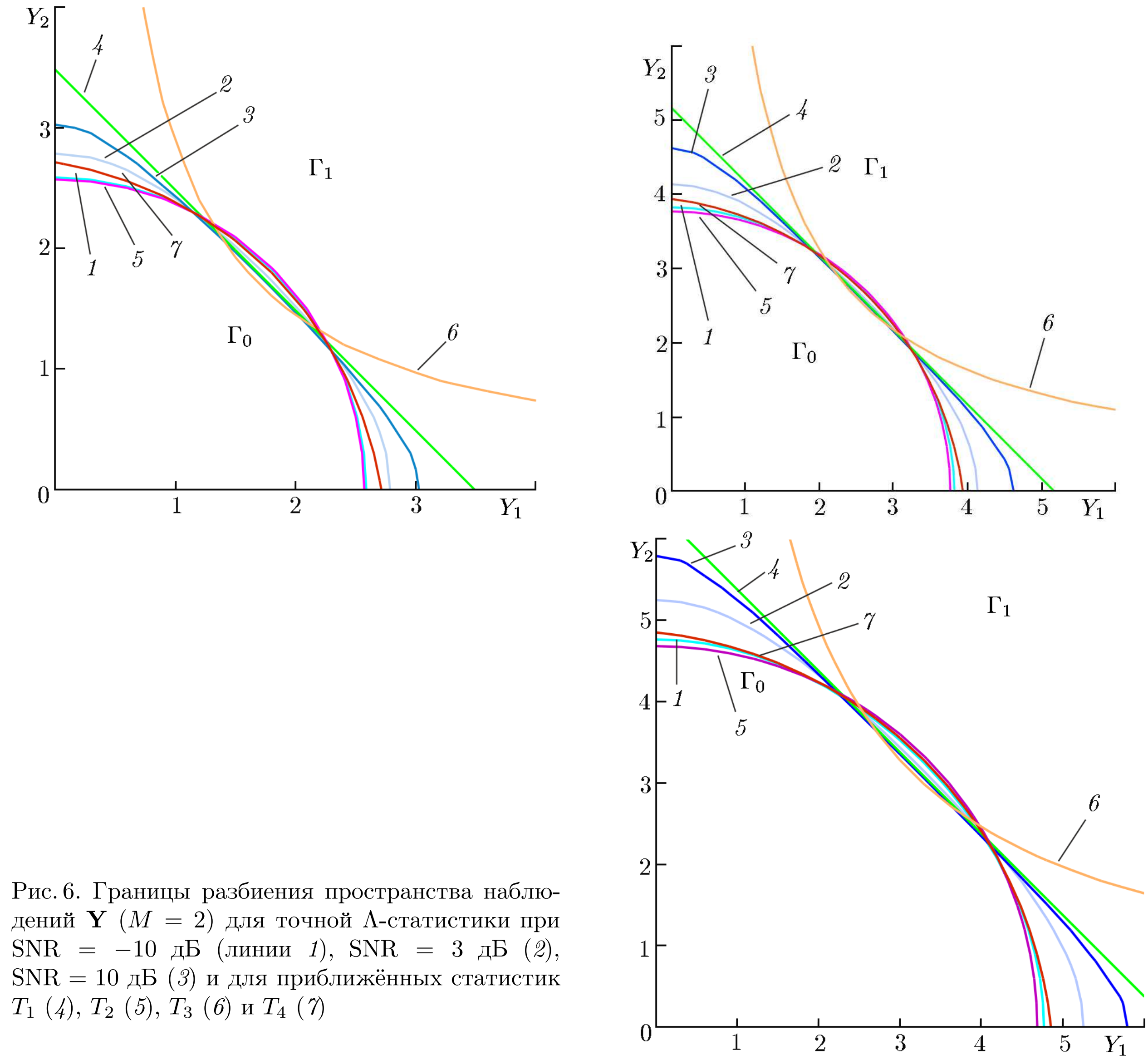
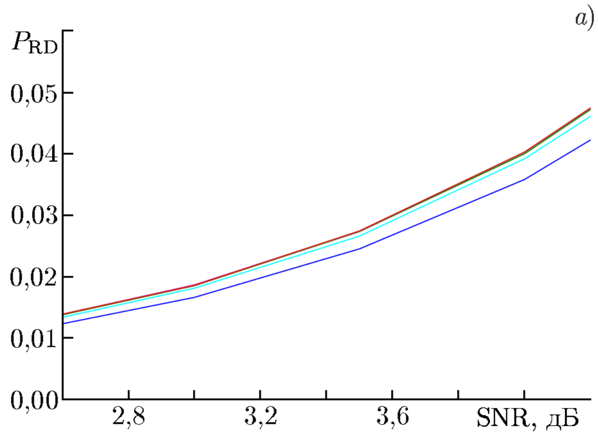


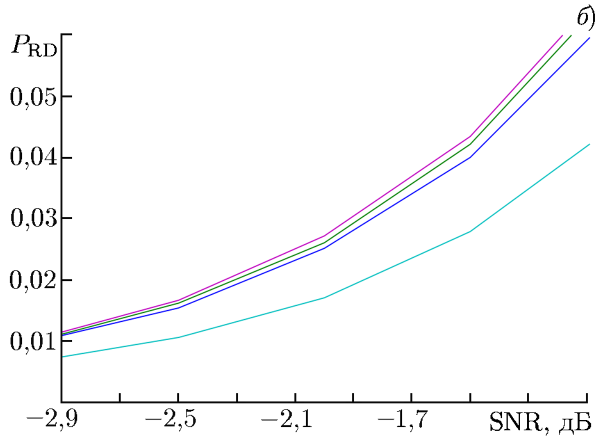
Рис. 6. Границы разбиения пространства наблюдений $\mathbf{Y}$ ($M = 2$) для точной Λ-статистики при SNR $= -10$ дБ (линии *1*), SNR $= 3$ дБ (*2*), SNR $= 10$ дБ (*3*) и для приближённых статистик T_1 (*4*), T_2 (*5*), T_3 (*6*) и T_4 (*7*)

нормировалась на единицу. Следует, однако, отметить, что, как показывает проведённый выше анализ, характеристики рассматриваемой системы обнаружения не зависят от формы полезного сигнала, а определяются только его энергией (т. е. SNR).

Был проведён подробный сравнительный анализ характеристик обнаружения всех рассмотренных выше решающих статистик для антенных решёток с разным числом антенных элементов и при различных значениях вероятности ложной тревоги. В первую очередь следует отметить, что все рассматриваемые статистики (включая точную) для скалярного случая $M = 1$ (одноэлементной антенны) эквивалентны, т. к. являются монотонными функциями сигнала на выходе одного некогерентного согласованного фильтра Y_1. В многоэлементных антенных решётках характеристики решающих статистик существенно различаются, причём разница между ними возрастает с увеличением числа элементов решётки M.

Для всех рассматриваемых конфигураций антенных решёток проведённый численный анализ показал, что при всех уровнях вероятности ложной тревоги и SNR точная решающая статистика Λ превосходит приближённые статистики, как это и следует из теории. На рис. 5 приведены





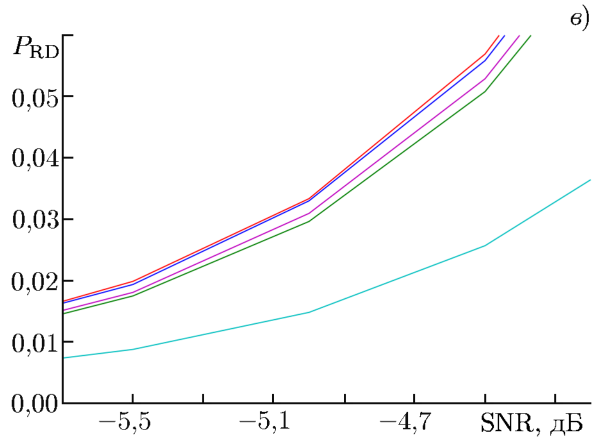
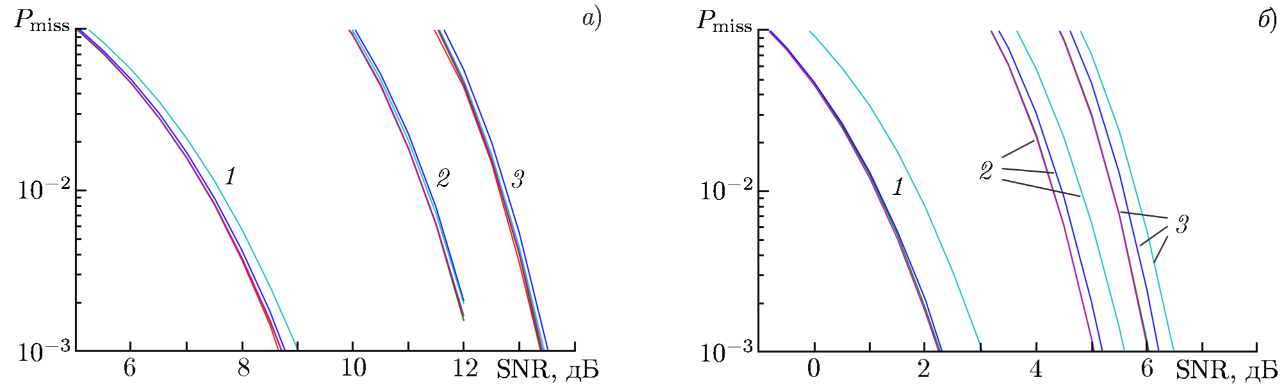


Рис. 7. Кривые обнаружения для различных решающих статистик для антенных решёток с разным числом элементов (область малых $P_{\rm RD}$): $M = 2$ (*а*), $M = 16$ (*б*) и $M = 64$ (*в*). Цветовые обозначения соответствуют рис. 5

кривые обнаружения для антенных решёток с разным числом элементов, $M = 2$, 16 и 64, при вероятностях ложной тревоги $P_{\rm FA} = 10^{-1}$, 10^{-5} и 10^{-8}. Из него видно, что кривые обнаружения для антенной решётки с двумя элементами ($M = 2$) для всех рассматриваемых статистик оказываются достаточно близкими (см. рис. 5*а*). При этом вероятность правильного обнаружения $P_{\rm RD} = 0{,}5$ для всех решающих статистик достигается при бóльших вероятностях ложной тревоги ($P_{\rm FA} = 10^{-1}$) при SNR ≈ 1 дБ, а при уменьшении вероятности $P_{\rm FA}$ смещается в область бóльших SNR: для $P_{\rm FA} = 10^{-5}$ — на уровень SNR $= 8$ дБ и при $P_{\rm FA} = 10^{-8}$ — на уровень SNR $= 10$ дБ. Кривые обнаружения для антенной решётки с $M = 16$ элементами (см. рис. 5*б*) сдвигаются относительно кривых для решётки с $M = 2$ для всех рассматриваемых решающих статистик влево на 5÷7 дБ (приблизительно на 5, 6 и 7 дБ для вероятностей ложной тревоги $P_{\rm FA} = 10^{-1}$, 10^{-5} и 10^{-8} соответственно), а для антенной решётки с $M = 64$ элементами (см. рис. 7*в*) — на 9÷11 дБ (приблизительно на 9, 10 и 11 дБ для вероятностей ложной тревоги $P_{\rm FA} = 10^{-1}$, 10^{-5} и 10^{-8} соответственно). При этом с увеличением числа элементов антенной решётки различия между решающими статистиками становятся более значимыми.

Более детальное поведение кривых обнаружения в области малых значений вероятностей правильного обнаружения ($P_{\rm RD} < 0{,}05$) при вероятности ложной тревоги $P_{\rm FA} = 10^{-5}$ показано на рис. 7. Из него видно, что в рассматриваемой области малых $P_{\rm RD}$ при положительных значениях SNR практически часто используемая решающая статистика T_2 проигрывает всем другим решающим статистикам, включая логарифмическую T_3 (см. рис. 7*а*). При увеличении числа элементов и соответствующего смещения рассматриваемой области значений $P_{\rm RD}$ в сторону отрицательных SNR решающая статистика T_2 начинает превосходить сначала логарифмическую (см. рис. 7*б*), а потом и все остальные статистики, кроме точной (см. рис. 7*в*). Только при уровнях SNR <



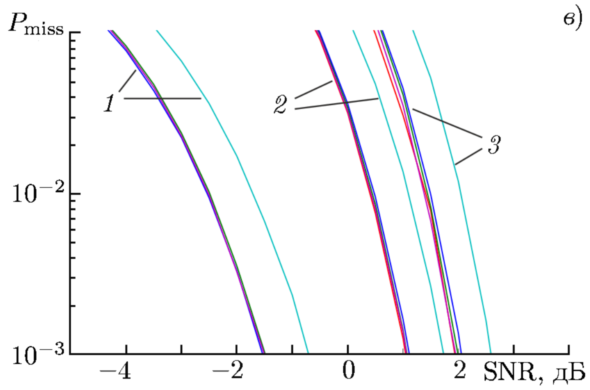


Рис. 8. Вероятности пропуска цели $P_{\mathrm{miss}} = 1 - P_{\mathrm{RD}}$ для различных решающих статистик для антенных решёток с разным числом элементов M: $M = 2$ (*а*), $M = 16$ (*б*) и $M = 64$ (*в*). Обозначения соответствуют рис. 5

< -3 дБ статистика T_2 превосходит все остальные приближённые решающие статистики и её характеристики становятся весьма близки к характеристикам точной решающей статистики.

Для анализа поведения кривых обнаружения в наиболее интересной области бóльших вероятностей правильного обнаружения ($P_{\mathrm{RD}} > 0{,}9$) удобно построить графики зависимости вероятностей пропуска целей $P_{\mathrm{MISS}} = 1 - P_{\mathrm{RD}}$ от SNR. На рис. 8 приведены вероятности пропуска цели для антенных решёток с разным числом элементов, $M = 2$, 16, 64, в наиболее интересном с практической точки зрения интервале значений $P_{\mathrm{MISS}} = 0{,}100 \div 0{,}001$. Из него видно, что для антенных решёток с малым числом элементов ($M = 2$, см. рис. 8*а*) вероятности пропуска цели слабо зависят от используемой решающей статистики. Для антенных решеток с бóльшим числом элементов ($M = 16$ и 64) влияние используемой решающей статистики на вероятности пропуска цели становится существенным (см. рис. 8*б*, *в*). Особенно большой проигрыш демонстрирует логарифмическая статистика T_3. Вероятности пропуска цели для этой статистики по сравнению с точной могут возрастать в $3 \div 4$ раза для одинаковых значений SNR.

Следует отметить, что для бóльших вероятностей ложной тревоги ($P_{\mathrm{FA}} = 0{,}1$) характеристики всех остальных решающих статистик (кроме логарифмической) оказываются весьма близкими, разница в вероятностях пропуска цели для них оказывается не более 5 %. Однако при малых вероятностях ложной тревоги, $P_{\mathrm{FA}} = 10^{-5}$ и 10^{-8}, использование квадратичной решающей статистики T_2 может приводить к относительно большому увеличению вероятностей пропуска целей, на $30 \div 40$ % по сравнению со статистиками Λ, T_1 и T_4. Интересно также отметить, что характеристики введённой нами выше комбинированной решающей статистики T_4, практически совпадают с характеристиками точной статистики Λ для всех рассмотренных выше уровней ложной тревоги и SNR (см. рис. 7 и 8). При этом пороги для комбинированной статистики T_4 в отличие от точной статистики Λ, не зависят от SNR и, как видно из уравнения (28), для вычисления значений статистики T_4 по данным наблюдений не требуется использование специальных функций, а достаточно простых функций, применяемых для широко известных статистик T_1 и T_2. Поэтому комбинированная статистика T_4 может быть рекомендована для практического использования в различных системах некогерентного обнаружения при любых значениях SNR.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые проведён подробный анализ характеристик точной решающей статистики для оптимального некогерентного обнаружения сигналов в многоэлементных антенных решётках. Выполнено подробное исследование поведения точной статистики в пространстве переменных, которые наблюдаются на выходах некогерентных согласованных фильтров, осуществляющих первичную обработку сигналов на каждом элементе антенной решётки. Показано, что точная решающая статистика при малых SNR переходит в известную квадратичную решающую статистику, а при больши́х SNR отношение правдоподобия хорошо аппроксимируется монотонной функцией от суммы выходных сигналов некогерентных согласованных фильтров. Установлено, что при использовании оптимального решающего правила (точной решающей статистики) для критерия Неймана—Пирсона пороговые значения зависят от SNR вследствие деформации границы разбиения пространства наблюдений (многомерной гиперповерхности), определяющей области принятия различных гипотез.

С использованием точной решающей статистики получены кривые обнаружения (зависимость вероятности правильного обнаружения от SNR) для антенных решёток с различным числом элементов. Показано, что удвоение числа элементов при некогерентном обнаружении приводит к эквивалентному выигрышу порядка 1,9÷2,1 дБ, что всего на 1 дБ меньше, чем выигрыш при когерентном сложении сигналов.

Проведено подробное сравнение характеристик точной и различных приближённых решающих статистик, часто используемых на практике для некогерентного обнаружения. Показано, что для антенных решёток с больши́м числом элементов влияние используемой решающей статистики на вероятности пропуска цели становится весьма существенным. Например, использование традиционной квадратичной статистики для некогерентного обнаружения в многоэлементных антенных решётках с числом элементов больше 16 может привести к увеличению вероятности пропуска цели на 30÷40 %.

Для некогерентного обнаружения сигналов в многоэлементных антенных решётках предложено использовать комбинированную решающую статистику. Данная статистика является оптимальной комбинацией линейной и квадратичной статистик и позволяет получить универсальную аппроксимацию точной решающей статистики и при больши́х, и при малых SNR. Показано, что при использовании комбинированной статистики увеличение вероятности пропуска цели по сравнению с точной решающей статистикой не превышает 2÷3 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chowdhury M., Manolakos A., Goldsmith F. // 48th Annu. Conf. Inform. Sci. Systems. Princeton, NJ, USA. 19–21 Mar. 2014. art. no. 6814078.
2. Jing L., Carvalho E. D., Popovski P., Martnez O. // IEEE Trans. Signal Process. 2016. V. 64, No. 19. P. 5 000.
3. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
4. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.

5. Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing. II: Detection Theory. Upper Saddle River: Prentice Hall. 1998. 672 p.
6. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Чернояров О. В., Шахтарин Б. И. // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 4. С. 399.
7. Korchagin Y. E., Chernoyarov O. V., Makarov A. A., Shakhtarin B. I. // 2nd World Symposium on Web Applications and Networking, March 21–23, 2015, Sousse, Tunisia. Art. no. 7210323.
8. Болховская О. В., Мальцев А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 12. С. 1 077.
Bolkhovskaya O. V., Maltsev A. A. // IEEE Signal Proc. Lett. 2004. V. 11, No. 10. P. 841.
10. Болховская О. В., Мальцев А. А., Родюшкин К. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 8. С. 694.
11. Ширман Я. Д. Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
12. Peebles P. Z., Jr. Radar Principles. Hoboken: John Wiley and Sons, 1998. 794 p.
13. Skolnik M. Radar Handbook. New York: McGraw-Hill Companies, 2008. 1 328 p.
14. Swerling P. // IRE Trans. Inf. Theory. 1960. V. 6, No. 2. P. 269.
15. DiFranco J. V., Rubin W. L. Radar Detection. Norwood: Artech House, 1980. 654 p.
16. Richards M. A. Fundamentals of Radar Signal Processing. New York: McGraw-Hill Education, 2014. 656 p.
17. Richards M. A. Noncoherent Integration Gain, and Its Approximation. Technical memorandum. Atlanta: Georgia Inst.of Technology, 2010. 10 p.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
19. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.

Поступила в редакцию 27 декабря 2017 г.; принята в печать 26 февраля 2018 г.

TEST STATISTICS FOR INCOHERENT SIGNAL DETECTION IN MULTI-ELEMENT ANTENNA ARRAYS

O. V. Bolkhovskaya and A. A. Maltsev

We present a detailed study of the characteristics of the exact test statistic for the optimal incoherent signal detection in multi-element antenna array. The exact test statistic is derived from the rigorous expression for the likelihood ratio in the case where the useful-signal amplitudes at the antenna-array elements are identical, whereas the phases are random. The analysis is carried out in the space of the variables which are observed at the outputs of the incoherent matched filters performing the initial signal processing at each antenna array element. Variation in the signal-to-noise ratio is shown to deform the interface of multidimensional observation-space partitioning, which results in a variation in the threshold values of the exact test statistic when the Neyman-Pearson criterion is used. The characteristics of the exact test statistic and various approximate test statistics are compared in detail. For the antenna arrays with a large number of elements, the influence of the used test statistic on the target-missing probability is shown to become rather significant. A new combined test statistic with the characteristics that are close to those of the exact test statistic is introduced for a wide signal-to-noise ratio range.