УДК 621.391:519.216+621.396.67.012

# ОБНАРУЖЕНИЕ И ПЕЛЕНГАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРЕЖЕННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК

*В. И. Турчин, А. А. Родионов* *

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Исследованы возможности неэквидистантных разреженных линейных антенных решёток для решения задач обнаружения и оценки параметров источников. Для количественного описания возможностей разреженной антенной решётки предложена новая характеристика – вероятность обнаружения и оценки, изложена методика её расчёта. Рассмотрена задача нахождения максимальной длины разреженной антенной решётки с фиксированным числом элементов $N$, для которой сохраняются приемлемые характеристики обнаружения источников сигналов. Показано, что при незначительном увеличении отношения сигнал/шум вероятность обнаружения и оценки остаётся такой же, что и для стандартной $N$-элементной антенной решётки с межэлементным расстоянием в половину длины волны, а точность пеленгации растёт пропорционально размеру решётки. Например, при более чем стократном увеличении длины антенной решётки вероятность обнаружения и оценки сохраняется при увеличении отношения сигнал/шум на 1–2 дБ.

## ВВЕДЕНИЕ

Антенные решётки широко применяются практически во всём диапазоне длин электромагнитных волн в системах активной и пассивной локации, пеленгации, связи, в подводной акустике, сейсмике и т. д. Простейшим вариантом антенной решётки является линейная эквидистантная решётка с расстоянием между элементами в полдлины волны (стандартная антенная решётка), особенности которой хорошо известны. Характеристики стандартной решётки зависят от отношения $D/\lambda$, где $D$ — длина решётки, $\lambda$ — длина волны. Поскольку элементы располагаются с шагом $\lambda/2$, для стандартной антенной решётки отношение $D/\lambda$ определяется числом элементов $N$: $D/\lambda = N/2$. На практике часто возникает необходимость, сохраняя неизменным число элементов $N$, увеличить размер $D$ или уменьшить $\lambda$ с соответствующим повышением точности пеленгации [1]. Такие антенные решётки принято называть разреженными (см., например, работы [1, 2]). Степень разреженности удобно характеризовать параметром $U > 1$: $U = (D/\lambda)/(N/2)$; для стандартной антенной решётки $U = 1$. В случае эквидистантной решётки, сканирующей во всём секторе вещественных углов, увеличение $U$ приводит к появлению решёточных лепестков, т. е. к неоднозначности определения пеленга. Можно, однако, расположить элементы антенной решётки неэквидистантно; тогда решёточные лепестки исчезают, но может возрасти уровень боковых лепестков (УБЛ).

Синтезу неэквидистантных решёток, т. е. выбору расположения их приёмных элементов, обеспечивающемц заданный или приемлемый УБЛ, посвящена обширная литература, например работы [2–7], которые содержат ряд примеров синтеза неэквидистантных антенных решёток с параметром $U$ порядка нескольких единиц и низким УБЛ. При этом возникает вопрос: до какого значения можно увеличивать степень разреженности, т. е. параметр $U$, исходя не из величины УБЛ, а из возможности эффективного решения приёмной системой, включающей антенную решётку,

* alexr@appl.sci-nnov.ru

[1] В частности, в гидроакустике весьма актуальным является расширение частотного диапазона работы антенны в режиме шумопеленгации; при заданных размерах антенны и числе её приёмных элементов при уменьшении длины волны антенная решётка становится разреженной.

типовых практических задач. Такими задачами могут быть обнаружение одного или нескольких источников на фоне шума, оценки углового положения источников с высокой точностью, разрешение близко расположенных источников, адаптивное подавление локализованной по углу помехи и т. д. Очевидно, УБЛ определяет такие возможности лишь косвенно. Можно предположить, что для любой величины параметра $U$ можно подобрать положение элементов антенной решётки, чтобы боковые лепестки были бы строго меньше главного лепестка, при этом пеленгация, например, одного источника осуществлялась бы однозначно и с высокой точностью, как минимум при большом отношении сигнал/шум (ОСШ). В то же время, ограничения на величину $U$ должны существовать; анализу этих ограничений и посвящена данная работа.

Исследование допустимой степени разреженности включает в себя несколько моментов.

Во-первых, для произвольного $U$ должен быть сформулирован некоторый способ неэквидистантного размещения приёмных элементов, обеспечивающий приемлемый УБЛ. В дальнейшем будем рассматривать случайно-равномерное расположение приёмных элементов: разобьём длину апертуры $D$ на $N$ одинаковых интервалов, а внутри каждого будем располагать элементы некоторым (например случайным) образом. Такой вариант позволяет сохранять угловую ширину главного лепестка примерно равной $\lambda/D$ практически независимо от способа размещения приёмных элементов внутри интервалов. Для получения конкретного закона размещения элементов, реализующих приемлемую диаграмму направленности, можно просто использовать случайный перебор с достаточно бóльшим объёмом выборки $10^5\div 10^6$ и взять реализацию, обеспечивающую наилучшую по некоторому заранее выбранному критерию диаграмму направленности. Такой приём свободен от ограничений на величины $U$ и $N$. Естественно, он не гарантирует оптимальность полученного размещения элементов, однако позволяет получить конкретные результаты. В дальнейшем в качестве критерия отбора будет использоваться минимальная величина максимального уровня бокового лепестка $\text{УБЛ}_{\max}$.

Во-вторых, должна быть выбрана соответствующая методика анализа вероятностных характеристик как обнаружения, так и точности оценки пеленга. Во многих работах оптимальные алгоритмы обнаружения интересующего нас сигнала и оценки его неизвестных параметров рассматриваются по отдельности (например, [8–10]), что, строго говоря, не вполне корректно. Существует, однако, достаточно много работ, посвящённых синтезу алгоритмов обработки сигналов, оптимальных по отношению к обеим задачам [2] (см., например, работы [11–16]). Наиболее часто используется байесовский подход с минимизацией среднего риска при заданной функции потерь. Данная функция включает в себя как неизвестные параметры сигнала, принимающие непрерывные значения, так и параметры, принимающие дискретные значения — номера различаемых гипотез. Кроме того, в функцию потерь входит априорное распределение неизвестных непрерывных параметров (см., например, [12, 13]). Подобные алгоритмы имеют достаточно сложную структуру, однако, как показано, например, в работах [11, 12], при не слишком малом ОСШ могут быть сведены к критерию отношению правдоподобия и оценкам максимального правдоподобия. На практике, однако, порог обнаружения чаще находится по заданной вероятности ложной тревоги и, наряду с оценками максимального правдоподобия, в пеленгации применяется ряд алгоритмов (метод Кейпона, MUSIC и пр.), которые не являются оптимальными, но обладают рядом практических достоинств. Поэтому методика оценки характеристик системы, одновременно выполняющей обнаружение сигнала и оценку его неизвестных параметров, по сравнению с методикой, изложенной в работах [11, 12], должна быть несколько модифицирована.

В данной статье в разделе 1 приводятся характеристики диаграммы направленности случайно-равномерной антенной решётки в зависимости от параметров $U$ и $N$ для достаточно большого

[2] В англоязычной литературе — joint detection and estimation.

(порядка $10^6$) числа случайных реализаций положения её элементов.

В разделе 2 дано обоснование методики расчёта вероятностных характеристик обнаружения/оценки параметров сигнала. Для этого вводится новая величина: вероятность обнаружения и оценки параметров на основе комбинации вероятности обнаружения и вероятности аномальной ошибки. Даются основные определения данных вероятностей, а также вероятности ложной тревоги с учётом того, что сигнал на выходе устройства обработки как функция искомого параметра (пеленга) вычисляется с произвольно мелким шагом. В конце раздела приведены обобщения перечисленных характеристик на случай нескольких источников.

В разделе 3 даются вероятностные характеристики для одиночного тонального источника, наблюдаемого на фоне независимого шума. В частности, показана разница между случаями, когда обнаружение выполняется для независимых угловых каналов и для совокупности отсчётов по углу с малым шагом. Сформулированы требования к дополнительному увеличению ОСШ при росте степени разреженности $U$, при котором вероятностные характеристики остаются такими же, как и для стандартной антенной решётки.

В разделе 4 рассматривается модель нескольких источников со случайными амплитудами, наблюдаемых на фоне независимого шума. В качестве алгоритмов обработки выбраны процедура Бартлетта и алгоритм MUSIC (MUltiple SIgnal Classification). В начале раздела выполнено сравнение вероятностных характеристик для этих двух алгоритмов для случая одного источника. Далее максимальное внимание уделено анализу требований к ОСШ, необходимому для разрешения близкорасположенных источников с помощью алгоритма MUSIC в зависимости от степени разреженности решётки.

В Приложении приведены двухточечные распределения выходного сигнала, необходимые для приближённого расчёта вероятности ложной тревоги, и представлен ряд свойств вероятностей выполнения неравенств типа $x > y$, где $x, y$ — случайные величины, учитываемых при расчёте вероятности аномальной ошибки.

## 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ

Разобьём длину $D$ линейной антенной решётки на $N$ равных интервалов длиной $D/N = U\lambda/2$, где $N$ — заданное число приёмных элементов. Координату $n$-го приёмного элемента $d_n$ зададим формулой

$$d_n = \frac{U\lambda}{2}\, v_n, \qquad v_n = n - 1 + \varepsilon_n, \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где $\varepsilon_n$ — независимые равномерно распределённые в интервале $[0, 1]$ случайные величины [3]. Такой способ размещения элементов антенной решётки позволяет получать примерно одну и ту же ширину главного лепестка диаграммы направленности для любого распределения $\varepsilon_n$ и исключает заведомо неэффективные комбинации типа концентрации элементов около одной точки.

Диаграмма направленности антенной решётки $f(s)$ определяется известным выражением

$$f(s) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \exp(i\pi v_n s U), \tag{2}$$

где $s = \sin\varphi$, угол $\varphi$ отсчитывается от нормали к линии решётки. Модуль $|f(s)|$ имеет глобальный максимум, равный 1, в точке $s = 0$.

[3] Реальная длина антенной решётки $d_N - d_1$, т. е. расстояние между первым и последним элементом, в зависимости от выбора $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_N$, будет находиться в пределах от $D(1 - 2/N)$ до $D$.

Нетрудно найти средний профиль диаграммы направленности по мощности $F(s) = |f(s)|^2$:

$$E\{F(s)\} = F_0(s) - N^{-1}\,[1 - F_0(s/N)], \quad (3)$$

где $E\{F(s)\}$ обозначает среднее по ансамблю, $F(s) = \operatorname{sinc}^2(UNs/2)$ — диаграмма направленности сплошного линейного раскрыва с длиной $D$, $\operatorname{sinc} x = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Из соотношения (3) следует, что диаграмма направленности $|f(s)|$ вне некоторой окрестности главного лепестка будет иметь в среднем примерно постоянный уровень боковых лепестков примерно равный $1/\sqrt{N}$. В качестве примера на рис. 1 приведена зависимость (3) и диаграмма направленности для реализации $\varepsilon_n$, отвечающей минимальному значению УБЛ$_{\max}$; последняя выбиралась из выборки с объёмом $10^6$.

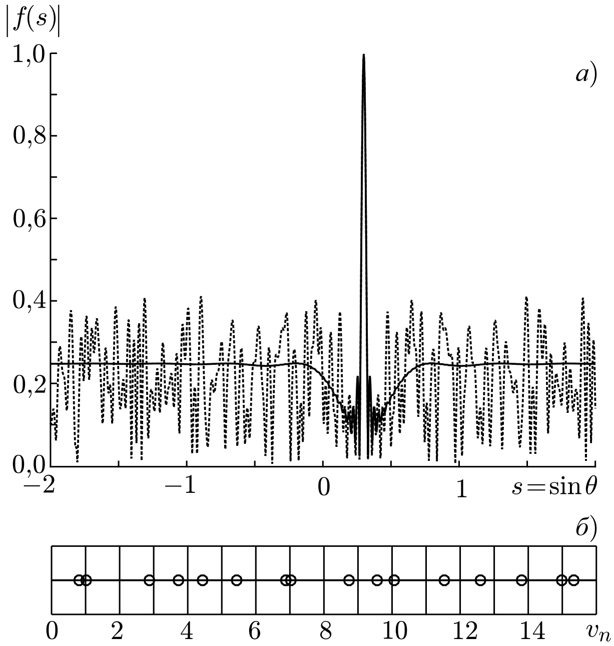


Рис. 1. Панель (*а*) — средняя диаграмма направленности (3) (сплошная линия) и реализация диаграммы направленности, соответствующая минимальному УБЛ$_{\max}$ (пунктирная линия). Панель (*б*) — расположение элементов, дающее в данном примере минимальный УБЛ$_{\max}$; $N = 16$, $U = 4$, УБЛ$_{\max} = 0{,}4$, $s_0 = 0{,}3$

Диаграмма направленности на рис. 1 показана в интервале $s \in [-2, 2]$, который взят из следующих соображений. Оценка углового положения источника выполняется путём перебора значений параметра $s$ в интервале $[-1, 1]$. Для углового положения источника $s_0$ поиск минимального УБЛ$_{\max}$ должен выполняться в интервале $[-1 - s_0, 1 - s_0]$, однако при этом каждому значению $s_0$ будет соответствовать своя конфигурация антенной решётки, что неприемлемо. Поэтому поиск реализации $\varepsilon_n$ должен проводиться для всех значений $s_0 \in [-1, 1]$, т. е. в интервале $s \in [-2, 2]$. Характеристики обнаружения при этом будут зависеть от параметров боковых лепестков, в частности от УБЛ$_{\max}$, в интервале $s_0 \in [-1, 1]$. В дальнейшем, однако, для сокращения объёма исследований отбор наилучшей реализации будет выполняться в интервале $s \in [-1, 1]$, что неявно предполагает $s_0 \approx 0$.

На рис. 2*а* приведены зависимости УБЛ$_{\max}$ от степени разреженности $U$ для разных $N$, полученные по $10^6$ реализациям $\varepsilon_n$. Достигнутые при данном числе реализаций минимальные значения УБЛ$_{\max}$ растут с увеличением $U$, но достаточно медленно. Например, для $N = 16$ при увеличении $U$ на 2 порядка минимальные УБЛ$_{\max}$ возрастают примерно с 0,4 до 0,7; скорость этого роста также падает с увеличением $N$. На рис. 2*б* представлена динамика снижения минимальной величины УБЛ$_{\max}$ при увеличении объёма выборки $J$ для фиксированных $N$ и $U$. Как видно из рисунка, минимум УБЛ$_{\max}$ убывает приблизительно пропорционально $-\log J$. При очень бо́льших $J$ это падение должно замедляться, т. к. бесконечный объём выборки включает в себя реализацию, обеспечивающую нижний предел УБЛ$_{\max}$. Достижение этой области при случайном переборе, однако, уже связано с вычислительными трудностями, так что вопрос о минимально возможном УБЛ$_{\max}$ остаётся открытым. Таким образом, случайный перебор положений элементов антенной решётки не может гарантировать, что найденная совокупность координат близка к оптимальной с заданной точностью. Однако естественно ожидать, что чем больше объём выборки, тем лучше отобранная совокупность будет отвечать заданному критерию (по вероятности).

Как показало численное моделирование, в отличие от УБЛ$_{\max}$, распределения УБЛ без учёта «далёких хвостов» практически не меняются даже при значительном увеличении $U$ в случае

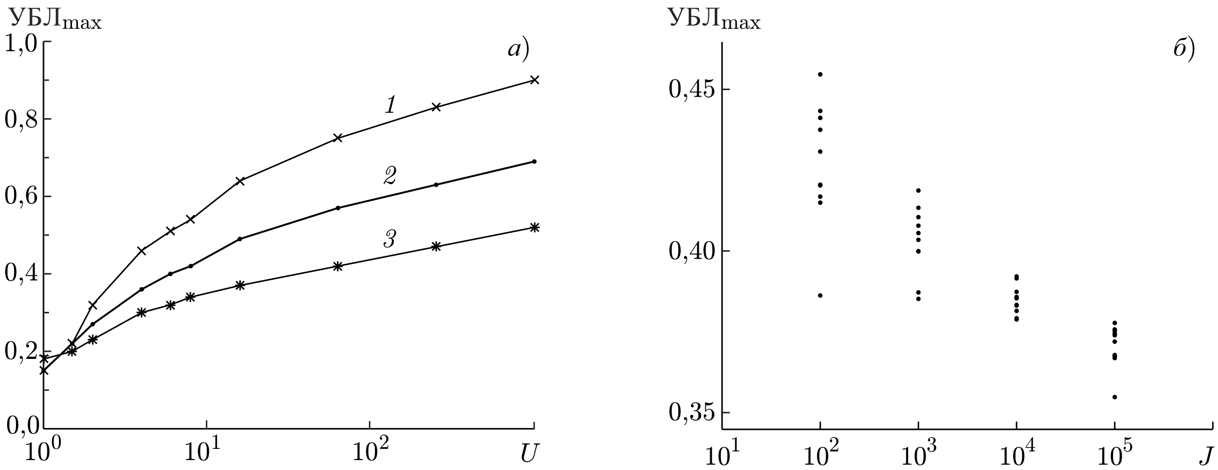


Рис. 2. Зависимости минимальных УБЛ$_{\max}$ для разных $N$ при объёме выборки $J = 10^6$ (*а*, кривая *1* соответствует $N = 8$, *2* — $N = 16$, *3* — $N = 32$) от $U$ и зависимость минимального УБЛ$_{\max}$ от объёма выборки $J$ для $N = 16$, $U = 4$ (*б*); для каждого $J$ вычисления повторялись 10 раз

$U > 10$. Эти распределения качественно схожи с рэлеевским распределением со средним значением, близким к $1/\sqrt{N}$ (см. (3)).

## 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНКИ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ

В качестве выхода системы обработки будем рассматривать случайный вектор $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_M)$, где $r_m = r(s_m)$, $s_1, \ldots, s_M$ — дискретная сетка значений неизвестного параметра. Вначале рассмотрим сценарий, в котором либо отсутствует (гипотеза $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0$), либо присутствует (гипотеза $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1$) заведомо один источник и вектор $\mathbf{r}$ характеризуется многомерными плотностями распределения вероятности $W^{(0)}(\mathbf{r})$ или $W^{(1)}(\mathbf{r})$ соответственно.

Определим вначале вероятностные характеристики обнаружения (различения гипотез $\mathrm{H}_0$ и $\mathrm{H}_1$) в рамках стратегии Неймана—Пирсона, задавая порог $\tau$ по заданной вероятности ложной тревоги. Пусть $S \in [-1, 1]$ — полный интервал изменения параметра $s$. Тогда вероятность ложной тревоги $p_{\mathrm{FA}}$ для порога $\tau$ определяется как

$$p_{\mathrm{FA}} = 1 - P[e_\tau], \qquad e_\tau = \bigcap_{s_m \in S} (r_m < \tau), \qquad \mathrm{H} = \mathrm{H}_0, \tag{4}$$

где $m = 1, \ldots, M$, $P[e]$ — вероятность события $e$, $\bigcap_m e_m$ — пересечение событий $e_m$. Соответственно, принимается гипотеза $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1$, если $\max\limits_{s \in S} r(s) > \tau$, и $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0$ в противном случае. В отличие от расчёта вероятности ложной тревоги при известном значении параметра, для вычисления вероятности (4) требуется знать многомерное распределение $W^{(0)}(\mathbf{r})$ и интеграл от него по области, ограниченной гиперплоскостями. При этом необходимо учитывать, что при достаточно мелком шаге сетки случайные переменные $r_m$ могут иметь высокую степень корреляции. Как правило, точные аналитические выражения здесь получить не удаётся. Однако можно использовать асимптотические формулы для вероятности пересечения случайным процессом достаточно высоких уровней [17–20]; методика их применения в задачах обнаружения изложена, в частности, в работах [11, 12, 21, 22]. Несколько иной подход, основанный на вычислении эффективного числа независимых кластеров в совокупности $\{r_m\}$, был развит в работах, посвящённых обнаружению гравитационных волн [23, 24].

Расчёт вероятности обнаружения для найденного порога представляет более простую задачу. Пусть $s_0$ — точное значение параметра $s$. Определим интервал $S_0 = [s_0 - \Delta_s, s_0 + \Delta_s]$ и $\bar{S}_0$ — интервал, комплементарный к $S_0$: $S_0 \cup \bar{S}_0 = S$; в качестве ширины интервала $S_0$ в дальнейшем будем брать ширину главного лепестка диаграммы направленности $2/(NU)$. Будем считать, что истинная координата источника $s_0$ с достаточной для практических приложений точностью совпадает с одним из узлов сетки. Тогда вероятность обнаружения $p_{\rm D}$ можно приближённо найти в виде [4]

$$p_{\rm D} = P\big[\max_{s_m \in S_0} \{r_m\} > \tau\big] \simeq P[r_0 > \tau], \qquad {\rm H} = {\rm H}_1, \tag{5}$$

где $r_0 = r(s_0)$. Вместо вероятности обнаружения также будем использовать вероятность пропуска цели $\bar{p}_{\rm D} = 1 - p_{\rm D}$.

Оценка максимального правдоподобия $\hat{s}$ неизвестного параметра $s$ находится следующим образом (см. [11, 12]):

$$\hat{s} : r(\hat{s}) = \max_{s \in S} r(s). \tag{6}$$

Аналогичное правило используется и в других алгоритмах (MUSIC и т. д.). При достаточно высоком ОСШ дисперсия отклонения оценки $\hat{s}$ от точного значения для многих алгоритмов обработки близка к границе Крамера—Рао (см., например, [25]). При снижении ОСШ, начиная с некоторого порогового значения, дисперсия резко возрастает по сравнению с границей Крамера—Рао; этот эффект продемонстрирован во многих работах (см., например, [9, 25]). Он связан с наличием у функции $r(s)$ большого числа локальных максимумов: при малом ОСШ локальный максимум в произвольной точке интервала перебора параметра $s$ может случайно оказаться больше глобального максимума, находящегося вблизи точного значения параметра. Был получен ряд усовершенствованных дисперсионных границ, которые описывают пороговый эффект (например, граница Зива—Закаи [26, 27]). Такое описание, однако, является скорее качественным. Здесь необходимо отметить, что учёт порогового эффекта при анализе точности оценки вообще не вполне корректен. При малом ОСШ вероятность обнаружения становится ниже приемлемых для практики значений и тогда само понятие «точность оценки» теряет смысл. Очевидно, что и вероятность обнаружения для заданной вероятности ложной тревоги, и вероятность сильного отклонения оценки должны каким-то образом сопоставляться. Вероятность сильного отклонения в своё время получила название вероятности аномальной ошибки [28]; примеры её расчёта для нормального распределения $\mathbf{r}$ можно найти в работах в [11, 12]. Очевидно, что для разреженных антенных решёток с высоким УБЛ вероятность аномальной ошибки может быть значительной и её учёт необходим при анализе характеристик приёмной системы.

Определим вероятность аномальной ошибки $p_{\rm A}$ следующим образом:

$$p_{\rm A} = 1 - P[e_r], \qquad e_r = \bigcap_{s_m \in \bar{S}} (r_m < r_0), \qquad {\rm H} = {\rm H}_1. \tag{7}$$

Здесь, так же, как и в выражении (5), игнорируется различие между $\max\limits_{s_m \in S_0} r_m$ и $r_0$.

Использование двух вероятностей, $\bar{p}_{\rm D}$ и $p_{\rm A}$ для описания возможностей приёмной системы не вполне удобно. С точки зрения практики как необнаружение источника, так и аномально высокая погрешность оценки его координаты одинаково свидетельствуют о неудаче в работе системы. Поэтому можно ввести общую характеристику, которую назовём вероятностью обнаружения и оценки $p_{\rm DE}$

$$p_{\rm DE} = P[(r_0 > \tau) \cap e_r]. \tag{8}$$

[4] Как показано в работе [23], переход от многомерной к одномерной функции распределения в формуле (5) не приводит к существенному изменению вероятности обнаружения.

Таким образом, по заданной вероятности ложной тревоги с помощью выражения (4) находится порог, для которого согласно (8) строится зависимость вероятности обнаружения и оценки, например от ОСШ, и находится минимальный ОСШ, для которого вероятность достигает приемлемых значений.

Ситуация усложняется для сценария, в котором могут обнаруживаться несколько источников. Ограничимся случаем, когда число этих источников $K_{\mathrm{s}}$ известно. Будем также считать, что оценкой координаты источника $\hat{s}_k$ является положение $s_k^{\max}$ одного из наибольших локальных максимумов $r(s)$, превышающих порог $\tau$, определяемый согласно (4) для заданной вероятности ложной тревоги. В этом случае правильное обнаружение и корректная оценка параметров будет иметь место при выполнении следующих условий:

$$r(s_k^{(\max)}) > \tau, \qquad k = 1, \ldots, K; \qquad K = K_{\mathrm{s}}, \tag{9}$$

$$s_k^{(\max)} \in [s_{0,k} - \Delta s_k, s_{0,k} + \Delta s_k], \qquad k = 1, \ldots, K_{\mathrm{s}}. \tag{10}$$

Здесь $s_{0,k}$ — истинные координаты источников. Соответственно вероятность обнаружения и оценки будет вероятностью одновременного выполнения условий (9) и (10).

Таким образом, для количественного описания вероятности обнаружения и точности оценки при заданной вероятности ложной тревоги предлагается использовать новую характеристику: вероятность обнаружения и оценки и, соответственно, дисперсию оценки параметра, при расчёте которой должны игнорироваться аномальные ошибки в оценке параметра. Соответствующие количественные характеристики будут приведены в двух последующих разделах для случая пеленгации одного тонального источника (раздел 3) и нескольких узкополосных источников шума при использовании процедур Бартлетта и MUSIC (раздел 4).

## 3. ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ПЕЛЕНГА ОДИНОЧНОГО ТОНАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

Будем считать, что сигналы на элементах решётки $\chi_n$ представляют собой суммы отсчётов поля падающей плоской волны с амплитудой $A$ и синусом угла прихода $s_0$ и фонового шума $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$:

$$\chi_n = A \exp(-i\kappa d_n s_0) + \zeta_n, \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

где $d_n$ — координата $n$-го элемента решётки, $\kappa$ — волновое число. Векторы-столбцы $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_N)^{\mathrm{T}}$ будем считать независимыми и распределёнными по нормальному закону с нулевым средним и матрицей корреляции $\sigma^2 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, индекс T обозначает транспонирование. Для рассматриваемой модели входного сигнала вычисление отношения правдоподобия сводится к согласованной обработке — вычислению угловой зависимости $z(s)$,

$$z(s) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \chi_n \exp(i\kappa d_n s) = A f(s - s_0) + \Delta z(s). \tag{12}$$

Здесь $f(s)$ — диаграмма направленности антенной решётки, принимающая максимальное значение в точке $s = 0$ ($f(0) = 1$), $\Delta z(s)$ — угловая зависимость фоновой помехи, распределённая по нормальному закону с нулевым средним и функцией корреляции

$$E\{\Delta z(s_1) \Delta^* z(s_2)\} = 2\sigma_N^2 f(s_1 - s_2), \tag{13}$$

$\sigma_N^2 = \sigma^2/N$. Выходом процедуры обработки будем считать величину $r(s) = |z(s)|$ .

Будем далее считать, что $r(s)$ вычисляется на сетке дискретных значений синуса пеленга $s_1, \ldots, s_M$ с достаточно малым шагом. Каждая из величин $r_m = r(s_m)$ имеет распределение Райса [5] [8]

$$r_m \in \begin{cases} \mathbb{R}(0, \sigma_N^2), & \mathrm{H} + \mathrm{H}_0; \\ \mathbb{R}(|Af(s_m - s_0)|, \sigma_N^2), & \mathrm{H} + \mathrm{H}_1. \end{cases} \tag{14}$$

Для известного пеленга вычисление вероятностей ложной тревоги и обнаружения не представляет трудностей, но при неизвестном пеленге для нахождения вероятности ложной тревоги в соответствии с (4) требуется многомерное распределение Райса. Его аналитическое представление достаточно сложно [28], поэтому в дальнейшем для оценки вероятностных характеристик будут использованы приближённые методы.

В качестве отправной точки получим вначале вероятностные характеристики для стандартной антенной решётки. Начнём с рассмотрения гипотетического случая, когда $s_m = s_0 \pm 2l/N$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. один отсчёт угловой зависимости попадает на источник, а остальные — в нули диаграммы направленности. В этом случае отсчёты $r_m$, $m = 1, \ldots, N$, оказываются статистически независимыми и

$$p_{\mathrm{FA}} = 1 - [1 - \exp(-T^2)]^N \approx N \exp(-T^2), \tag{15}$$

где

$$T = \frac{\tau}{\sigma} \sqrt{N/2} \tag{16}$$

— безразмерный порог, который легко находится из выражения (15) по заданной вероятности ложной тревоги. Приближение в правой части (15) справедливо для малых значений вероятности ложной тревоги $p_{\mathrm{FA}} \ll 1$, когда $N \exp(-T^2) \ll 1$ или $T \gg \sqrt{\ln N}$ (для практики обычно представляют интерес именно малые вероятности ложной тревоги).

Вероятность обнаружения находится с помощью первообразной распределения Райса (функции Маркума):

$$p_{\mathrm{D}} = 1 - 2 \exp(-R^2) \int\limits_0^T \exp(-u^2) I_0(2Ru) u \, \mathrm{d}u. \tag{17}$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя 0-го прядка, $R$ — ОСШ на выходе антенной решётки (с учётом выигрыша $10 \lg N$):

$$R = (|A|/\sigma) \sqrt{N/2} = 10^{\text{ОСШ[дБ]}/20}. \tag{18}$$

Введённые в разделе 2 вероятности $p_{\mathrm{A}}$ и $p_{\mathrm{DE}}$ определяются следующими интегралами:

$$p_{\mathrm{A}} = 1 - 2 \exp(-R^2) \int\limits_0^\infty [1 - \exp(-r^2)]^{N-1} \exp(-r^2) I_0(2Rr) r \, \mathrm{d}r, \tag{19}$$

$$p_{\mathrm{DE}} = 2 \exp(-R^2) \int\limits_T^\infty [1 - \exp(-r^2)]^{N-1} \exp(-r^2) I_0(2Rr) r \, \mathrm{d}r. \tag{20}$$

Численные оценки величин $\bar{p}_{\mathrm{D}} = 1 - p_{\mathrm{D}}$, $p_{\mathrm{A}}$ и $\bar{p}_{\mathrm{DE}} = 1 - p_{\mathrm{DE}}$ в соответствии с формулами (17)–(20) для практически значимых значений вероятности ложной тревоги $p_{\mathrm{FA}} = 10^{-6} \div 10^{-3}$ и $N$

[5] Напомним, что распределение Райса $\mathbb{R}(a, \sigma^2)$ с параметрами $a$ и $\sigma^2$ есть распределение модуля вектора $\sqrt{x^2 + y^2}$ из двух независимых случайных величин $x$ и $y$ с нормальными распределениями $\mathbb{N}(\alpha, \sigma^2)$ и $\mathbb{N}(\beta, \sigma^2)$, где $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. В случае $a = 0$ распределение Райса переходит в распределение Рэлея.

порядка нескольких десятков показали, что $\bar{p}_{\mathrm{D}}$ и $\bar{p}_{\mathrm{DE}}$ отличаются не более, чем в 4-м знаке, т. е. практически совпадают. Такое совпадение естественно, поскольку, как показывают расчёты, вероятности $p_{\mathrm{A}}$ на несколько порядков меньше вероятности $\bar{p}_{\mathrm{D}}$, так что аномальные ошибки практически не влияют на вероятность обнаружения и корректной оценки положения источника.

Приведённая выше схема позволяет получить простые оценки вероятностей, однако она не реалистична, т. к. на практике угловое распределение поля вычисляется с достаточно малым шагом по углу и отсчёты оказываются сильно коррелированными. Данная схема, естественно, не может быть использована для разреженной антенной решётки, диаграмма направленности которой вообще может не иметь нулей. Для того, чтобы избежать трудностей прямых вычислений, можно воспользоваться известной асимптотической теорией для подсчёта вероятности пересечения некоторого уровня случайным процессом (см., например, [11, 12]). Теория предполагает, что пересечения представляют собой пуассоновский поток с плотностью $\Pi$, которая приближённо оценивается по совместной плотности вероятности $W(r,r',s)$ процесса $r(s)$ и его производной $r'(s)$ на интервале $S$:

$$P[r(s)<\tau]=1-\exp(-\Pi)\approx\Pi,\qquad \Pi=\int\limits_{\Sigma}\left[\int\limits_0^{\infty}W_{r'r}(r',\tau,s)r'\,\mathrm{d}r'\right]\mathrm{d}s, \tag{21}$$

где $\Sigma=S$ при вычислении вероятности ложной тревоги ($\mathrm{H}=\mathrm{H}_0$) и $\Sigma=\bar{S}_0$ при нахождении вероятности обнаружения и оценки ($\mathrm{H}=\mathrm{H}_1$). Совместные плотности $W_{r'r}(r',r)$ находятся путём предельного перехода в двухточечных распределениях Рэлея и Райса соответственно (см. Приложение). Для вероятности ложной тревоги интегрирование в выражении (21) легко выполняется: $\Pi=\Pi_0$, где

$$\Pi_0=\sqrt{2F_0''/\pi}\,T\exp(-T^2), \tag{22}$$

$F_0''=-F''(0)$ — вторая производная диаграммы направленности по мощности $F(s)=|f(s)|^2$ в максимуме, взятая с обратным знаком:

$$F_0''=\frac{2\kappa^2}{N}\sum_{n=1}^{N}(d_n-\bar{d})^2=\frac{1}{6}\pi^2U^2N^2\beta_v^2,\qquad \beta_v^2=\frac{12}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(v_n-\bar{v})^2, \tag{23}$$

где $\bar{d}$ и $\bar{v}$ — средние арифметические последовательностей $d_n$ и $v_n$ соответственно. Отметим, что $\beta_v$ незначительно отличается от 1 (см. ниже).

В качестве примера на рис. 3*a* приведены зависимости вероятности ложной тревоги от безразмерного порога $T$ для разной степени разреженности решётки $U$. Зависимости строились численным стохастическим моделированием по $10^5$ реализациям шума для реализаций расположения элементов антенной решётки, отобранных по критерию минимума максимального бокового лепестка. Было показано, что различные конфигурации положений приёмных элементов антенной решётки практически не влияют на вероятность ложной тревоги (параметр $\beta_v$ отличался от 1 в третьем знаке). Тем самым, увеличение порога, при котором достигается заданная вероятность ложной тревоги, определяется только параметром $U$ (см. (23)).

На рис. 3*a* также приведены теоретические зависимости (22); видно, что по мере увеличения разреженности решётки асимптотика (22) совпадает с численной оценкой при уменьшающихся значениях вероятности ложной тревоги.

Вычисление вероятности аномальной ошибки и вероятности обнаружения и оценки представляет более серьёзные трудности. Используя процедуру (21) при $\mathrm{H}=\mathrm{H}_1$ и совместную плотность

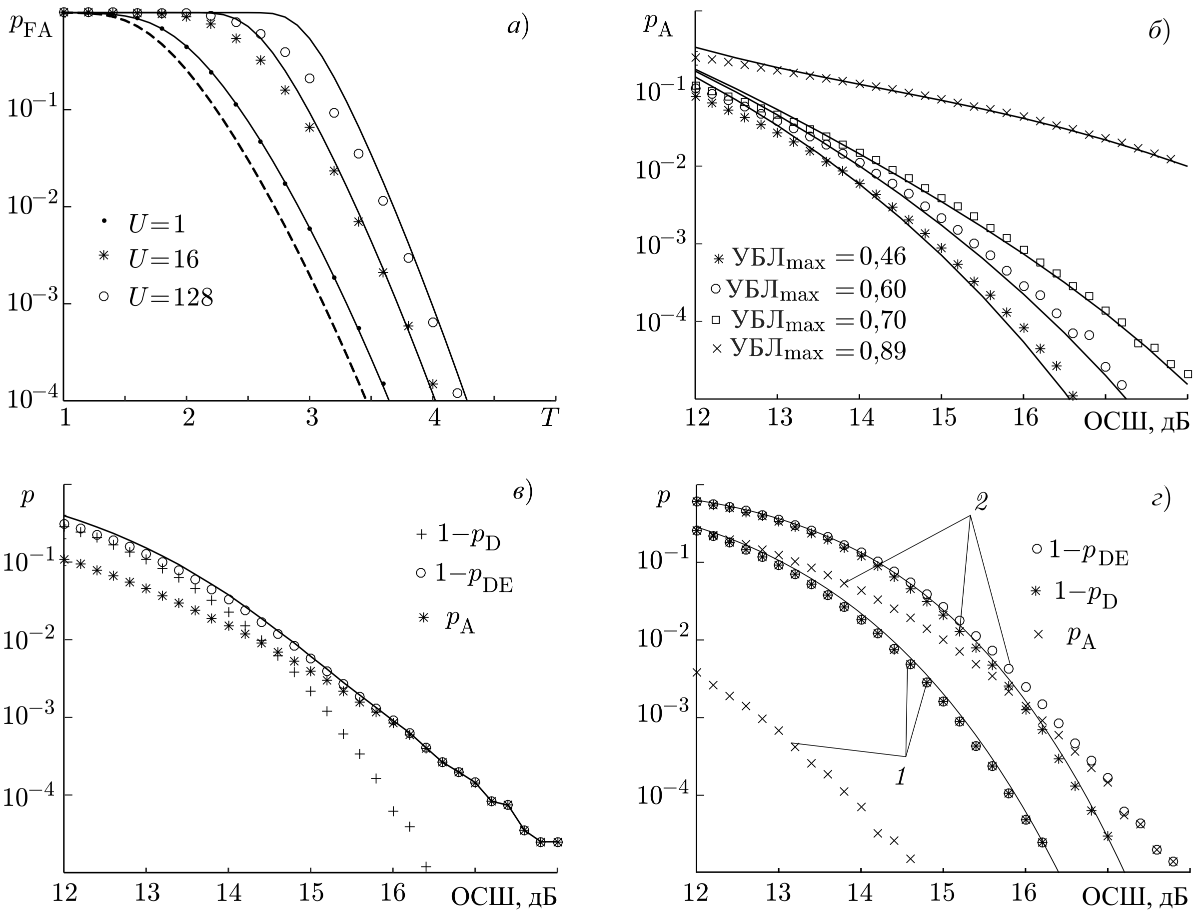


Рис. 3. Зависимости вероятности ложной тревоги от порога $T$ для нескольких $U$; штриховой линией показана вероятность (15) для независимых угловых каналов (*а*, $N = 16$, $J = 10^5$). Зависимости вероятности аномальной ошибки от ОСШ для разных УБЛ$_{\max}$ (*б*, $N = 16$, $U = 16$). Эмпирические зависимости вероятностей $\bar{p}_{\rm D}$, $\bar{p}_{\rm DE}$ и $p_{\rm A}$ от ОСШ для $U = 16$, УБЛ$_{\max} = 0{,}7$ (*в*, $p_{\rm FA} = 10^{-3}$, $N = 16$, $U = 16$) и для стандартной ($U = 1$, кривые *1*) и разреженной ($U = 128$, кривые *2*) решётки (*г*, $p_{\rm FA} = 10^{-4}$, $N = 16$). Символами показаны результаты моделирования, сплошные кривые — теоретические зависимости (22) (*а*), (24) (*б*) и сумма $\bar{p}_{\rm D} + p_{\rm A}$, хорошо совпадающая с $\bar{p}_{\rm DE}$ (*в*, *г*)

вероятности процесса Райса и его производной, приведённую в Приложении, можно приближённо найти вероятность $p_1(\tau) = P[\bigcap\limits_{s_m \in \bar{S}_0} (r_m < \tau)]$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1$ для некоторого порога $\tau$, в качестве которого должна быть взята случайная величина $r_0$. Очевидно, что $\bigcap\limits_{s_m \in \bar{S}_0} (r_m < \tau) \equiv r^{(\max)} < \tau$, где $r^{(\max)} = \max\limits_{s_m \in \bar{S}_0} \{r_m\}$, и, если случайные величины $r^{(\max)}$ и $r_0$ независимы, можно найти вероятность аномальной ошибки, используя $p_1(r_0)$ и одномерное распределение $W^{(1)}(r_0)$ (см. (14)). Численное моделирование, однако, показало, что $r^{(\max)}$ и $r_0$ имеют высокий коэффициент корреляции 0,5÷0,8, и для вычисления вероятности аномальной ошибки нужно знать совместное распределение $r^{(\max)}$ и $r_0$, которое достаточно трудно получить аналитически[6]. Поэтому для аналитического представления вероятности аномальной ошибки был предложен иной путь.

Двухточечное распределение Райса может быть представлено в достаточно простом аналити-

[6] В Приложении на примере совместного распределения двух гауссовых случайных величин $x$ и $y$ показано, как коэффициент корреляции влияет на вероятность выполнения неравенства $x > y$.

ческом виде, если одна из двух переменных — $r_0$ (см. Приложение). На основе этого представления может быть строго вычислена вероятность $P[r_m > r_0]$ для любого $r_m = r(s_m)$. Если эти вероятности малы, то приближённо вероятность одновременного выполнения нескольких неравенств может быть представлена их суммой при условии независимости событий, которые характеризуют неравенства. В случае стандартной эквидистантной решётки независимыми являются переменные с угловым расстоянием $s_{m_1} - s_{m_2} = 2l/N$, $l = \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. взятые в узлах сетки, приближённо совпадающих с положениями максимумов боковых лепестков. Можно предположить, что для неэквидистантной разреженной антенной решётки отсчёты, взятые в максимумах боковых лепестков, будут также слабо зависимыми. Тем самым, вероятность аномальной ошибки можно приближённо представить в виде

$$p_{\mathrm{A}} \approx \sum_l P[r(s_l^{(\max)} > r_0], \tag{24}$$

где $s_l^{(\max)}$ — угловое положение $l$-го бокового лепестка, и вероятности $P$ находятся в виде интегралов от двухточечного распределения Райса, приведённого в Приложении. Суммирование проводится по всем боковым лепесткам, для которых $s_l^{(\max)} \in \bar{S}_0$. На рис. 3*б* приведено несколько эмпирических зависимостей вероятности аномальной ошибки от ОСШ и аналитические оценки (24) для разреженной решётки ($N = 16$, $U = 16$) с разными значениями УБЛ$_{\max}$: 0,46 (минимальное значение в серии из $10^6$ реализаций), 0,89 (максимальное значение), 0,60 и 0,70. Как видно из рис. 3*б*, несмотря на известную грубость сделанных допущений, выражение (23) достаточно точно описывает вероятность аномальной ошибки. Отметим также определённую нелинейность возрастания вероятности аномальной ошибки с увеличением УБЛ$_{\max}$: вероятность возрастает достаточно равномерно при увеличении УБЛ$_{\max}$ от 0,5 до 0,7 и далее делает резкий скачок при приближении УБЛ$_{\max}$ к 0,9. Нелинейный характер зависимости вероятности аномальной ошибки от УБЛ продемонстрирован также в Приложении на рис. П2.

Трудности, отмеченные выше, характерны и для вычисления вероятности обнаружения и оценки. Проще всего данную вероятность найти с помощью совместного распределения $W(r^{(\max)}, r_0)$. Нетрудно показать, что

$$\bar{p}_{\mathrm{DE}} = \bar{p}_{\mathrm{D}} + p_{\mathrm{A}} - \int\limits_0^{\tau} \mathrm{d}r_0 \int\limits_{r_0}^{\infty} W(r^{(\max)}, r_0)\, \mathrm{d}r^{(\max)}. \tag{25}$$

Для независимых $r^{(\max)}$ и $r_0$ интеграл в (25) равен произведению $\bar{p}_{\mathrm{D}} p_{\mathrm{A}}$. Поскольку этот интеграл является положительной величиной, очевидно, что $\bar{p}_{\mathrm{DE}} \le \bar{p}_{\mathrm{D}} + p_{\mathrm{A}}$. В то же время для малых $\bar{p}_{\mathrm{D}}$ и $p_{\mathrm{A}}$ можно приближённо считать $\bar{p}_{\mathrm{DE}} \approx \bar{p}_{\mathrm{D}} + p_{\mathrm{A}}$. Это иллюстрируется на рис. 3*в*, *г*, где приведены эмпирические графики $\bar{p}_{\mathrm{D}}$, $\bar{p}_{\mathrm{DE}}$ и $p_{\mathrm{A}}$ для 16-элементной решётки с УБЛ 0,7 и $U = 16$ (*в*) и для двух вариантов 16-элементной решётки (стандартной и разреженной с $U = 128$, УБЛ$_{\max}$=0,53), иллюстрирующие формирование вероятности $\bar{p}_{\mathrm{DE}}$ из вероятностей $\bar{p}_{\mathrm{D}}$ и $p_{\mathrm{A}}$ (*г*); графики для $U = 1$ и $U = 128$ на рис. 3*г* легко разделяются визуально.

Отметим важный факт. Как видно из рис. 3*г*, для достижения того же значения $\bar{p}_{\mathrm{DE}} \sim 10^{-3}$, что и для стандартной решётки, для разреженной решётки с коэффициентом $U = 128$ требуется увеличение ОСШ всего на 1,5 дБ. Точность оценки пеленга при этом увеличивается почти на 2 порядка, как это следует из границы Крамера—Рао — нижней границы дисперсии оценки параметра $\sigma_{\mathrm{s}}^2$. Данная оценка для рассматриваемого в данном разделе сценария легко находится аналитически (см., например, [9]):

$$\frac{\sigma_s^2}{\Delta s} = \frac{\sqrt{3/2}}{\pi R \beta_v}\,, \tag{26}$$

где $\Delta s = 2/(NU)$ — угловое разрешение Рэлея, параметр $\beta_v$ определён в выражении (23) и близок к 1.

В качестве примера для $N = 16$ и $U = 16$ на рис. 4 приведена зависимость нормированного среднеквадратического отклонения (СКО) оценки синуса пеленга от ОСШ, полученная численным моделированием, и граница Крамера—Рао (26). Начальное значение ОСШ было выбрано так, чтобы вероятность $\bar{p}_{\rm D}$ находилась в диапазоне $10^{-2}\div10^{-1}$, что соответствует минимальным требованиям к вероятностным характеристикам обнаружения. При численном моделировании аномальные ошибки исключались за счёт сужения интервала поиска оценки, составлявшего $[-2/(NU), 2/(NU)]$ для $s_0 = 0$. Как видно из рис. 4, граница Крамера—Рао совпадает с численными оценками СКО с высокой точностью. Незначительное отклонение имеет место для ОСШ 14÷15 дБ. Расчёты показали, что при уменьшении ОСШ это отклонение увеличивается, однако такие низкие значения ОСШ уже соответствуют фактически плохой обнаружимости источника и не имеют практического смысла. Подчеркнём ещё раз, что, как следует из оценки (26), $\sigma_s \propto 1/U$, т. е. точность оценки пеленга возрастает пропорционально коэффициенту разреженности антенной решётки.

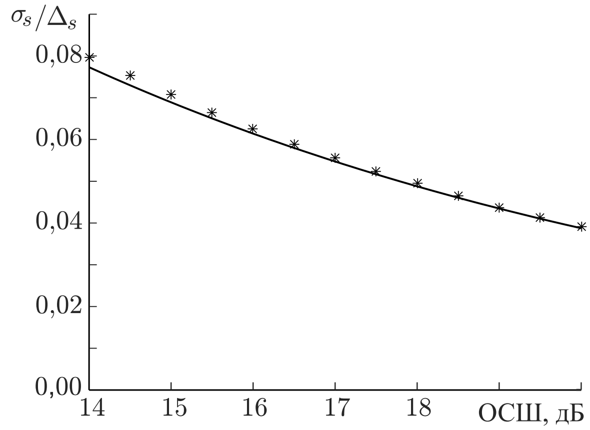


Рис. 4. Зависимость нормированного СКО оценки синуса пеленга от ОСШ; символами показаны СКО, полученные численным моделированием, сплошная линия — граница Крамера—Рао, $N = 16$, $U = 16$

## 4. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗРЕШЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Исследование разрешающей способности антенной решётки традиционно выполняется для модели сигнала, включающей фоновый шум и сигналы от нескольких источников со случайными статистически независимыми амплитудами в узкополосном приближении [25]. Соответственно, отчёты сигнала $\chi_{nj}$ на $n$-м элементе решётки в дискретный момент времени $j$ определяются как

$$\chi_{nj} = \sum_{k=1}^{K_{\rm s}} a_{k,j} \exp(i\kappa d_n s_{0,k}) + \varsigma_{nj}, \tag{27}$$

где $K_{\rm s}$ — число источников со случайными амплитудами $a_{k,j}$, $\varsigma_{nj}$ — фоновый шум. Как и в предыдущих разделах, случайные величины $\varsigma_{nj}$ распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсиями вещественной и мнимой частей $\sigma^2$ и независимы по $n$ и $j$ соответственно. Аналогично, величины $a_{kj}$ имеют нормальное распределение с нулевым средним, независимы по $k$ и $j$, и $E\{a_{kj}a_{kj}^*\} = q_{A,k} = 2\sigma_{A,k}^2$, $\sigma_{A,k}^2$ — дисперсия вещественной или мнимой части $a_{kj}$, $s_{0,k} = \sin\varphi_{0,k}$, $\varphi_{0,k}$ — пеленги источников, индекс * обозначает комплексное сопряжение. Далее будем рассматривать две процедуры обработки: алгоритм Бартлетта,

$$r(s) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{nj} \exp(-i\kappa d_n s) \right|^2, \tag{28}$$

и алгоритм MUSIC,

$$r^{(\mathrm{M})}(s) = P^{-1}(s), \qquad P(s) = 1 - \sum_{k=1}^{K_{\mathrm{s}}} |\mathbf{g}^{\dagger}\mathbf{u}_k|^2. \tag{29}$$

Здесь $\mathbf{g}$ — вектор-столбец с компонентами $g_n = N^{-1/2}\exp(i\kappa d_n s)$, $\mathbf{u}_k$ — собственные векторы эмпирической корреляционной матрицы $\mathbf{X}\mathbf{X}^{\dagger}/J$, где $\mathbf{X} = \{\chi_{nj}\}_{n=1,\ldots N;\, j=1,\ldots,J}$ — принятый сигнал (27), объединённый в матрицу размерностью $N \times J$, индекс † обозначает эрмитово сопряжение.

Сигнал $r$ на выходе процедуры Бартлетта имеет $\chi^2$-распределение с $2J$ степенями свободы, порождённое суммой независимых вещественных и мнимых слагаемых с одинаковыми дисперсиями

$$\sigma_{x,y}^2 = \frac{1}{2J}\left[\sum_{k=1}^{K_{\mathrm{s}}} q_{A,k} |f(s_{0,k} - s)|^2 + q_{\mathrm{N}}\right], \tag{30}$$

где $q_{\mathrm{N}} = 2\sigma^2/N$. При достаточно больши́х $J$ $\chi^2$-распределение аппроксимируется нормальным распределением:

$$r \in \mathbb{N}(2\sigma_{x,y}^2, 4\sigma_{x,y}^4/J). \tag{31}$$

Гауссова аппроксимация многомерного распределения $\mathbf{r} = (r(s_1), \ldots, r(s_M))$ для одного источника приведена в Приложении. Там же на основе двухточечного варианта распределения получена совместная плотность вероятности для $r(s)$ и производной $r'(s)$. Выполняя соответствующее интегрирование в выражении (20), получаем аналог (22):

$$\Pi_0 = \frac{\sqrt{F_0''}}{\pi}\exp(-T^2) = \sqrt{\frac{\beta_v}{6}}\, NU \exp(-T^2), \tag{32}$$

где $T = [\tau N/(2\sigma^2) - 1]\sqrt{J/2}$ — безразмерный порог. Численные оценки при этом показали, что достаточная для практики точность реализуется при $J > 10^3$: для меньших $J$ величина (32) должна строиться на основе двухточечного $\chi^2$-распределения.

Теоретические оценки вероятностных характеристик (вероятности ложной тревоги, вероятности обнаружения и т. д.) для процедуры Бартлетта представляют определённый практический интерес, однако в данном случае нас будут больше интересовать возможности разрешения близкорасположенных источников в случае разреженных антенных решёток. Для этих целей процедура Бартлетта не является оптимальной, и дальнейшие оценки будут выполняться для алгоритма MUSIC.

Для алгоритма MUSIC аналитическое представление распределения $r^{(\mathrm{M})}$, насколько нам известно, отсутствует. Зависимость вероятности ложной тревоги от порога $\tau$ может быть получена путём численного моделирования и достаточно хорошо аппроксимируется функцией $\theta_0 \exp(-\theta_1 \tau^{\alpha})$ с параметрами $\theta_0$ и $\theta_1$, $\alpha$, определяемыми из эмпирического распределения. На рис. 5 представлена серия зависимостей вероятности ложной тревоги от порога для решётки с числом элементов $N = 16$ в разных ситуациях: для точечного распределения в случаях $K_{\mathrm{s}} = 1$ и $K_{\mathrm{s}} = 3$, для частой (непрерывной) сетки значений аргумента, на которой рассчитывается $r^{(M)}(s)$, для стандартной решётки ($U = 1$) и далее для разреженной решётки с $U = 16$ и распределениями элементов, соответствующими значениям УБЛ$_{\max}$ 0,46 и 0,70; последние практически неразличимы.

Поскольку алгоритм MUSIC, строго говоря, не является оптимальным алгоритмом, в случае одного источника проводилось сопоставление вероятности обнаружения при одинаковой вероятности ложной тревоги для алгоритма Бартлетта и MUSIC с $K_{\mathrm{s}} = 1$. Было показано, что для того, чтобы получилась одинаковая одинаковая вероятность обнаружения, для алгоритма MUSIC ОСШ должно быть больше примерно на 1 дБ.

Перейдём теперь к анализу возможности разрешения близкорасположенных источников. Будем рассматривать сценарий с тремя источниками с координатами

$$s_{0,1} = 0{,}5; \qquad s_{0,2} = 0; \qquad s_{0,3} = s_{0,2} + 2\alpha_{\rm r}/(NU),$$

где параметр $\alpha_{\rm r} \le 1$ характеризует «сверхразрешение». При $\alpha_{\rm r} = 1$ расстояние между источниками 2 и 3 соответствует разрешению Рэлея, а в случае $\alpha_{\rm r} < 1$ при разделении источников будет иметь место эффект «сверхразрешения». ОСШ при этом определялось как

$$R^2 = (q_A/q_{\rm N})\sqrt{J/2} = 10^{\text{ОСШ[дБ]}/10}. \qquad (33)$$

Его конкретное значение задавалось по интенсивности 3-го, наиболее слабого, источника. Интенсивность 2-го источника бралась больше на 1 дБ, а 1-го — на 20 дБ.

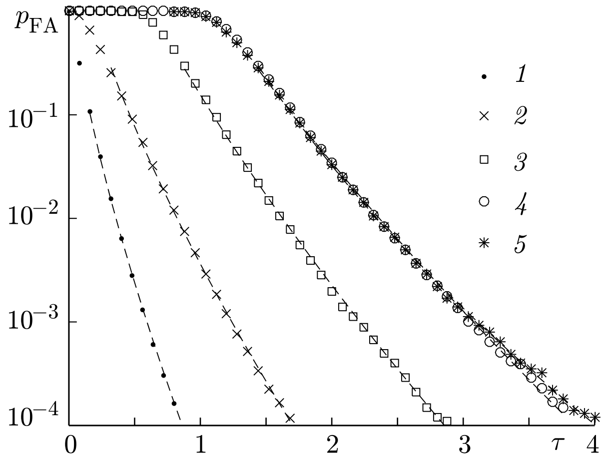


Рис. 5. Зависимости вероятности ложной тревоги от порога $\tau$ для алгоритма MUSIC в различных ситуациях: для точечного распределения $r^{(\rm M)}$ в случае одного (кривая *1*) и трёх (*2*) источников и для частой сетки значений аргумента для трёх источников в случае стандартной ($U = 1$, кривая *3*) и разреженной решётки ($U = 16$) с $\text{УБЛ}_{\max} = 0{,}46$ (*4*) и $\text{УБЛ}_{\max} = 0{,}70$ (*5*)

На рис. 6*а* показаны зависимости $\bar{p}_{\rm DE}$ от ОСШ для стандартной антенной решётки и разных $\alpha_{\rm r}$. Как видно из рисунка, сверхразрешение требует существенного увеличения ОСШ. Например, для повышения разрешения примерно на 60 % ОСШ должно увеличиться на 8 дБ. На рис. 6*б* показаны зависимости $\bar{p}_{\rm DE}$ от ОСШ для разреженных решёток с разными $U$ и $\text{УБЛ}_{\max}$ (для сравнения там же приведена $\bar{p}_{\rm DE}$ для стандартной решётки). Расстояние между близкими источниками взято равным разрешению Рэлея $2/(NU)$. Из графика, в частности, следует, что увеличение разреженности решётки на два порядка (и соответствующее повышение разрешающей способности) требует повышения ОСШ всего на 1,4 дБ (брался уровень $\bar{p}_{\rm DE} = 10^{-3}$). Таким

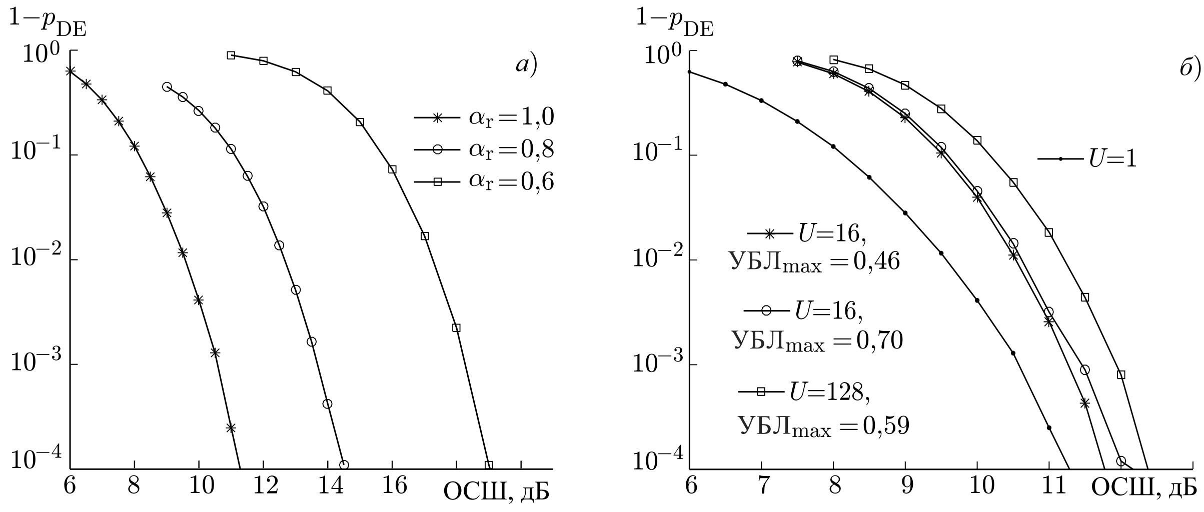


Рис. 6. Зависимости $\bar{p}_{\rm DE}$ от ОСШ для стандартной решётки с $U = 1$ для разных коэффициентов сверхнаправленности $\alpha_{\rm r}$ (*а*) и для разреженной решётки с различными $U$ и $\text{УБЛ}_{\max}$ при $\alpha_{\rm r} = 1$ (*б*), $p_{\rm FA} = 10^{-3}$, $N = 16$

образом, продемонстрировано весьма умеренное требование к росту ОСШ при существенном увеличении разреженности и повышении разрешающей способности, как и в случае тонального источника.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что неэквидистантные сильно разреженные антенные решётки могут весьма эффективно использоваться как для пеленгации отдельных источников с высокой точностью, так и для разрешения близкорасположенных источников. При этом для повышения разрешающей способности на два порядка и более требуется весьма умеренное повышение ОСШ на 1–2 дБ. Показано также, что уровни боковых лепестков (в частности, максимальный из этих уровней) не слишком сильно влияют на характеристики обнаружения и пеленгации (по крайней мере до уровней, меньших 0,7 по амплитуде). Для анализа возможностей разреженных антенных решёток с высоким уровнем боковых лепестков была разработана специальная характеристика — вероятность обнаружения и корректной оценки параметров при заданной вероятности ложной тревоги, которая, в отличие от обычно применяемой вероятности обнаружения, позволяет учесть вероятность так называемой аномальной ошибки, возникающей при случайном превышении боковым лепестком уровня главного лепестка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–42–02390) и в рамках госзадания по теме 0035–2014–0010 «Разработка физических основ акустических систем нового поколения».

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Двухточечные плотности распределения вероятностей процессов и их первых производных. Вероятности выполнения неравенств для двух случайных величин

### П1. Распределения Рэлея и Райса

Совместные распределения для случайных процессов Рэлея и Райса и их первых производных могут быть получены из соответствующих двухточечных плотностей распределения вероятности путём простого предельного перехода. Двухточечные распределения Рэлея и Райса достаточно часто фигурируют в литературе (см., например, [26–28]). Они строятся в общем случае как маргинальные распределения для порождающего нормального распределения двух комплексных случайных величин $z_1 = z(s_1)$ и $z_2 = z(s_2)$, т. е. нормального распределения случайного вектора $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2)^{\mathrm{T}}$, где $x_j = \mathrm{Re}\{z_j\}$ и $y_j = \mathrm{Im}\{z_j\}$, $j = 1, 2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{N}(\mathbf{a}, \mathbf{C})$, $\mathbf{a}$ — среднее, $\mathbf{C}$ — матрица корреляции. Конкретный вид двухточечных распределений, однако, существенно зависит от предположений относительно вида вектора $\mathbf{a}$ и матрицы $\mathbf{C}$ (в случае рэлеевского процесса $\mathbf{a} = 0$). Ниже приводится вывод двухточечных распределений в случае порождающего нормального процесса (12), представляющего собой комплексную угловую зависимость поля $z(s)$ на выходе сканирующей $N$-элементной антенной решётки (см. раздел 2). В этом случае $\mathbf{C}$ является блочной матрицей

$$\mathbf{C} = \sigma_N^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Psi}, \\ \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} f_{\mathrm{r}} & f_{\mathrm{i}} \\ -f_{\mathrm{i}} & f_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}, \tag{П1}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица с размерностью $2 \times 2$, $\sigma_N^2 = \sigma^2/N$, $f_\mathrm{r} = \mathrm{Re}\{f(s_2 - s_1)\}$, $f_\mathrm{i} = \mathrm{Im}\{f(s_2 - s_1)\}$, $f(s)$ — комплексная диаграмма направленности решётки (1). Нетрудно показать, что $\det \mathbf{C} = (1 - F_{21})^2$ и

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{(1 - F_{21})\,\sigma_N^2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{\Psi}, \\ -\mathbf{\Psi}^\mathrm{T} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{П2}$$

где $F_{21} = |f(s_2 - s_1)|^2$. При наличии источника $\mathbf{a} = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)^\mathrm{T}$, где $\alpha_j = \mathrm{Re}\{Af(s_j - s_1)\}$, $\beta_j = \mathrm{Im}\{Af(s_j - s_1)\}$, $j = 1, 2$; при отсутствии источника $\mathbf{a} = 0$.

Проводя замену переменных $x_j = r_j \cos\varphi_j$, $y_j = r_j \sin\varphi_j$, $j = 1, 2$, и интегрируя нормальное распределение по $\varphi_1$ и $\varphi_2$, в случае $\mathbf{a} = 0$ получаем двухточечное распределение Рэлея $W_{r_1 r_2}$:

$$W_{r_1 r_2}(r_1, r_2) = \frac{1}{(1 - F_{21})\,\sigma_N^4} \exp\left[-\frac{r_1^2 + r_2^2}{2\,(1 - F_{21})\,\sigma_N^2}\right] I_0\left[\frac{r_1 r_2 \sqrt{F_{21}}}{(1 - F_{21})\,\sigma_N^2}\right] r_1 r_2. \tag{П3}$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя 0-го порядка; выражение (П3) совпадает с приведённым в работе [30]. Для получения совместного распределения $r(s)$ и первой производной $r'(s)$ положим $s_1 = s$, $s_2 = s + \Delta_s$, $r_1 = r$, $r_2 = s + r'\Delta_s$, выполним в (П3) замену переменных и перейдём к пределу $W_{r_1 r_2}(r, r', s) = \lim_{\Delta_s \to 0} W_{r_1 r_2}(r, r + \Delta_s r', s, s + \Delta_s)$, используя приближение $F_{21} \approx 1 + \Delta_s^2 F''(0)/2$ и явный вид асимптотики $I_0(x) = (2\pi x)^{-1/2} \exp(x)\,[1 + o(x^{-1})]$ для бóльших значений аргумента [33]. После выполнения предельного перехода получаем, что $W_{rr'}$ распадается на произведение нормальной плотности распределения $r'$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma_N^2 F_0''/2$, где $F(s) = |f(s)|^2$, $F_0'' = -F''(0)$, и распределения Рэлея переменной $r$ с параметром $\sigma_N^2$:

$$W_{rr'}(r', r) = \frac{r}{\sigma_N^3 \sqrt{\pi F_0''}} \exp\left[-\frac{r'^2}{\sigma_N^2 F_0''} - \frac{r^2}{2\sigma_N^2}\right]. \tag{П4}$$

Двухточечное распределение Райса получается аналогично, но имеет более громоздкий вид:

$$W_{r_1 r_2}(r_1, r_2, s_1, s_2) = \\ = \frac{r_1 r_2}{2\pi\,(1 - F_{21})\,\sigma_N^2} \exp\left[-\frac{r_1^2 + r_2^2 + q^2}{2\,(1 - F_{21})\,\sigma_N^2}\right] \int\limits_0^{2\pi} I_0\left[\frac{r_1 \rho}{(1 - F_{21})\,\sigma_N^2}\right] \exp\left[r_2 \frac{P\cos\varphi + Q\sin\varphi}{(1 - F_{21})\,\sigma_N^2}\right] \mathrm{d}\varphi, \tag{П5}$$

где

$$q^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 - 2\mathrm{Re}\{f_2 f_1^* f^*(s_2 - s_1)\}, \qquad f_j = Af(s_j - s_0), \qquad j = 1, 2,$$

$$\rho = \{F_{21} r_2^2 - 2r_2\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi) + q^2 + (1 - F_{21})\,[-|f_2|^2 + 2r_2\,(\alpha_2\cos\varphi + \beta_2\sin\varphi)]\}^{1/2},$$

$$P = \alpha_2 - f_\mathrm{r}\alpha_1 + f_\mathrm{i}\beta_1, \qquad Q = \beta_2 - f_\mathrm{r}\beta_1 + f_\mathrm{i}\alpha_1.$$

Двухточечное распределение (П5) имеет достаточно большое сходство с приведённым, например, в работах [31, 32], однако отличается от него в деталях, что связано с более общей моделью порождающего нормального распределения, в частности с отличием структуры среднего вектора $\mathbf{a}$. Это двухточечное распределение сильно упрощается, когда одна из случайных переменных берётся в точке $s_0$: $r_0 = r(s_0)$. Тогда после определённых преобразований получаем

$$W_{rr_0} = \frac{1}{1 - F} \exp\left[-\frac{A^2}{2\,(1 - F)\,\sigma_N^2} - \frac{r^2 + r_0^2}{2\,(1 - F)\,\sigma_N^2}\right] I_0\left[\frac{rr_0\sqrt{F}}{(1 - F)\,\sigma_N^2}\right] I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma_N^2}\right) \frac{rr_0}{\sigma_N^4}, \tag{П6}$$

где $r = r(s)$, $F(s) = |f(s)|^2$.

## П2. Аппроксимирующее нормальное распределение

Многомерное нормальное распределение, аппроксимирующее плотность распределения вероятности случайных величин $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_M)$ (31) при больши́х $J$, легко может быть получено путём вычисления первого и второго момента величины (31). Для одного источника после несложных преобразований имеем

$$W_r(\mathbf{r}) \approx \mathbb{N}(\mathbf{a}, \mathbf{C}),$$

где

$$a_m = q_A\,|f_m|^2 + q_N, \qquad C_{ml} = J^{-1}\,|q_A f_m f_l^* + q_N f_{ml}|^2, \tag{П7}$$

$f_m = f(s_m - s_0)$, $f_{ml} = f(s_m - s_l)$. При отсутствии источника (H = H$_0$) $q_A = 0$ и из двухточечного распределения (П7) путём предельного перехода получаем

$$W_{rr'}(r', r) = \frac{1}{2\pi\sigma_j^2\sqrt{F_0''}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}[(r - q_N)^2 + r'^2/F_0'']\right\}. \tag{П8}$$

## П3. Вероятности выполнения неравенств случайных величин

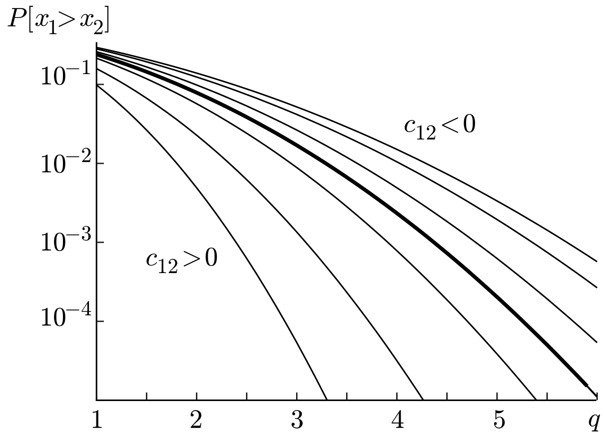


Рис. П1. Серия зависимостей $p_{12}(q)$ для разных значений коэффициента корреляции в интервале $-0{,}7 \le c_{12} \le 0{,}7$ при $\eta = 1$; толстой линией показана кривая с $c_{12} = 0$. Положительные значения $c_{12}$ соответствуют более быстрому убыванию вероятности

При расчётах вероятности аномальной ошибки и вероятности обнаружения и оценки важную роль играют вероятности выполнения неравенств типа $P[x_1 > x_2]$, где $x_1, x_2$ — случайные величины с совместной плотностью распределения $W(x_1, x_2)$, фактически представляющие собой вероятность аномальной ошибки для двухточечного распределения:

$$P[x_1 > x_2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \int\limits_{x_2}^{\infty} W(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1. \tag{П9}$$

Особенности такой вероятности проиллюстрируем на примере двумерного нормального распределения $W_r(\mathbf{r}) \in \mathbb{N}(\mathbf{a}, \mathbf{C})$ со средним $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и матрицей корреляции

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 c_{12} \\ \sigma_1\sigma_2 c_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ — дисперсии, $-1 < c_{12} < 1$ — коэффициент корреляции. В этом случае

$$p_{12} = P[x_1 > x_2] = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{erfc}(\gamma u)\exp[-(u - u_0)^2/2]\,\mathrm{d}u, \tag{П10}$$

где $\gamma = (\eta - c_{12})/\sqrt{2\,(1 - c_{12})^2}$, $u_0 = q/(\eta - c_{12})$ и $\eta = \sigma_2/\sigma_1$, $q = (a_2 - a_1)/\sigma_1$. На рис. П1 приведена серия графиков, иллюстрирующих зависимость $p_{12}$ от $q$, в данном случае представляющего ОСШ, при разных коэффициентах корреляции $c_{12}$ для $\eta = 1$. Как видно из рисунка, скорость убывания вероятности с ростом ОСШ монотонно растёт при изменении корреляции от

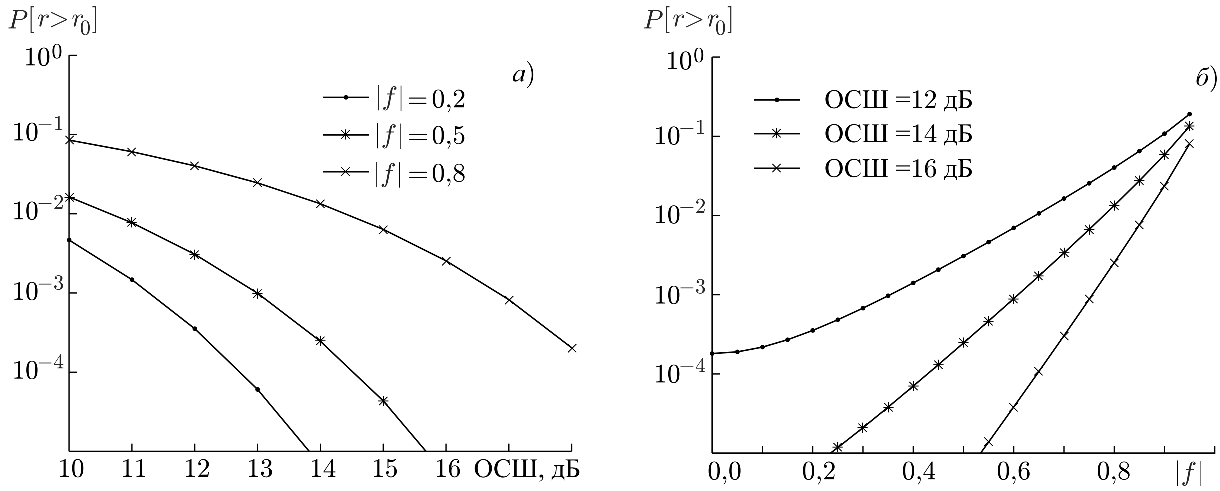


Рис. П2. Зависимости вероятности $P[r > r_0]$ от ОСШ для разных $|f|$ (*а*) и от $|f| = \sqrt{F}$ для разных ОСШ (*б*)

отрицательных значений к положительным, причём при положительных значениях корреляции зависимость меняется достаточно сильно.

С помощью выражения (П9) могут быть получены вероятности выполнения неравенств $p_{rr_0} = P[r < r_0]$ и $p_{r_0r} = P[r > r_0] = 1 - p_{rr_0}$ для распределения (П6). Эти вероятности зависят только от двух параметров: $F$ и ОСШ, определяемого величиной $R = (A/\sigma)\sqrt{N/2}$. В качестве примера на рис. П2 приведены такие зависимости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Leahy R. M., Jeffs B. D. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1991. V. 39, No. 8. P. 1 178.
2. Bucci O. M., D'Urso M., Isernia T., et al. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 2010. V. 58, No. 6. P. 1 949.
3. Lin Ch., Qing An., Feng Q. // Intern. J. Communication Networks and Information Security. 2009. V. 1, No. 1. P. 20.
4. Hong T., Song M.-Z., Sun X.-Y. // Progress in Electromagnetics Res. 2009. V. 98. P. 119.
5. Oraizi H., Fallahpour M. // Progress in Electromagnetics Res. M. 2008. V. 4. P. 185.
6. Sandi E., Zulkifli F. Y., Rahardjo E. T. // Advan. Electromagnetic. 2016. V. 5, No. 3. P. 73.
7. Содин Л. Г. // Радиофизика и радиоастрономия. 2005. Т. 10. С. S 128.
8. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
9. Kay S. M. Fundamentals of statistical signal processing. V. I: Estimation theory. Upper Saddle River. New Jork: Pentice Hall, 1993. 595 p.
10. Kay S. M. Fundamentals of statistical signal processing, V. II: Detection theory. Upper Saddle River, New Jork: Pentice Hall, 1998. 672 p.
11. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
12. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
13. Moustakides G. V., Jajamovich G. H., Tajer A., Xiaodong Wang X. // IEEE Trans. Information Theory. 2012. V. 58, No. 7. P. 4 215.
14. Baygun B., Hero A. O. // IEEE Trans. Information Theory. 1995. V. 41, No. 3. P. 688.

15. Wunderlich A., Goossens B., Abbey C. K. // IEEE Trans. Med Imaging. 2016. V. 35, No. 9. P. 2 164.
16. Reinhard D., Fau M., Zoubir A. M. // Proc. 24th European Signal Proc. Conf. (EU-SIPCO), 28 August–2 September 2016, Budapest, Hungary. P. 2 201.
17. Тихонов В. И. Теория выбросов случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.
18. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988. 175 с.
19. Кремена Е. В., Питербарг В. И., Хюслер Ю. // Теория вероятн. и её применение. 2015. Т. 60. С. 613.
20. Yura H. T., Hanson S .G. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2010. V. 27, No. 4. P. 797.
21. Трифонов А. П., Захаров А. В. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 10. С. 1 226.
22. Захаров А. В. // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 34.
23. Jaranovski P., Królak A. // Living Rev. Relativity. 2012. V. 15, No. 2. P. 1.
24. Prix R. // Phys. Rev. D. 2007. V. 75, No. 2. Art. no. 023004.
25. van Trees H. L. Optimum array processing: Part IV of detection, estimation and modulation theory. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 1 443 p.
26. Bell K. L., Ephraim Y., Van Trees H. L. // IEEE Trans. Signal Proc. 1996. V. 44, No. 11. P. 2 810.
27. Bell K. L., Steinberg Y., Ephraim Y., van Trees H. L. // IEEE Trans. Information Theory. 1997. V. 43, No. 2. P. 624.
28. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигналов. М.: Сов. радио, 1970. 336 с.
29. Bilodeau M., Brenner D. Theory of multivariate statistics. New York: Springer-Verlag, 1999. 288 p.
30. Simon M. K., Alouini M.-S. // IEEE Communications Lett. 1998. V. 2, No. 5. P. 128.
31. Zogas D. A., Karagiannidis G. K. // IEEE Trans. Communications. 2005. V. 53, No. 11. P. 1 790.
32. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
33. Beaulieu N. C., Hemachandra K. T. // IEEE Trans. Communications. 2011. V. 59, No. 11. P. 2 951.

Поступила в редакцию 15 января 2018 г.; принята в печать 26 февраля 2018 г.

## SOURCE DETECTION AND BEARING ESTIMATION WITH THE USE OF SPARSE ANTENNA ARRAYS

*V. I. Turchin* and *A. A. Rodionov*

The capabilities of unequally spaced sparse linear antenna arrays for solving the source detection and parameter estimation problems are studied. A novel detection and estimation probability (DEP) characteristic for a qualitative description of the capabilities of a sparce antanna array is proposed and a techniqie for its computation is given. The problem of finding the maximum length of a sparse array with a fixed number $N$ of elements, for which the acceptable characteristics of the signal source detection are preserved, is considered. It is shown that the DEP with a slight increase in the signal-to-noise ratio (SNR) remains the same as for the standard $N$-element antenna array with a half wavelength spacing, but the accuracy of bearing estimation increases proportionally to the size of the array. For example, the DEP is retained when the array length is increased more than one hundred times and the SNR is increased by 1–2 dB.