

УДК 530.145.85

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КВАНТОВОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ

*А. М. Федотов**, *А. А. Миронов*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
г. Москва, Россия

Предложен простой метод оценки вероятностей элементарных процессов квантовой электродинамики в сильном поле. Показано, что квантовоэлектродинамические процессы протекают в квазиклассическом или квантовом режиме в зависимости от соотношения характерных масштабов времени ускорения частиц полем (квазиклассический эффект) и поглощения энергии заряженными частицами из поля непосредственно во время процесса (чисто квантовый эффект). С помощью простых кинематических соображений и соотношения неопределённостей в этих режимах удаётся с точностью до численных коэффициентов воспроизвести вероятности известных процессов в сильном поле: спонтанного рождения пар, излучения фотона электроном, фоторождения пары и радиационной поправки к массе.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) в сильном внешнем поле — это хорошо исследованная, по крайней мере теоретически, область с более чем шестидесятилетней историей (см., например, обзоры [1, 2]). Расчёты с учётом внешнего поля похожи на те, что проводят в традиционной КЭД. В них используют обычные правила фейнмановской диаграммной техники с той лишь разницей, что электронные пропагаторы и внешние электронные линии заменяют на точные, которые называют также «одетыми» и которые учитывают взаимодействие с внешним полем во всех порядках по фотонным линиям внешнего поля (см. рис. 1). Если удастся получить точное решение уравнения Дирака во внешнем поле, то выражения для точного пропагатора электрона и внешней электронной линии можно записать явно.

Квантовая электродинамика в сильном внешнем поле интересна сама по себе как непертурбативная модель квантовой теории поля, также её результаты широко применяются в астрофизике. Внимание к эффектам КЭД в сильном внешнем поле существенно возросло после эксперимента SLAC E144 [3, 4], а в последние годы оно особенно велико в связи с ожидаемым ростом интенсивности доступного лазерного излучения при реализации таких крупнейших мегапроектов как Extreme Light Infrastructure (ELI), Shanghai Station of Extreme Light (SEL) и eXawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS).

Результаты, изложенные в оригинальной литературе, в основном получены с применением очень сложных и громоздких аналитических или численных расчётов. Однако очевидно, что качественное рассмотрение задач позволяет глубже понять их суть. При этом удивительно, что в литературе практически отсутствуют попытки провести общий качественный анализ КЭД в сильном поле. Среди небольшого числа примеров такого анализа можно отметить лишь работы [5, 6], однако в них рассматриваются только некоторые частные аспекты. По нашему мнению, разработка интуитивного подхода в задачах такого рода важна для дальнейшего развития теории.

В данной работе без проведения прямых вычислений воспроизводятся хорошо известные асимптотические выражения для вероятностей простейших КЭД процессов во внешнем поле

* AMFedotov@MEPhI.ru

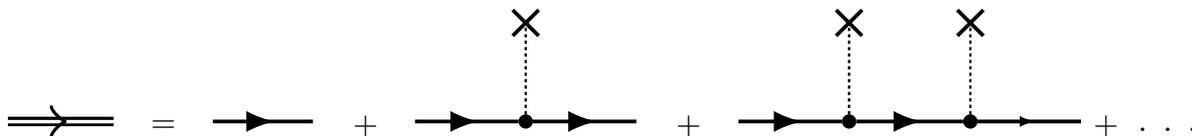


Рис. 1. «Одетый» пропагатор электрона во внешнем поле

с участием ультррелятивистских частиц: излучения жёсткого фотона, рождения пары, радиационной поправки к массе. Поскольку используются только кинематические соображения и принцип неопределённости, наше изложение доступно не только специалистам. Кроме того, предлагаемый подход проясняет, как соотносятся характерные для задачи масштабы времени и расстояния.

1. МЕТОД КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНОК

Начнём с общей постановки задачи. Рассмотрим процесс взаимодействия частиц в сильном внешнем поле, в ходе которого некоторые начальные частицы превращаются в набор таких же или других конечных частиц. В КЭД такой процесс описывается одной или несколькими диаграммами Фейнмана. Предположим, что внешнее поле включается и выключается адиабатически. В формализме Фейнмана–Дайсона во всех вершинах взаимодействия выполнены законы сохранения энергии и импульса, однако при этом промежуточные (виртуальные) частицы находятся не на массовой поверхности.

Однако возможно и другое, эквивалентное (и исторически предложенное раньше [7]) описание процесса, при котором все частицы, в том числе виртуальные, находятся на массовой поверхности, а во всех вершинах сохраняется импульс, но при этом не сохраняется энергия. Этот подход называют «старой» теорией возмущений, т. к. он хорошо известен в нерелятивистской квантовой механике. Сейчас такое описание редко применяется к релятивистским задачам ввиду того, что энергия и импульс в нём рассматриваются по-разному, т. е. оно представлено в нековариантной форме (хотя является полностью эквивалентным и, следовательно, неявно ковариантным). Кроме того, оно неэффективно с практической точки зрения, т. к. в стандартном подходе Фейнмана–Дайсона различные члены ряда «старой» теории возмущений автоматически комбинируются. Тем не менее до тех пор пока мы интересуемся проведением качественного анализа, а не конкретными вычислениями, удобно использовать именно такой подход.

Если суммарная энергия конечных частиц ϵ_f превышает суммарную энергию начальных частиц ϵ_i , т. е. имеется дефицит энергии $\Delta\epsilon = \epsilon_f - \epsilon_i > 0$, то такой процесс не идёт без внешнего поля. В присутствии поля частицы могут получить от него недостающую энергию, и (в предположении, что это не запрещено другими законами сохранения) процесс становится возможным. Такие явления называют индуцированными полем процессами.

Найдём масштабы времени, характеризующие такой процесс. Согласно принципу неопределённости, первый из них связан с $\Delta\epsilon$ посредством соотношения¹

$$t_q \sim 1/\Delta\epsilon. \tag{1}$$

Из принципа неопределённости следует, что дефицит энергии $\Delta\epsilon$ должен быть компенсирован за время $t \lesssim t_q$. Второй масштаб t_e — это характерное время, за которое частицы, ускоряясь в поле, приобретают энергию порядка $\Delta\epsilon$:

$$e \int_0^{t_e} \mathbf{E} ds \sim \Delta\epsilon, \tag{2}$$

¹ В работе используются единицы $\hbar = c = 1$, где \hbar — постоянная Планка и c — скорость света в вакууме.

где e — заряд частицы, \mathbf{E} — вектор напряжённости электрического поля, ds — элемент пути, который проходит частица (подразумевается, что частица движется квазиклассически).

Вообще говоря, все процессы, индуцированные полем, классически запрещены. Однако если выполнено условие $t_e \lesssim t_q$, т. е. поле успевает восполнить недостающую часть требуемой энергии за время, определяемое принципом неопределённости, то процесс разрешён квантовомеханически. Будем называть такой случай квантовым режимом. В противоположной ситуации, $t_e \gtrsim t_q$, процесс должен быть экспоненциально подавлен, поэтому будем называть ее квазиклассическим режимом.

Для определения множителя, характеризующего степень подавления процесса в квазиклассическом режиме, рассмотрим случай постоянно чисто электрического поля, описываемого векторным потенциалом $\mathbf{A}(t) = -\mathbf{E}t$. Здесь и далее считаем, что $E \equiv |\mathbf{E}| \ll E_S = m^2/e = 1,3 \times 10^{16}$ В/см, где E_S — критическое поле КЭД, m и e — масса электрона и элементарный заряд соответственно. Данный пример, безусловно, является частным, однако если частота поля мала (поле медленно меняется), начальная частица только одна и все участвующие в процессе частицы являются ультрарелятивистскими, причём углы между направлениями их распространения и полем не малы, то любое поле в системе отсчёта частицы близко к скрещённому ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \approx 0$, $E \approx H \equiv |\mathbf{H}|$, где \mathbf{H} — напряжённость магнитного поля) и, следовательно, может быть заменено постоянным электрическим полем таким образом, чтобы оставался неизменным безразмерный динамический квантовый параметр

$$\chi = \frac{e}{m^3} \sqrt{-(F_{\mu\nu}p^\nu)^2} = \frac{\gamma \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2}}{E_S} = \frac{E_P}{E_S}, \quad (3)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряжённости поля, p^ν и \mathbf{v} — 4-импульс и скорость частицы соответственно, E_P — напряжённость электрического поля в собственной системе отсчёта. Для электрона безразмерный параметр χ имеет смысл ускорения в собственной системе отсчёта в комптоновских единицах. Суть этого принципиально важного приближения детальнее изложена в работах [8, 9] и проиллюстрирована на рис. 2. Мы будем обсуждать в основном именно этот случай, т. к. он представляет наибольший интерес для исследования взаимодействия лазерного излучения сверхвысокой интенсивностью с веществом.

При $E \ll E_S$ (т. е. в случае, когда не происходит спонтанного рождения пар из вакуума) в выбранной нами калибровке решение уравнения Дирака можно приближённо записать следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \propto \exp \left[i\mathbf{p}\mathbf{r} - i \int_0^t \varepsilon_p(t') dt' \right], \quad \varepsilon_p(t) = \sqrt{[\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)]^2 + m^2}, \quad (4)$$

где \mathbf{p} — импульс частицы, \mathbf{r} — её радиус-вектор. Оно имеет квазиклассический вид $\exp(iS)$, как и волковское решение для постоянного скрещённого поля (которое, заметим, является точным).

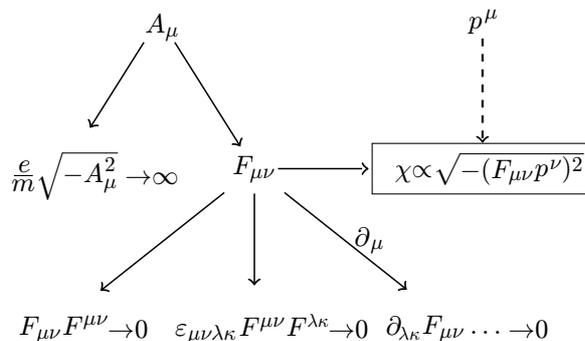


Рис. 2. Диаграмма, иллюстрирующая приближение локально-постоянного поля: вероятность процесса может зависеть только от поля и 4-импульса частицы. Однако в рассматриваемых условиях большинство составленных из них инвариантных комбинаций либо насыщается, либо пренебрежимо мало, так что остаётся лишь единственный лоренц- и калибровочно-инвариантный параметр χ

Тогда для такого решения вероятность квантового перехода можно представить в виде

$$c_{i \rightarrow f} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt V_{fi}(t) \exp \left[i \int_0^t \Delta\varepsilon(t') dt' \right], \quad V_{fi}(t) \propto \delta^{(3)}(\Delta\mathbf{p}), \quad (5)$$

где $\delta^{(3)}(\Delta\mathbf{p})$ — 3-мерная дельта-функция, $\Delta\mathbf{p}$ — изменение импульса частиц в процессе. Отметим, что использование постоянного электрического поля отчасти мотивировано точным сохранением импульса. В режиме, когда вероятность перехода подавлена, интеграл можно оценить с помощью метода стационарной фазы:

$$c_{i \rightarrow f} \propto \exp \left[- \int_0^{t_*} \Delta\varepsilon(it') dt' \right], \quad (6)$$

где t_* — наименьшее положительное решение уравнения $\Delta\varepsilon(it_*) = 0$. Вместе с равенством $\Delta\mathbf{p} = 0$ (см. формулу (5)) это условие определяет границу области квантового туннелирования². Как мы покажем на конкретных примерах, можно принять $t_* \sim t_e$. Таким образом, из выражения (6) следует, что $c_{i \rightarrow f} = \mathcal{O}[\exp(-t_e/t_q)]$.

Проиллюстрируем наш подход на простейшем (и единственном, для которого уже существует качественное понимание) примере спонтанного рождения пар в постоянном однородном электрическом поле. Для простоты будем считать, что пары рождаются в состоянии покоя (поперечный импульс $\mathbf{p}_\perp = 0$ как для частицы, так и для античастицы, что удовлетворяет закону сохранения импульса). Тогда $\Delta\varepsilon = 2m$, $t_e \sim \Delta\varepsilon/(eE) \sim m/(eE)$ и $t_q \sim 1/\Delta\varepsilon \sim 1/m$. Поскольку в случае $E \ll \ll E_S$ всегда справедливо $t_e \gg t_q$, то процесс экспоненциально подавлен, $c_{i \rightarrow f} = \mathcal{O}[\exp(-t_e/t_q)] = \mathcal{O}[\exp(-E_S/E)]$. Чтобы установить более точную зависимость, запишем дефицит энергии, учитывая, что в начале был вакуум, а в конечном состоянии присутствует пара:

$$\Delta\varepsilon(t) = 2\varepsilon_{\mathbf{p}=0}(t) = 2\sqrt{m^2 + e^2 E^2 t^2},$$

и решим уравнение $\Delta\varepsilon(it_*) = 0$, из которого найдём $t_* = m/(eE)$. Заметим, что мы получили $t_* = t_e$, как и обсуждалось выше. Теперь можно оценить вероятность рождения пары:

$$W_{e^-e^+} \sim \left| \exp \left[-2 \int_0^{m/(eE)} \sqrt{m^2 - e^2 E^2 t'^2} dt' \right] \right|^2 = \exp[-\pi m^2/(eE)], \quad (7)$$

что совпадает с известным выражением [11].

Далее применим аналогичные рассуждения к некоторым более сложным процессам, которые на качественном уровне ранее не обсуждались.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЖЁСТКОГО ФОТОНА

Рассмотрим процесс излучения жёсткого фотона с импульсом \mathbf{k} электроном с импульсом \mathbf{p} , также известный как нелинейный эффект Комптона или квантовое синхротронное излучение (см. рис. 3). Будем считать, что несущая частота поля мала, так что поле близко к постоянному. Будем также предполагать, что излучающий электрон является ультррелятивистским как до,

² Здесь подразумевается туннелирование во времени, а не в пространстве. Та же идея лежит в основе метода мнимого времени [10] и усовершенствована в инстантонной технике.

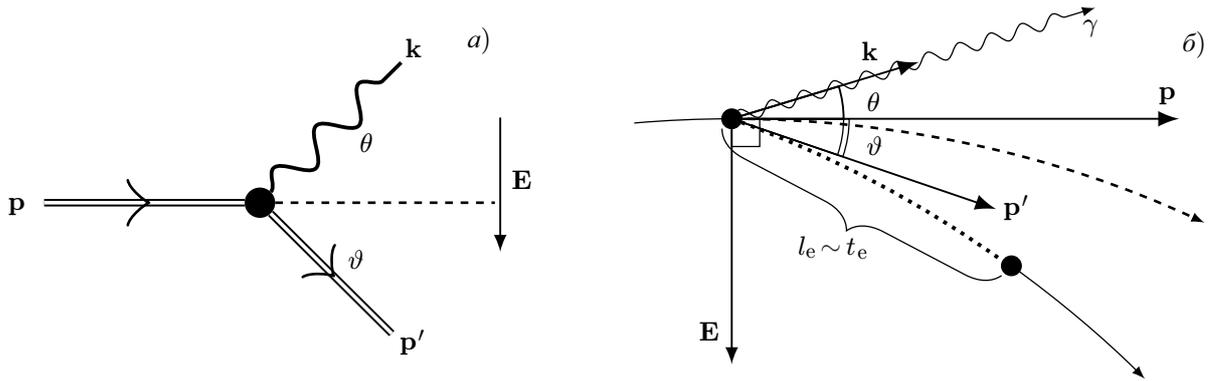


Рис. 3. Излучение жёсткого фотона в постоянном поле: (а) диаграмма Фейнмана и (б) схема квази-классических траекторий: штриховая линия — продолжение первоначальной траектории электрона, пунктирная линия — траектория виртуального электрона непосредственно после излучения

так и после излучения, $\{p, p - k\} \gg m$ (здесь $p \equiv |\mathbf{p}|$ и $k \equiv |\mathbf{k}|$), и что угол между направлением его распространения и полем не мал. В таком случае поле с произвольной конфигурацией можно локально заменить на постоянное скрещённое поле, не изменяя значение параметра χ . Удобно заменить его на постоянное электрическое поле, описываемое потенциалом $\mathbf{A} = -\mathbf{E}t$ и направленное перпендикулярно начальному импульсу электрона (снова сохраняя значение χ).

Начальная энергия электрона равна

$$\varepsilon_{\mathbf{p}}(t) = \sqrt{p^2 + e^2 E^2 t^2 + m^2} \approx p + \frac{e^2 E^2 t^2 + m^2}{2p}, \quad (8)$$

где мы разложили выражение, считая, что $p \gg eEt$ (что обосновывается результатом вычисления).

Квадрат импульса $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{k}$ конечного электрона можно выразить как $p'^2 = (p - k)^2 + 4pk \sin^2(\theta/2)$, где θ — угол, под которым излучается фотон. Пусть (вновь для простоты) векторы \mathbf{p} , \mathbf{k} и \mathbf{E} все лежат в одной плоскости. Тогда, считая, что $p - k \gg eEt$, можно разложить энергию электрона и в конечном состоянии:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}'}(t) \approx p - k + \frac{e^2 E^2 t^2 + 2eEkt \sin \theta + m^2 + 4pk \sin^2(\theta/2)}{2(p - k)}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в дефицит энергии $\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_{\mathbf{p}'}(t) + k - \varepsilon_{\mathbf{p}}(t)$, получаем

$$\Delta\varepsilon(t) \approx \frac{k [e^2 E^2 t^2 + 2eEpt \sin \theta + m^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2)]}{2p(p - k)}. \quad (10)$$

Заметим, что ведущие члены точно компенсируются, так что при $k \sim p$ справедливо $\Delta\varepsilon = \mathcal{O}(m/\gamma)$, где γ — гамма-фактор электрона, т. е. виртуальный электрон находится вблизи массовой поверхности. Стоит отметить, что до сих пор мы использовали только кинематические соображения.

Далее рассмотрим предельные случаи. Пусть сначала $t \lesssim m/(eE)$ (предел слабого поля), так что можно пренебречь первыми двумя членами в числителе (10) по сравнению с остальными слагаемыми. Поскольку процесс индуцирован слабым полем, основной вклад должна давать кинематика распада с наименьшим значением $\Delta\varepsilon$. При фиксированном k это означает, что последнее слагаемое в (10) не должно существенно превышать остальные члены, т. е. что $\theta \lesssim m/p = 1/\gamma$. Таким образом, мы получили хорошо известное свойство излучения в узкий конус с углом раствора

$\mathcal{O}(1/\gamma)$ вокруг направления движения ультрарелятивистской частицы. Поскольку мы интересуемся оценками по порядку величины, можно теперь отбросить и последнее слагаемое в числителе, после чего выразить t_q :

$$t_q \approx \frac{2p(p-k)}{m^2k}. \quad (11)$$

К оценке t_e следует подойти аккуратно, т. к. из-за сохранения импульса $k_\perp = p'_\perp$ и $p' \approx p - k$ (индекс \perp означает поперечные к \mathbf{p} составляющие соответствующих величин, $p' \equiv |\mathbf{p}'|$) для угла рассеяния электрона справедливы соотношения $\vartheta = k\theta/p' \simeq km/[(p-k)p] \ll 1$. Это означает, что рассеянный электрон также движется почти перпендикулярно к полю и, значит, оно практически не совершает над ним работу. Учитывая этот факт, можно записать

$$t_e \sim \frac{\Delta\varepsilon}{eE\vartheta} \sim \frac{m}{eE}. \quad (12)$$

Процесс разрешён, если $t_q \gtrsim t_e$, иначе он должен быть экспоненциально подавлен. Такое условие точно совпадает с известной границей экспоненциального обрезания спектра синхротронного излучения,

$$k \lesssim k_{\max} = \frac{eEp}{m^3} p = \chi p. \quad (13)$$

Поскольку $k \lesssim p$, это условие соответствует квазиклассическому режиму $\chi \lesssim 1$.

Вероятность W_γ излучения жёсткого фотона в единицу времени пропорциональна e^2 (т. к. диаграмма содержит одну вершину) и по размерности обратно пропорциональна времени. Используя наименьший масштаб времени в задаче, t_e , оценим её как

$$W_\gamma \sim \frac{e^2}{t_e} \sim \frac{e^2 m^2}{p} \chi. \quad (14)$$

Комбинируя (13) и (14), можно также приближённо определить среднюю силу радиационного трения, действующую на электрон:

$$F_{\text{RR}} \sim kW_\gamma \sim e^2 m^2 \chi^2. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) можно сравнить с асимптотиками точных формул [8, 9, 12, 13]:

$$W_\gamma \approx \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{e^2 m^2}{p} \chi \approx 1,443 \frac{e^2 m^2}{p} \chi, \quad F_{\text{RR}} \approx \frac{2}{3} e^2 m^2 \chi^2. \quad (16)$$

Обсудим более интересный предел сильного поля, $t \gg m/(eE)$. Теперь в числителе (10) доминирует первое слагаемое, справедливо $k \sim p$, а допустимые углы рассеяния (при которых дефицит энергии $\Delta\varepsilon$ не увеличивается значительно) заданы выражением

$$\{\vartheta, \theta\} \lesssim eEt/p \ll 1. \quad (17)$$

В этом режиме углы определяются главным образом искривлением квазиклассической траектории виртуального электрона полем. Тогда дефицит энергии в пределе сильного поля принимает вид

$$\Delta\varepsilon(t) \sim e^2 E^2 t^2 / p. \quad (18)$$

Вследствие неравенств (17) всегда справедливо $eE\vartheta(t)t \sim \Delta\varepsilon(t)$. При $t \gtrsim m/(eE)$ это означает, что в ходе процесса частица заведомо успевает получить из поля недостающую энергию и оказаться на массовой поверхности.

Подставим (18) в определение t_q ,

$$t_q \sim \frac{p}{e^2 E^2 t_q^2}, \quad (19)$$

откуда находим явное выражение

$$t_q \sim \frac{m}{eE} \chi^{1/3}. \quad (20)$$

Из него следует, что условие $t \gg m/(eE)$ соответствует $\chi \gg 1$. По аналогии с рассмотренным выше пределом слабого поля можно оценить вероятность излучения в единицу времени и среднюю силу радиационного трения:

$$W_\gamma \sim \frac{e^2}{t_q} \sim \frac{e^2 m^2}{p} \chi^{2/3}, \quad F_{RR} \sim kW_\gamma \sim e^2 m^2 \chi^{2/3}. \quad (21)$$

Эти выражения можно вновь сопоставить с соответствующими точными результатами работ [8, 9, 12, 13]:

$$W_\gamma \approx \frac{14\Gamma(2/3)}{27} \frac{e^2 m^2}{p} (3\chi)^{2/3} \approx 1,46 \frac{e^2 m^2}{p} \chi^{2/3}, \quad (22)$$

$$F_{RR} \approx \frac{32\Gamma(2/3)}{243} e^2 m^2 (3\chi)^{2/3} \approx 0,37 e^2 m^2 \chi^{2/3}, \quad (23)$$

где $\Gamma(2/3)$ — значение гамма-функции.

3. РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ФОТОНОМ

Диаграмма процесса рождения пары фотоном во внешнем поле, который также называют нелинейным процессом Брейта—Уилера, показана на рис. 4. Приближения и рассуждения, которые мы использовали в предыдущей части, в частности предположение $\{k, p, p'\} \gg m$, применимы и для этого процесса, поэтому обсудим основные различия.

Пренебрегая для простоты поперечным импульсом и повторяя рассуждения, которые мы применили для процесса излучения, выразим дефицит энергии $\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}(t) + \varepsilon_{\mathbf{p}}(t) - k$:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(t) &\approx \sqrt{(k-p)^2 + e^2 E^2 t^2 + m^2} + \sqrt{p^2 + e^2 E^2 t^2 + m^2} - k \approx \\ &\approx \frac{k(e^2 E^2 t^2 + m^2)}{2p(k-p)} \gtrsim \frac{2(e^2 E^2 t^2 + m^2)}{k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Величина $\Delta\varepsilon = \mathcal{O}(m/\gamma)$ (здесь γ — гамма-фактор фотона) мала по сравнению с дефицитом энергии в случае спонтанного рождения пар из вакуума $\mathcal{O}(m)$, поэтому для рождения пары фотоном достаточно поля намного меньшей интенсивности. Подчеркнём, что в отличие от процесса излучения процесс фоторождения пары имеет порог энергии. Его минимальное значение достигается, когда начальный импульс равномерно распределяется между электроном и позитроном: $p = p' = k/2$.

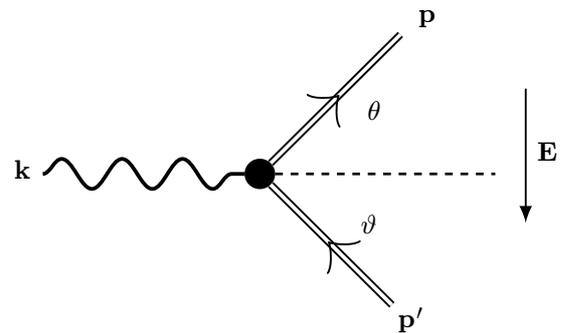


Рис. 4. Диаграмма Фейнмана для процесса фоторождения пары в постоянном электрическом поле

Рассмотрим предельные случаи. В квантовом режиме, т.е. в пределе сильного поля, $t \gg \gg m/(eE)$, можно пренебречь членом m^2 в числителе (24), после чего получим

$$\Delta\varepsilon(t) \approx e^2 E^2 t^2 / k. \tag{25}$$

Угловое распределение, которое возникает благодаря искривлению траекторий в поле, можно оценить как $\{\theta, \vartheta\} \simeq eEt/k \ll 1$. Соотношение $eE\theta t \sim \Delta\varepsilon$ выполняется автоматически. Таким образом, в сильном поле виртуальные частицы всегда успевают получить достаточно энергии из поля, чтобы выйти на массовую поверхность.

Вероятность процесса в единицу времени полностью определяется масштабом $t_q \sim 1/\Delta\varepsilon(t_q) \simeq k/(e^2 E^2 t_q^2)$, который можно представить явно в виде

$$t_q \sim \frac{k}{m^2} \varkappa^{-2/3}, \tag{26}$$

где $\varkappa \gg 1$ — динамический квантовый параметр начального фотона (аналог χ). Отсюда получим

$$W_{e^-e^+} \sim \frac{e^2}{t_q} \sim \frac{e^2 m^2}{k} \varkappa^{2/3}. \tag{27}$$

Результат отличается от точного лишь отсутствием множителя $15 \cdot 3^{2/3} \Gamma^4(2/3)/(28\pi^2) = 0,38$ [8, 9, 12, 13].

В обратном пределе слабого поля, $t \ll m/(eE)$, из (24) находим

$$t_q \sim 1/\Delta\varepsilon \sim k/m^2. \tag{28}$$

Полагая $p = p' = k/2$, можно считать, что углы $\{\theta, \vartheta\} \simeq m/k \ll 1$. Следовательно, для времени t_e получим

$$t_e \sim \frac{\Delta\varepsilon}{eE\vartheta} \sim \frac{m}{eE}. \tag{29}$$

Выражения (28) и (29) можно проверить, рассматривая процесс в системе отсчёта K' , в которой начальный фотон является мягким, $k' \sim m$. Для этого система должна двигаться в направлении распространения фотона с гамма-фактором $\gamma \sim k/m$ по отношению к лабораторной системе. Тогда в K' имеем $\Delta\varepsilon' \sim m$, $E' \sim \gamma E$ и $\vartheta' \sim 1$, откуда $t'_e \sim \Delta\varepsilon'/(eE') \sim m/(eE\gamma)$ и $t'_q \sim 1/\Delta\varepsilon' \sim \sim 1/m$. Но поскольку $t_e \sim \gamma t'_e$ и $t_q \sim \gamma t'_q$, в результате приходим к тем же выражениям (28) и (29).

Согласно (28) и (29) отношение масштабов времени по порядку величины составляет $t_q/t_e \sim \sim \varkappa$. Поскольку в рассматриваемом случае $\varkappa \ll 1$, вероятность процесса экспоненциально подавлена, $W_{e^-e^+} = \mathcal{O}[\exp(-t_e/t_q)] = \mathcal{O}[\exp(-1/\varkappa)]$. Экспоненциальный множитель можно определить точнее, используя формулу (6). Для этого найдём стационарную точку выражения (24):

$$\Delta\varepsilon(it_*) = \frac{2(-e^2 E^2 t_*^2 + m^2)}{k} = 0, \implies t_* = \frac{m}{eE} \tag{30}$$

(заметим, что снова $t_* = t_e$), после чего вычислим интеграл:

$$W_{e^-e^+} \propto \left| - \int_0^{m/(eE)} \frac{2(-e^2 E^2 t^2 + m^2)}{k} dt \right|^2 = \exp[-8/(3\varkappa)]. \tag{31}$$

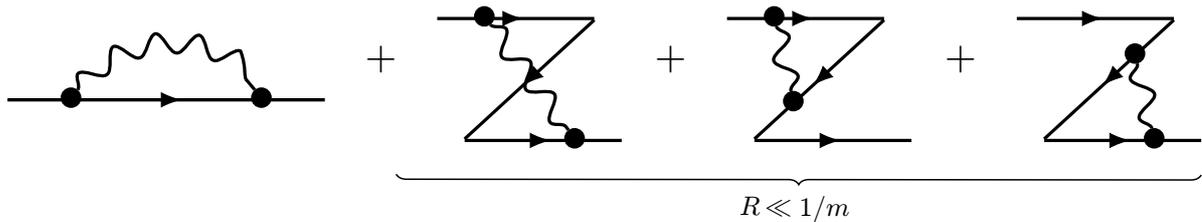


Рис. 5. Набор диаграмм для массового оператора в «старой» теории возмущений

Как и выше, результат с точностью до множителя согласуется с асимптотикой, полученной в результате разложения точного выражения для вероятности фоторождения пары [8, 9, 12, 13].

5. МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР

Обсудим свойства массового оператора во внешнем поле, который имеет известный классический аналог — собственную энергию. В отсутствие поля массовый оператор второго порядка задаётся выражением [13]

$$M^{(2)} = e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(p-k) \gamma^\mu D(k), \quad (32)$$

где $S(p)$ — пропагатор виртуального электрона, а $D(k)$ — пропагатор виртуального фотона, γ_μ — матрица Дирака. Это выражение, как известно, расходится, поэтому необходимо сначала ввести регуляризацию, которая во избежание появления ложных аномалий должна сохранять как можно больше симметрий в задаче, далее провести перенормировку массы, после чего снять регуляризацию. Поскольку нас интересует только качественное обсуждение, просто предположим, что пространственные масштабы и импульсы ограничены неравенствами $r \gtrsim R$ и $k \lesssim R^{-1}$, где R — параметр регуляризации, который можно считать радиусом электрона³.

Известно, что в классической теории собственная энергия электрона при $R \rightarrow 0$ расходится как $M_C \sim e^2/R$, однако в КЭД эта расходимость значительно слабее: $M_{\text{QED}}^{(2)} \sim e^2 m \ln[1/(mR)]$ [13, 14]. Эту разницу можно проиллюстрировать в рамках «старой» теории возмущений, как показано на рис. 5. Из него видно, что обычный фейнмановский пропагатор одновременно описывает распространение виртуальных электрона и позитрона (последнему отвечают пути назад во времени). В частности, он включает искривлённые пути, описывающие рождение и дальнейшую аннигиляцию виртуальных пар. Таким образом, помимо обычного распространения с излучением и последующим поглощением виртуального фотона, который даёт вклад порядка e^2/R , при $R \lesssim 1/m$ существуют сопоставимые по величине вклады, отвечающие рождению и последующей аннигиляции одного (показано наклонной линией на рис. 5) или нескольких виртуальных позитронов. Виртуальные электроны и позитроны взаимодействуют с первоначальным электроном и друг с другом. В отсутствие поля все взаимодействия, показанные на рис. 5, можно оценить по порядку величины как $\pm e^2/R$, где знак отвечает взаимодействию между электронами или между электроном и позитроном. В итоге среди показанных диаграмм первые две дают положительный вклад, а последние две — отрицательный. Аналогичная ситуация имеет место для диаграмм, содержащих большее число виртуальных пар. Благодаря этому в КЭД компенсируются доминирующие в классической электродинамике расходимости. Отметим, что в работе [15]

³ Параметр регуляризации должен определяться инвариантным образом, поэтому он соответствует размеру электрона в собственной системе отсчёта. Чтобы не усложнять рассуждения, будем считать, что первоначально электрон покоится.

с использованием современных обозначений наглядно показан переход от обратной пропорциональности к логарифмической зависимости от R на комптоновском масштабе $R \sim l_C = 1/m$.

Из рассмотрения массового оператора на языке «старой» теории возмущений видно, что в присутствии внешнего поля виртуальные пары поляризуются. Электроны и позитроны разделяются полем, что приводит к нарушению точного сокращения доминирующих расходимостей. В результате, во всяком случае в достаточно сильном поле, восстанавливается степенная зависимость от R .

Перенормировка массового оператора во внешнем поле подразумевает вычитание такой же величины, но в отсутствие поля. Как обсуждалось в разделе 2, при $p \gg m$ время жизни виртуального фотона определяется выражением (20). Если интересоваться вещественной частью массового оператора, в которой фотон не выходит на массовую поверхность, то масштаб t_e , очевидно, не имеет отношения к задаче. При $t \ll t_q$ влияние поля несущественно. Это означает, что после процедуры вычитания мы получим величину, которую можно грубо оценить, просто заменив R на t_q . Однако прежде необходимо выразить t_q в собственной системе отсчёта начального электрона: $\tau_q \sim t_q/\gamma \sim 1/(m\chi^{2/3})$. Таким образом, окончательно получим

$$M^{(2)} \sim e^2/\tau_q \sim \alpha m\chi^{2/3}, \quad \chi \gg 1. \tag{33}$$

Мы воспроизвели известный результат [16] с точностью до численного коэффициента $(28/27)\pi \times 3^{1/6}\Gamma(2/3) \approx 5,3$. В противоположном пределе слабого поля ($\chi \ll 1$) Ритусом получена асимптотика $\text{Re } M^{(2)} \sim (16/3)e^2 m\chi^2 \ln(1/\chi)$, которая содержит логарифмическую особенность. Такое поведение ожидаемо, однако пока нет полного понимания, как его можно воспроизвести с помощью рассматриваемого здесь упрощённого подхода. Возвращаясь к пределу $\chi \gg 1$, отметим, что поперечный размер петли можно оценить как

$$r_{\perp} \sim t_q \vartheta \sim eEt_q^2/p \sim \frac{1}{m} \chi^{-1/3}. \tag{34}$$

Интересно, что он не зависит от массы электрона.

Для применимости теории возмущений необходимо, чтобы радиационные поправки были малы, в частности $M^{(2)} \ll m$. Отсюда можно сделать предположение, что при $\chi \gg 1$ роль параметра теории возмущений в КЭД в сильном внешнем поле вместо α играет комбинация $\alpha\chi^{2/3}$. Эта гипотеза была выдвинута и обоснована прямыми вычислениями лидирующих диаграмм вплоть до порядка α^3 в работе [17]. Если это верно, то это свидетельствует о качественном различии между КЭД в сильном внешнем поле и традиционной КЭД: в то время как в обычной КЭД теория возмущений справедлива до тех пор, пока мы находимся вдали от полюса Ландау, который отвечает недостижимо большим масштабам энергии, в случае КЭД в сильном внешнем поле она нарушается уже при $\chi \simeq 10^3$. В табл. 1 указаны параметры, при которых это условие выполнено для частицы, движущейся поперечно в лазерном поле. К гипотетическому порогу нарушения теории

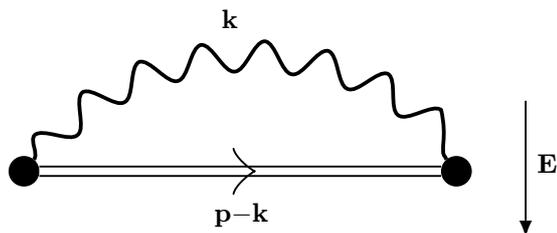


Рис. 6. Диаграмма Фейнмана для радиационной поправки к массе (массового оператора) в поперечном электрическом поле

Таблица 1. Характерные значения энергии начальных частиц, напряжённости поля и интенсивности лазерного излучения I_L , необходимые для достижения непертурбативного режима ($\alpha\chi^{2/3} \sim 1$) КЭД в сильном внешнем поле

ε_{in} , ГэВ	10^3	10^2	10	1
E/E_S	10^{-3}	10^{-2}	0,1	1
I_L , Вт/см ²	10^{23}	10^{25}	10^{27}	10^{29}

возмущений уже можно подойти, используя современные лазерные установки и будущий ускоритель International Linear Collider [18] — лептонный коллайдер, на котором ожидается достижение энергии частиц порядка тераэлектронвольта. Подчеркнём, что данные в табл. 1 справедливы лишь для специфического случая поперечного движения частиц в поле. Например, в самоподдерживающихся каскадах, в которых частицы ускоряются самим полем [19], угол между направлением их распространения и полем всегда мал, характерные значения параметра χ составляют величину порядка $[E/\alpha E_S]^{3/2}$, вследствие чего в докритических полях $\alpha\chi^{2/3} \sim E/E_S \ll 1$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время растёт число теоретических работ, а также предложений по экспериментальной проверке КЭД в сильном поле. Однако несмотря на то, что режим $\alpha\chi^{2/3} \gg 1$ может стать актуальным с экспериментальной точки зрения уже в ближайшие 10–15 лет, пока не удаётся существенно продвинуться в его теоретическом исследовании из-за трудностей при проведении прямых вычислений амплитуд процессов высших порядков. По этой причине важно иметь инструмент, который позволил бы углубить понимание природы процессов в КЭД во внешнем поле, в частности их основных масштабов времени и длин формирования. Это позволило бы продвинуться в решении ряда до сих пор недостаточно исследованных вопросов, таких как, например, понимание непертурбативной природы КЭД в сильном поле [17] и соотношение между обычной КЭД при высоких энергиях или на малых расстояниях и предела сильного поля в КЭД во внешнем поле [20]. Основной целью данной работы было акцентирование внимания на этой задаче и демонстрация того, как удаётся воспроизвести некоторые частные известные результаты, не прибегая к громоздким вычислениям.

Намеченный в данной работе подход позволяет проводить оценку вероятностей целого ряда процессов, индуцируемых в постоянном скрещённом поле, по порядку величины, включая асимптотическую зависимость от поля. При этом основной интерес представляют процессы с одной начальной высокоэнергетической частицей (ультрарелятивистским электроном или жёстким фотоном), движущейся поперёк поля, когда произвольное поле эквивалентно постоянному скрещённому. В качестве иллюстрации рассмотрены процессы спонтанного рождения пар из вакуума, излучения жёсткого фотона электроном (нелинейный эффект Комптона), фоторождения пары (процесс Брейта—Уилера), а также массовый оператор (радиационная масса) в постоянном скрещённом поле. В каждом из указанных случаев, исходя из кинематики и соотношения неопределённости для энергии, удалось правильно воспроизвести (с точностью до численных коэффициентов) все известные асимптотические выражения для вероятностей процессов.

Для дальнейшего уточнения границ применимости предлагаемого подхода имеет смысл проанализировать известные на данный момент результаты расчётов процессов высших порядков (см. обзор [21]). Из сравнения видно, что полученные нами формулы (21) и (27) правильно передают степенную часть зависимости вероятностей процессов от динамического квантового параметра и для более сложных петлевых и ветвящихся процессов при условии, что суммарно в начальном и конечном состояниях находится не более двух заряженных частиц (т. е. процесс сводится либо к излучению электроном реальных или виртуальных фотонов, либо к рождению фотоном не более одной реальной или виртуальной пары, которая, однако, может излучать вторичные фотоны). Это связано с тем, что поле индуцирует процесс, выводя заряженные частицы на массовую поверхность, и при наличии большего числа фермионных линий в задаче возникает уже не один, а несколько пространственно-временных масштабов, соответствующих разорванным фермионным линиям, так что для конструирования вероятности в таких случаях одних лишь размерных соображений оказывается недостаточно.

В частности, простейшим процессом, вероятность которого при больших χ имеет асимптотику, отличную от $\chi^{2/3}$, является трайде́нт-процесс – процесс рождения пары электроном⁴. Это связано с несоизмеримостью времён формирования излучения виртуального фотона и рождения им электрон-позитронной пары. Мы надеемся, что дальнейшее развитие предложенного здесь метода позволит обобщить его и на такие процессы.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 17–12–276-1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–02–00963А) и Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (контракт 02.а03.21.0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. di Piazza A., Müller C., Hatsagortsyan K. Z., Keitel C. H. // *Rev. Modern Physics*. 2012. V. 84, No. 3. P. 1177.
2. Narozhny N. B., Fedotov A. M. // *Contemporary Physics*. 2015. V. 56, No. 3. P. 249.
3. Burke D. L., Field R. C., Horton-Smith G., et al. // *Physical Rev. Lett.* 1997. V. 79, No. 9. P. 1626.
4. Vamber C., Boege S. J., Koffas T., et al. // *Physical Rev. D*. 1999. V. 60, No. 9. Art. no. 092004.
5. Мигдал А. В. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1972. Т. 62, № 5. С. 1621.
6. Ахмедов Е. Х. // *Ядерная физика*. 2011. Т. 74, № 9. С. 1326.
7. Schwartz M. D. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 859 p.
8. Никишов А. И., Ритус В. И. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1964. Т. 46, № 2. С. 776.
9. Никишов А. И., Ритус В. И. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1967. Т. 52, № 6. С. 1707.
10. Попов В. С. // *Письма в ЖЭТФ*. 1971. Т. 13, № 5. С. 261.
11. Schwinger J. // *Physical Rev.* 1951. V. 82, No. 5. P. 664.
12. Байер В. Н., Катков В. М. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1968. Т. 53, № 4. С. 1478.
13. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Теоретическая физика. Изд. 3-е, испр. Т. IV. Квантовая электродинамика*. М.: Наука, 1989. 720 с.
14. Weisskopf V. // *Zeitschrift für Physik*. 1934. V. 89, No. 1–2. P. 27.
15. Виленкин А. В., Фомин П. И. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1975. Т. 67, № 1. С. 12.
16. Ритус В. И. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1970. Т. 57, № 6. С. 2176.
17. Narozhny N. B. // *Physical Rev. D*. 1980. V. 21, No. 4. P. 1176.
18. Baer H., Barklow T., Fujii K., et al. *The International linear collider. Technical design report. V. 2. Physics*. 2013. 189 p. arXiv:1306.6352.
19. Fedotov A. M., Narozhny N. B., Mourou G., Korn G. // *Physical Rev. Lett.* 2010. V. 105, No. 8. Art. no. 080402.
20. Ритус В. И. // *Журн. эксперим. теорет. физики*. 1975. Т. 69, № 5. С. 1517.
21. Fedotov A. // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 826. Art. no. 012027.
22. Erber T. // *Rev. Modern Physics* 1966. V. 38, No. 4. P. 626.
23. Ritus V. I. // *Nucl. Phys.* 1972. V. B44. P. 236.

Поступила в редакцию 18 июня 2018 г.; принята в печать 25 декабря 2018 г.

⁴ Отметим, что на данный момент трайде́нт-процесс изучен лишь приближённо: его вероятность вычислялась либо методом эквивалентных фотонов [22], либо с помощью оптической теоремы как мнимая часть поляризационной поправки к массовому оператору [23].

**QUALITATIVE ANALYSIS OF QUANTUM-ELECTRODYNAMIC PROCESSES
IN A STRONG FIELD**

A. M. Fedotov and A. A. Mironov

We propose a simple method for estimation of the probabilities of elementary processes of quantum electrodynamics in a strong field. It is shown that quantum-electrodynamic processes in the quasiclassical or quantum regime depending on the ratio of the characteristic scales of the time of particle acceleration by the field (a quasiclassical effect) and energy absorption by charged particles from the field directly during the process (a purely quantum effect). Using simple kinematic considerations and the indeterminacy principle in this regimes, it is possible to reproduce the probabilities of the known processes in the strong field, in particular, spontaneous pair creation, photon emission by an electron, pair photoproduction and radiation mass correction.