

УДК 621.396.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ ДВУХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

*В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман *, А. В. Елохин, О. А. Шмонин*

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные с помощью автомобильного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн. Источники сигналов были коррелированы между собой, а входной процесс состоял только из одной выборки. Метод минимального многочлена (корневой вариант) сравнивался с критерием MDL (Minimum Description Length) при определении числа источников и с корневым методом MUSIC (Multiple Signal Classification) при оценке их углового положения. Показано, что метод минимального многочлена имеет существенно более высокую эффективность по сравнению с критерием MDL и обеспечивает сверхразрешение источников при угловом расстоянии в 4÷5 раз меньшем ширины диаграммы направленности антенной решётки. Эффективность данного метода по точности оценки координат источников сигналов практически совпала с эффективностью корневого метода MUSIC при условии, что в последнем число источников считалось известным.

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение числа источников сигналов и их угловых координат в радиолокации, радионавигации и гидроакустике выполняется с помощью антенных решёток и различных методов обработки принятых сигналов [1–8]. Выбор метода зависит от требуемой точности определения числа и угловых координат источников, угловой разрешающей способности и сложности вычислительного алгоритма. При заданном размере антенной решётки проблема углового разрешения двух источников усложняется, если они находятся в пределах углового сектора, равного ширине главного луча её диаграммы направленности. Теоретические исследования показывают, что при достаточно большом отношении сигнал/шум (ОСШ) угловое разрешение возможно и в этом случае. Соответствующие методы обработки сигналов называют сверхразрешающими.

По способам обзора пространства сверхразрешающие методы можно разделить на методы с последовательной и параллельной пеленгацией источников сигналов [7]. При последовательной пеленгации формируется функция угловых координат (псевдоспектральная функция), а затем определяются направления на источники по максимумам этой функции. Недостатками такого подхода являются достаточно низкая скорость обзора пространства из-за высокой вычислительной сложности формирования псевдоспектральной функции и поиска её экстремумов, особенно при использовании многоэлементных антенных решёток с узкими лучами. К методам последовательной пеленгации относятся метод Кейпона, метод MUSIC и спектральный вариант метода минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в антенной решётке [6–10]. Методы параллельной пеленгации не требуют формирования псевдоспектральной функции. К ним относятся корневой метод MUSIC (Multiple Signal Classification), метод ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) и корневой вариант метода минимального многочлена [6, 7, 9–11].

* flak2402@gmail.com

Метод минимального многочлена, предложенный и теоретически исследованный в работах [9–14], предполагает вначале определение корней и степени минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в антенной решётке, а затем построение матричного проектора на шумовое подпространство. Степень данного многочлена связана с числом источников сигналов, а проектор используется для оценки угловых координат этих источников либо на основе формирования псевдоспектральной функции, либо путём нахождения корней соответствующих полиномов. Отметим, что корневой метод MUSIC и метод ESPRIT не дают оценку числа источников; оно должно быть известно или предварительно оценено, например с помощью критерия MDL (Minimum Description Length) [6, 7].

При практическом применении методов сверхразрешения используется максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы на основе выборки входного процесса в элементах антенной решётки [1, 15]. Элементы оценочной корреляционной матрицы являются случайными величинами из-за конечного числа L выборочных векторов. Для многоэлементных антенных решёток актуальными являются случай короткой выборки входного процесса, когда число L выборочных векторов меньше числа N элементов решётки ($L < N$), а также ситуации с коррелированными и близкорасположенными источниками. Необходимость использования короткой выборки может быть обусловлена, например, нестационарностью сигнальной обстановки. При этом выборочная корреляционная матрица становится вырожденной и имеет L положительных собственных чисел, а её остальные $N - L$ собственных чисел равны нулю. Коррелированность источников может быть вызвана многолучевым характером распространения сигналов, типичным для систем сотовой связи и гидроакустики, когда один источник создаёт несколько волновых фронтов, приходящих на антенную решётку с различных направлений. При этом некоторые из сигнальных собственных чисел корреляционной матрицы становятся близкими к шумовому собственному числу, что затрудняет оценку числа источников, связанную с разделением собственных чисел на сигнальные и шумовые.

Высокая эффективность метода минимального многочлена при коррелированных источниках сигналов и короткой выборке входного процесса показана на основе численного моделирования в работах [10–12]. Представляют несомненный интерес результаты экспериментальных исследований эффективности этого метода и его сравнение с другими методами. В данной статье рассматриваются особенности использования корневого варианта метода минимального многочлена для оценки числа источников сигналов и определения их угловых координат в случаях их сильной корреляции и короткой выборки входного процесса. Приводятся экспериментальные результаты, полученные с помощью активного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн. Для обработки данных использовались метод минимального многочлена (корневой вариант), критерий MDL и корневой метод MUSIC.

1. ОЦЕНКА ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ

Оценка числа источников методом минимального многочлена основана на аппроксимации минимального многочлена выборочной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ многочленом минимальной степени при условии, что среднеквадратическая ошибка (СКО) не превышает заданного порогового значения. Если аддитивные собственные шумы приёмных устройств антенной решётки являются некоррелированными и обладают одинаковыми мощностями, то точная корреляционная матрица $\mathbf{M}$ сигналов в антенной решётке имеет минимальный многочлен $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{J+1})$, корнями которого являются неравные между собой собственные числа, ранжированные в порядке убывания ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{J+1}$). Эти корни простые (единичной кратности), а их число определяется числом источников сигналов J и равно $J + 1$. Таким

образом, степень m минимального многочлена задаётся числом J источников сигналов ($m = J + 1$). В соответствии с теоремой Гамильтона—Кэли корреляционная матрица удовлетворяет своему минимальному многочлену, т. е. $\psi(\mathbf{M}) = \{\mathbf{0}\}$, где $\{\mathbf{0}\}$ — нулевая матрица [16]. Это условие можно записать в виде $(\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I}) \dots (\mathbf{M} - \lambda_{J+1} \mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Разделив данное уравнение на произведение собственных чисел, перейдём к его альтернативной записи: $(\mathbf{I} - \lambda_1^{-1} \mathbf{M})(\mathbf{I} - \lambda_2^{-1} \mathbf{M}) \dots (\mathbf{I} - \lambda_{J+1}^{-1} \mathbf{M}) = \{\mathbf{0}\}$.

При обработке сигналов в антенной решётке используется максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы $\mathbf{M}$, полученная по L выборочным векторам $\mathbf{X}(l)$ входного процесса [1, 15]:

$$\hat{\mathbf{M}} = L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}^H(l), \quad (1)$$

где индекс «H» обозначает эрмитово сопряжение.

Свойства корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ (1) зависят от соотношения между числом выборочных векторов и числом элементов антенной решётки. В случае длинной выборки входного процесса ($L > N$) корреляционная матрица $\hat{\mathbf{M}}$ (1) имеет N положительных неравных между собой собственных чисел $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$. Вероятность равенства некоторых собственных чисел является пренебрежимо малой. Следовательно, шумовое собственное число λ_{J+1} точной корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ расщепляется на $N - J$ шумовых собственных чисел $\mu_{J+1} > \dots > \mu_N$ выборочной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$, а минимальный многочлен точной корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ переходит в характеристический многочлен матрицы $\hat{\mathbf{M}}$, состоящий из N сомножителей ($\psi(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_N)$). Поэтому степень минимального многочлена перестаёт зависеть от числа J источников сигналов. При короткой выборке ($L < N$) корреляционная матрица $\hat{\mathbf{M}}$ является вырожденной и имеет L положительных собственных чисел, а $N - L$ её собственных чисел равны нулю. Подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, ортогонально подпространству выборочных векторов $\mathbf{X}(l)$. Степень минимального многочлена корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ превышает на единицу число L выборок входного процесса, т. е. также перестаёт зависеть от числа источников. Такие отличия в свойствах точной и выборочной корреляционных матриц принципиальны для сверхразрешающих методов.

Для оценки числа источников в работе [9] было предложено аппроксимировать минимальный многочлен корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ некоторым многочленом степени m при заданной СКО аппроксимации. Сформируем матричный многочлен $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = (\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}})$ для выборочной корреляционной матрицы, где $\gamma_i = 1/\hat{\lambda}_i$. Найдём минимум

$$I^{(m)} = \min_{\gamma_k} \text{Sp} \prod_{k=1}^m (\mathbf{I} - \gamma_k \hat{\mathbf{M}})^2 \quad (2)$$

квадрата евклидовой нормы этого многочлена за счёт выбора коэффициентов γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$), где $\text{Sp}(\mathbf{X})$ — след матрицы $\mathbf{X}$. Величина $I^{(m)}$ является СКО аппроксимации минимального многочлена корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ многочленом степени m . Метрики $I^{(m)}$ являются убывающими величинами, рассчитываются по очереди в порядке увеличения m и сравниваются с установленным порогом Th . Если при некотором m выполняются условия $I^{(m)} < \text{Th}$ и $I^{(m-1)} > \text{Th}$, то принимается решение, что оценка степени минимального многочлена $\hat{m} = m$.

Для коэффициентов γ_n , представляющих собой оценки обратных собственных чисел точной корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ ($\gamma_i = 1/\lambda_i$), в работе [9] получена система нелинейных уравнений. Для уменьшения вычислительных затрат рассмотрим другой способ вычисления коэффициентов

γ_n . Сделаем в (2) замену переменных с помощью формул Виета:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m), \\ a_2 &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \dots + \gamma_1\gamma_m + \gamma_2\gamma_3 + \dots + \gamma_{m-1}\gamma_m, \\ &\dots \\ a_m &= (-1)^m \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате выражение (2) принимает вид

$$I^{(m)} = \min_{a_k} \text{Sp} \left(\mathbf{I} + \sum_{k=1}^m a_k \widehat{\mathbf{M}}^k \right)^2. \quad (4)$$

Замена переменных (3) является взаимно однозначной, т. к. значения коэффициентов γ_k для минимального многочлена различаются между собой. Поэтому якобиан преобразования (3), т. е. определитель матрицы Якоби, не может быть равным нулю [17].

Продифференцируем функционал $I^{(m)}$ по параметрам a_k , приравняем полученные производные к нулю и введём обозначение $b^{(k)} = \text{Sp}(\widehat{\mathbf{M}}^k)$. В результате получим систему уравнений для коэффициентов a_k , которая является линейной, и выражение для СКО $I^{(m)}$:

$$\sum_{k=1}^m b^{(k+q)} a_k + b^{(q)} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, m; \quad I^{(m)} = N + 2 \sum_{k=1}^m a_k b^{(k)} + \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m a_k a_q b^{(k+q)}. \quad (5)$$

Теперь необходимо найти параметры γ_i . В силу того, что преобразования (3) являются формулами Виета, они могут быть вычислены как корни полинома

$$\gamma^m + a_1 \gamma^{m-1} + a_2 \gamma^{m-2} + \dots + a_m = 0. \quad (6)$$

Отметим, что в практически важном для применения сверхразрешающих методов случае, когда число источников не превосходит трёх ($J \leq 3$), корни полинома (6) можно найти аналитически [18]. В остальных случаях для их поиска необходимо применять численные методы.

Величина $I^{(m)}$ СКО аппроксимации минимального многочлена корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ многочленом степени m должна сравниваться с выбранным порогом Th . В работах [9, 19] рекомендовано выбирать порог в окрестности значения метрики $I^{(1)}$ при отсутствии источников сигналов ($\text{Th} \lesssim \langle I_{\text{noise}}^{(1)} \rangle$) и получено, что

$$\langle I_{\text{noise}}^{(1)} \rangle = (N^2 - 1)(N + L)^{-1}. \quad (7)$$

Применение такого порога позволяет эффективно решать задачу обнаружения слабых источников на фоне собственного шума [9, 10]. Для оценки числа близкорасположенных источников с произвольной мощностью возникает необходимость коррекции порога, которая может быть выполнена на основе априорной информации о существовании хотя бы одного источника. Такая информация может быть получена достаточно просто с помощью предварительного сканирования области наблюдения лучом антенной решётки. В результате можно определить область (одну или несколько), где имеются источники сигналов.

В случае одного источника ($J = 1$) степень минимального многочлена корреляционной матрицы $\mathbf{M}$ равна двум ($m = 2$). Если аппроксимировать этот многочлен многочленом первой степени, то СКО аппроксимации будет близка (снизу) к величине $I^{(1)} = N - 1$ [14]. При двух источниках

($J = 2$) степень минимального многочлена увеличивается до трёх ($m = 3$), а СКО аппроксимации минимального многочлена многочленом первой степени по-прежнему будет близка (снизу) к величине $I^{(1)} = N - 1$. Если аппроксимировать этот многочлен многочленом второй степени, то СКО уменьшится и будет близка (снизу) к величине $I^{(2)} = N - 2$. Приведённые оценки тем точнее, чем больше мощность источников.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ

Для оценки угловых положений источников используется тот факт, что N -мерное векторное пространство разбивается на прямую сумму двух ортогональных подпространств: сигнального и шумового. При пеленгации проводится поиск таких направлений прихода сигнала, при которых фазирующий вектор (вектор комплексных амплитуд плоской волны) имел бы нулевую проекцию на шумовое подпространство. Свойства корреляционной матрицы гарантируют существование ровно J направлений, удовлетворяющих указанному условию.

Оценка матрицы-проектора на шумовое подпространство равна [9, 10]

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}} = \left[\prod_{k=1}^{\hat{m}-1} (\mathbf{I} - \gamma_k \hat{\mathbf{M}}) \right] \left[\prod_{k=1}^{\hat{m}-1} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{\hat{m}}} \right) \right]^{-1}, \quad (8)$$

где $\gamma_{\hat{m}}$ — наибольший из найденных параметров γ .

Реализация корневого варианта метода минимального многочлена подразумевает поиск корней полинома степени $2N - 2$, получаемого из выражения

$$f(\varphi) = \mathbf{S}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^H \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}} \mathbf{S}(\varphi), \quad (9)$$

где $\mathbf{S}(\varphi)$ — вектор произвольного направления φ (вектор поиска). Для линейной эквидистантной антенной решётки n -я компонента вектора $\mathbf{S}(\varphi)$ равна $S(\varphi)_n = \exp[j(n-1)2\pi d_\lambda \sin \varphi]$, где d_λ — период антенной решётки, выраженный в длинах волн λ . Если вместо действительной переменной φ ввести комплексную переменную $z = \exp(j2\pi d_\lambda \sin \varphi)$, то вектор поиска $\mathbf{S}(z) = (1, z, z^2, \dots, z^{N-1})^T$, где индекс «Т» обозначает транспонирование, а полином $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} p_n z^n; \quad p_n = \sum_{k=1}^{N-n} A_{k,k+n}; \quad p_{-n} = p_n^*; \quad n \geq 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^H \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}$, звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Из выражений (10) следует, что все $2N - 2$ корней полинома $f(z)$ разбиваются на $N - 1$ пар: если z_1 — корень полинома $f(z)$, то $1/z_1^*$ также его корень. Корни из каждой пары имеют одинаковые аргументы и в комплексной плоскости лежат по разные стороны от единичной окружности (внутри и снаружи). На основе этой оценки из корней полинома (10) необходимо отобрать $\hat{J} = \hat{m} - 1$ штук, наиболее близких к единичной окружности на комплексной плоскости и лежащих либо внутри, либо вне этой окружности. Угловая координата φ_i i -го источников вычисляется на основе отобранного i -го корня z_i по формуле

$$\varphi_i = \arcsin \left[\frac{\arg(z_i)}{2\pi d_\lambda} \right]. \quad (11)$$

Для пеленгации источников сигналов с помощью стандартного корневого подхода необходимо найти $2N - 2$ корней полинома $f(z)$, что представляет собой достаточно сложную с вычислительной точки зрения задачу, особенно при многоэлементных антенных решётках. Рассмотрим возможность построения более простого полинома на основе $f(z)$. Учтём, что вектор $\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}} \mathbf{S}(\varphi)$ принадлежит шумовому подпространству, которому принадлежит также любой из вектор-столбцов, образующих матрицу $\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}$. Поэтому вместо полинома (9) можно искать корни усечённого полинома вида

$$f_1(\varphi) = (\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}})_1^H \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}} \mathbf{S}(\varphi), \quad (12)$$

где $(\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}})_1$ — первый столбец оценки матрицы-проектора $\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}$ на шумовое подпространство. Выражение (12) является более простым и отличается от (9) тем, что произведение $\mathbf{S}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^H$ заменено первым вектором-строкой $(\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}})_1^H$ матрицы-проектора. Полином $f_1(z)$ имеет в два раза меньшую степень, равную $N - 1$. Из корней полинома (12), согласно стандартному подходу, необходимо отобрать $\hat{J}$ наиболее близких к единичной окружности и затем получить оценки углового положения источников с помощью (11).

Особенность условий экспериментов заключалась в высоком уровне взаимной корреляции вторичных источников сигналов, что приводит к значительному снижению эффективности сверхразрешающих методов. Поэтому при обработке сигналов применялась рекомендованная процедура пространственного сглаживания корреляционной матрицы, которая основана на разделении антенной решётки на перекрывающиеся подрешётки, состоящие из соседних элементов [6, 7]. При этом использовалось совместное (прямое и обратное) сглаживание. Конкретные значения параметров данной процедуры приведены ниже.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ ЧИСЛА И КООРДИНАТ ИСТОЧНИКОВ

Эксперименты проводились на макете активного автомобильного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн с азимутальной линейной антенной решёткой. Последняя состояла из 11 слабонаправленных антенн, 9 из которых образуют эквидистантную решётку с шагом $0,55\lambda$, а 2 крайние антенны отнесены на $1,1\lambda$ каждая. Ширина главного луча диаграммы направленности антенной решётки на уровне 3 дБ составляла $\Delta\varphi_{\text{beam}} = 7,7^\circ$. В качестве источников сигналов применялись широко используемые в радиолокации уголкового отражатели треугольной формы, которые после трёхкратного отражения возвращают падающий луч в направлении источника излучения [20]. Отражатели и антенная решётка находились на высоте около 0,5 м над асфальтированной поверхностью. На выходе антенн располагались приёмники с аналого-цифровыми преобразователями, и в каждой антенне реализовывалась временная обработка сигналов. В качестве зондирующих использовались импульсы с линейной частотной модуляцией. В результате выполнялось измерение дальности и доплеровского сдвига частоты и находился элемент в плоскости «дальность—частота» на выходе каждой антенны. Затем сигналы с этого элемента поступали на пространственную обработку. При этом после временной обработки обеспечивались достаточно высокие ОСШ (порядка 20 дБ и более). Для обработки полученных данных использовались метод минимального многочлена (корневой вариант), критерий MDL и корневой метод MUSIC.

В экспериментах были реализованы статические и динамические сценарии с неподвижным и подвижным радиолокатором соответственно. Статических сценариев было 9, из них 1 сценарий с одним уголкового отражателем, расположенным в горизонтальной плоскости по нормали к антенной решётке, и 8 сценариев с двумя отражателями, расположенными симметрично отно-

сительно нормали к решётке. Для каждого сценария задавались дальность R до отражателей и расстояние $2D$ между ними (геометрия экспериментов показана на рис. 1). В силу специфических особенностей радиолокатора на выходе каждой из антенн регистрировалась только одна выборка, т. е. длина входного процесса была $L = 1$. В двух динамических сценариях радиолокатор располагался на автомобиле и приближался к уголкам по прямой линии со скоростью около 5 км/ч. Параметры всех сценариев представлены в табл. 1, где $a = \Delta\varphi/\Delta\varphi_{\text{beam}}$, $\Delta\varphi$ — угловое расстояние между отражателями, вычисленное из геометрических данных. Видно, что $\Delta\varphi$ значительно меньше ширины луча $\Delta\varphi_{\text{beam}}$ во всех статических сценариях.

В статических сценариях взаимная корреляция вторичных источников сигналов близка к единице из-за неподвижности отражателей и антенны радиолокатора. В динамических сценариях она уменьшается за счёт движения антенны радиолокатора, но также остаётся высокой. В связи с высоким уровнем взаимной корреляции вторичных источников сигналов, особенно в статических сценариях с неподвижными уголковыми отражателями, при обработке сигналов всегда применялась процедура пространственного (прямого и обратного) сглаживания корреляционной матрицы. Антенная решётка, конфигурация которой представлена на рис. 2, разделялась на 5 эквидистантных подрешёток по 4 элемента в каждой с номерами элементов 1, 2, 4, 6; 2, 4, 6, 8; 3, 5, 7, 9; 4, 6, 8, 10 и 6, 8, 10, 11 соответственно. В результате одна выборка сигналов $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}]$ в элементах антенной решётки порождала матрицу сигналов с размерностью 4×10 вида

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_{11}^* & x_{10}^* & x_9^* & x_8^* & x_6^* \\ x_2 & x_4 & x_5 & x_6 & x_8 & x_{10}^* & x_8^* & x_7^* & x_6^* & x_4^* \\ x_4 & x_6 & x_7 & x_8 & x_{10} & x_8^* & x_6^* & x_5^* & x_4^* & x_2^* \\ x_6 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_6^* & x_4^* & x_3^* & x_2^* & x_1^* \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Обозначим число выборок при прямом или обратном сглаживании корреляционной матрицы как L_{ef} . Тогда матрицу $\mathbf{Y}$ можно рассматривать как матрицу $2L_{\text{ef}}$ временных выборок в N_{ef} -элементной антенной решётке. Таким образом, при заданной конфигурации решётки и параметрах процедуры пространственного сглаживания эффективное число элементов решётки $N_{\text{ef}} = 4$, а эффективная длина входного процесса $L_{\text{ef}} = 5$. При этом, с учётом двойного сглаживания, порог (7) метода минимального многочлена преобразуется к виду [11]

$$\langle I_{\text{noise}}^{(1)} \rangle \approx (N_{\text{ef}}^2 - 1)(N_{\text{ef}} + L_{\text{ef}})^{-1}. \quad (14)$$

Для уменьшения влияния погрешностей вычислений при значительном изменении мощности вторичных источников целесообразно пользоваться нормированной корреляционной матрицей входного процесса. Максимально правдоподобная оценка (1) корреляционной матрицы $\mathbf{V}$ с учё-

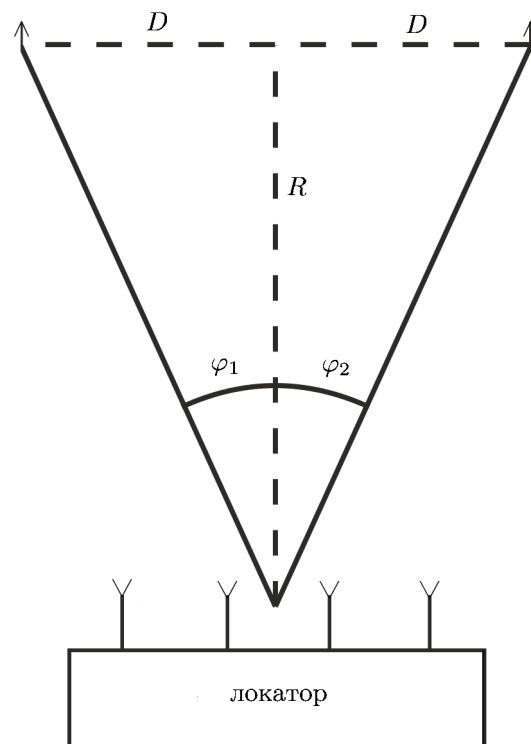


Рис. 1

Таблица 1

№	D , м	R , м	a
статические сценарии			
1	—	63	—
2	1,5	63	0,35
3	1,5	63	0,35
4	2,0	78	0,37
5	1,8	63	0,42
6	1,8	63	0,42
7	2,0	63	0,47
8	2,3	63	0,54
9	2,8	63	0,65
динамические сценарии			
10	1,5	$3 \div 63$	—
11	2,0	$4 \div 80$	—

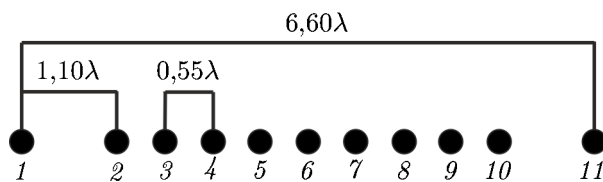


Рис. 2

но сделать оценку числа источников сигналов, что обычно выполняется на основе критерия MDL (Minimum Description Length). В соответствии с этим критерием за оценку числа источников принимается положение минимума модифицированной функции правдоподобия по переменной J . При использовании процедуры совместного (прямого и обратного) пространственного сглаживания корреляционной матрицы модифицированная функция правдоподобия имеет вид [21]

$$F(J) = L_{\text{ef}}(N_{\text{ef}} - J) [\lg f_1(J) - \lg f_2(J)] + f_3(J), \quad (16)$$

где функции $f_1(J)$ и $f_2(J)$ представляют собой соответственно арифметическое и геометрическое среднее шумовых собственных чисел выборочной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$, а так называемая «штрафная» функция $f_3(J)$ выбирается эмпирически и равна $f_3(J) = 0,25J(2N_{\text{ef}} - J + 1) \lg(0,5L_{\text{ef}})$.

После оценки $\hat{J}$ числа источников для определения их угловых координат в соответствии с корневым методом MUSIC находятся корни полинома типа (10), в котором используется шумовой проектор, равный

$$\hat{P}_{\text{noise}} = \mathbf{I} - (\hat{\mathbf{U}}_1 \hat{\mathbf{U}}_1^H + \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^H + \dots + \hat{\mathbf{U}}_{\hat{J}} \hat{\mathbf{U}}_{\hat{J}}^H), \quad (17)$$

где $\hat{\mathbf{U}}_j$ — собственные векторы выборочной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$, соответствующие её наибольшим (сигнальным) собственным числам [6, 7]. Число этих корней $2N - 2$. Для уменьшения числа корней в два раза вместо полинома (10) можно использовать усечённый полином (12).

Для статических сценариев на рис. 3 и 4 представлены экспериментальные гистограммы для СКО аппроксимации минимального многочлена выборочной корреляционной матрицы (15) в случае одного ($J = 1$) и двух ($J = 2$) источников соответственно. На них изображены три метрики

том процедуры пространственного сглаживания имеет вид

$$\mathbf{V} = F^{-1} \sum_{k=1}^{L_{\text{ef}}} \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^H, \quad F = \text{Sp} \left(\sum_{k=1}^{L_{\text{ef}}} \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^H \right), \quad (15)$$

где $\mathbf{Y}_k$ — k -й столбец матрицы $\mathbf{Y}$ (13), F — нормировочный множитель. Выборочная корреляционная матрица (15) является эрмитовой и симметричной относительно побочной диагонали. Отметим, что в реализуемом алгоритме метода минимального многочлена наибольшую вычислительную сложность имеет процедура возведения в степень выборочной корреляционной матрицы. Однако для нахождения метрик $I^{(m)}$ и параметров γ_n достаточно знать след от степени корреляционной матрицы, что, в совокупности со свойством симметрии сглаженной корреляционной матрицы относительно побочной диагонали, позволяет значительно сократить выполняемый объём вычислений.

При использовании сверхразрешающего корневого метода MUSIC необходимо предварительно

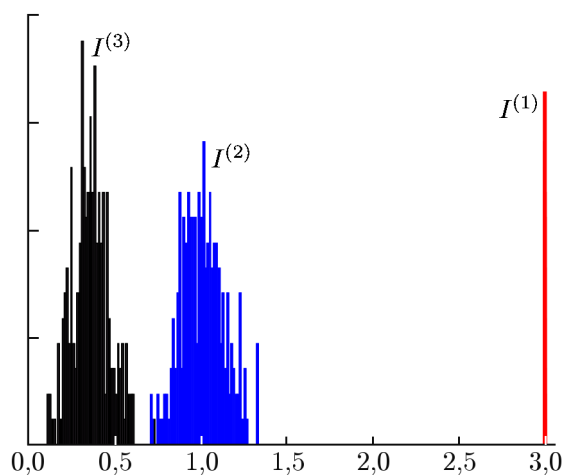


Рис. 3

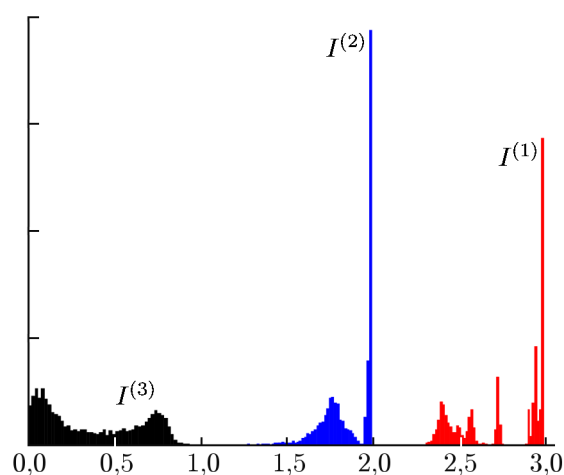


Рис. 4

$I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$. Гистограмма для $J = 1$ строилась по данным, полученным при наличии одного углового отражателя, расположенного по нормали к антенной решётке, а для $J = 2$ — по объединённым данным сценариев 2–9 (см. табл. 1). При $J = 1$ средние значения и СКО (даны в скобках) трёх метрик равны: $I^{(1)} = 3,0$ (0,0), $I^{(2)} = 1,0$ (0,1) и $I^{(3)} = 0,4$ (0,1), а при $J = 2$ имеет $I^{(1)} = 2,8$ (0,2), $I^{(2)} = 1,9$ (0,1) и $I^{(3)} = 0,4$ (0,3). Эти результаты согласуются с приведёнными выше теоретическими данными. Наличие нескольких максимумов в гистограмме для одной и той же метрики при двух источниках объясняется разбросом ОСШ в различных сценариях. Исходя из полученных результатов, для обработки экспериментальных данных был выбран порог $\text{Th} = 1,5$. Такой порог, как будет показано ниже, позволил достигнуть высокой вероятности правильного определения числа источников во всех экспериментах. Отметим, что формула (14) при $N_{\text{ef}} = 4$ и $L_{\text{ef}} = 5$ даёт значение порога 1,67.

Вероятность правильной оценки числа источников приведена в табл. 2 для метода минимального многочлена ($p^{(1)}$) и критерия MDL ($p^{(2)}$). В каждом сценарии проводилось достаточно большое число независимых измерений (от 233 до 1 063), и затем результаты усреднялись. Видно, что метод минимального многочлена обеспечивает значительно более высокую вероятность правильной оценки. Отличие вероятности от единицы обусловлено тем, что оцениваемое число источников было больше реального (3 вместо 2). Такое отличие связано с тем, что критерий MDL построен на эмпирически задаваемой «штрафной» функции, в то время как метод минимального многочлена основан на статистически обоснованном среднеквадратическом критерии.

В используемом радиолокаторе в результате пространственного сглаживания эффективное число элементов антенной решётки равно $N_{\text{ef}} = 4$. При этом имеется возможность упрощения вычислений, т. к. уравнение (14) даёт полиномы степени $m = 1, 2, 3, 4$, корни которых находятся в аналитическом виде. Более того, усечённый полином $f_1(z)$ имеет третью степень ($N_{\text{ef}} - 1 = 3$) и для отыскания его корней также существуют аналитические выражения [18].

Результаты оценки угловых координат источников сигналов в статических сценариях представлены в табл. 3. При проведении экспериментов плоскость антенной решётки ориентировалась

Таблица 2

сценарий	a	$p^{(1)}$	$p^{(2)}$
1	—	—	—
2	0,35	1,0	0,99
3	0,35	1,0	0,63
4	0,37	1,0	0,95
5	0,42	1,0	0,48
6	0,42	1,0	0,00
7	0,47	1,0	1,00
8	0,54	1,0	0,02
9	0,65	1,0	0,64

Таблица 3

сценарий	a	$\Delta\varphi$	$\langle\Delta\varphi^{(1)}\rangle$	$\sigma^{(1)}$	$\langle\Delta\varphi^{(2)}\rangle$	$\sigma^{(2)}$
1	—	—	—	0,04 (0,03)	—	0,05 (0,04)
2	0,35	2,7	1,76 (2,09)	0,18 (0,15)	1,75 (2,09)	0,18 (0,15)
3	0,35	2,7	2,63 (2,13)	0,25 (0,22)	2,86 (2,16)	0,10 (0,16)
4	0,37	2,9	3,70 (3,26)	0,18 (0,25)	3,70 (3,25)	0,18 (0,24)
5	0,42	3,3	2,24 (2,97)	0,19 (0,17)	2,22 (2,93)	0,18 (0,16)
6	0,42	3,3	3,29 (2,28)	0,12 (0,16)	—	—
7	0,47	3,7	3,94 (4,01)	0,07 (0,07)	3,94 (3,95)	0,07 (0,07)
8	0,54	4,2	4,38 (4,44)	0,05 (0,05)	—	—
9	0,65	5,1	5,09 (5,11)	0,14 (0,14)	5,25 (5,27)	0,07 (0,07)

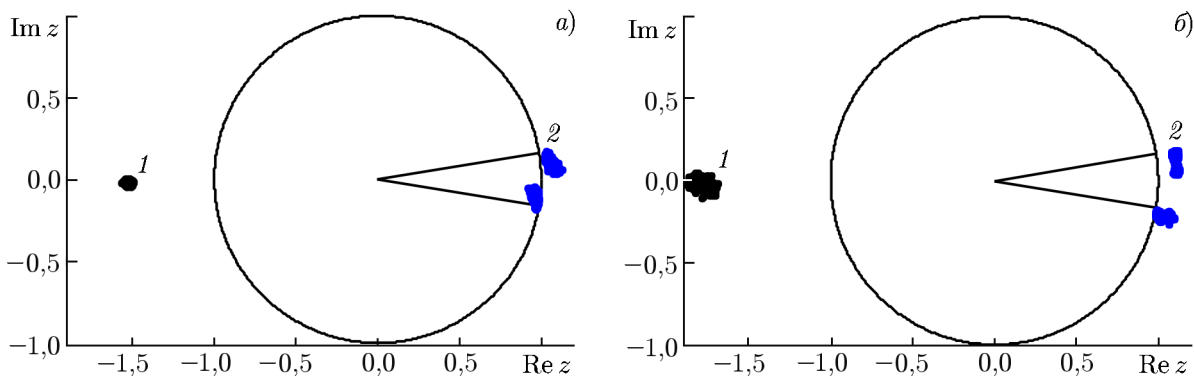


Рис. 5

приблизённо в направлении, ортогональном линии, соединяющей уголкового отражатели (см. рис. 1). Поэтому в табл. 3 для каждого сценария приведены оценки среднего углового разнесения $\langle\Delta\varphi\rangle$ уголкового отражателей и СКО σ оценки координат каждого отражателя. Оценки были получены на основе вычисления корней полинома третьей степени (выражение (12)), а также полинома шестой степени (выражение (9)), которые приведены в скобках. Верхние индексы «1» и «2» относятся к методам минимального многочлена и MUSIC соответственно.

Из полученных результатов следует, что при использовании полинома третьей степени (выражение (12)) средняя ошибка оценки среднего углового разнесения уголкового отражателей, усреднённая по сценариям 2–9, составила $0,58^\circ$ для метода минимального многочлена и $0,68^\circ$ для корневого метода MUSIC, а СКО σ оценки координат отражателей получились равными $0,16^\circ$ и $0,14^\circ$ соответственно. При использовании полинома шестой степени (выражение (9)) средняя ошибка равна $0,52^\circ$ для метода минимального многочлена и $0,41^\circ$ для корневого метода MUSIC, а СКО σ практически не изменилось и составило $0,16^\circ$ и $0,15^\circ$ соответственно. Различие в полученных результатах в разных сценариях можно объяснить, по-видимому, различным ОСШ на входе системы временной обработки и наличием помехи в том же элементе дальности и скорости, что и цель, но с отличающимся угловым положением. Тем не менее, из полученных результатов следует, что во всех сценариях удалось добиться углового разрешения близкорасположенных источников.

Положение корней усечённого полинома (12) на комплексной плоскости для сценариев 1 и 2 представлено на рис. 5а и б соответственно. На них показаны окружность единичного радиуса и лучи, соответствующие аргументу комплексной переменной z для точных положений источников, синим цветом и цифрой 2 отмечены корни, связанные с источниками, а чёрным цветом и цифрой 1 — шумовые.

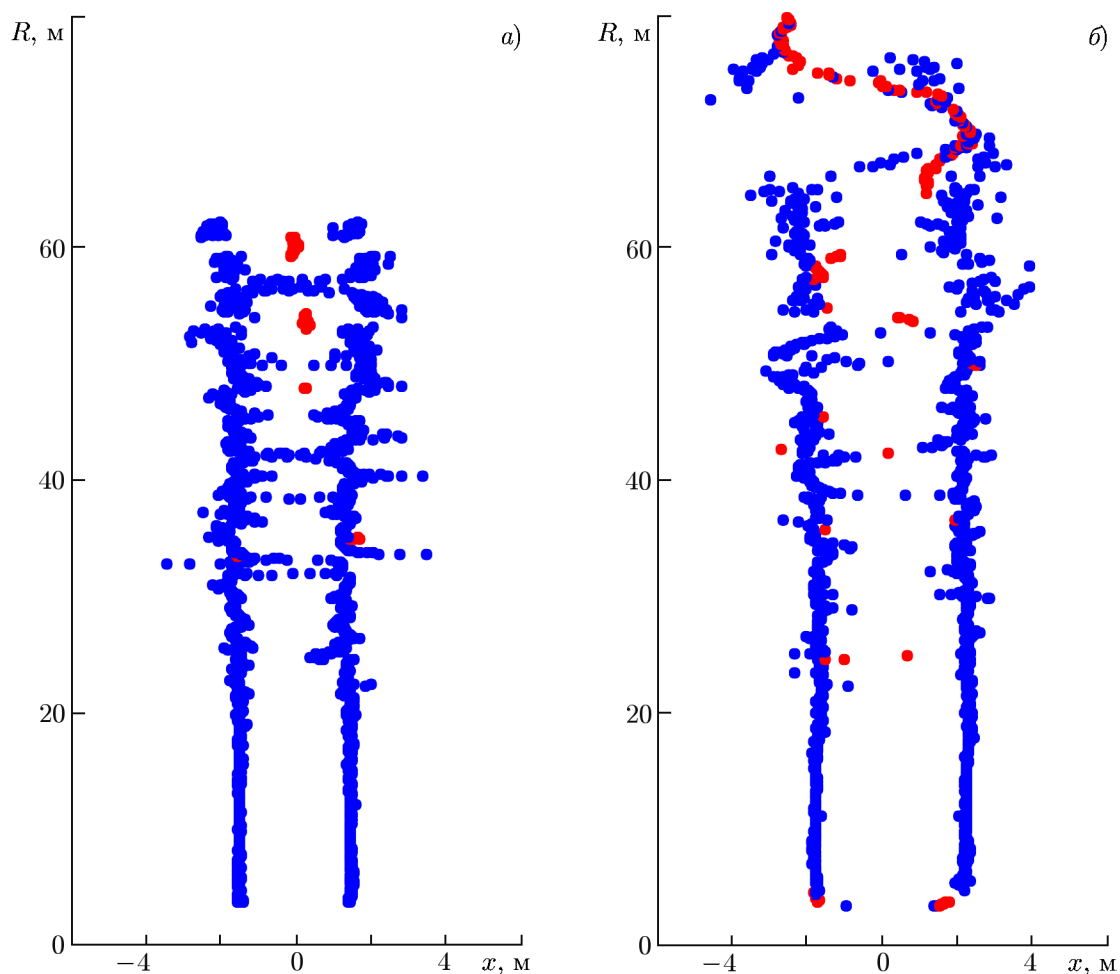


Рис. 6

В динамических сценариях радиолокатор приближался к уголковым отражателям равномерно по прямой линии. На рис. 6 в декартовой системе координат показаны оценки положения уголкового отражателя в виде треков для сценариев 10 (слева) и 11 (справа). Синими точками на них отмечены оценки положения уголкового отражателя в случае правильного определения их числа, красными — если ошибочно обнаруживался только один источник. На рис. 7 показана соответствующая зависимость ОСШ от дальности R . Для сценария 10 отражатели имели координаты $x = \pm 1,5$ м, а разрешение обеспечивалось на всех дальностях до $R = 63$ м (угловое расстояние $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{\text{beam}} \geq 0,23$). Для сценария 11 координаты отражателей $x = \pm 2$ м, а разрешение осуществлялось при $R < 66$ м (угловое расстояние $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{\text{beam}} \geq 0,29$). Вероятность правильной оценки числа источников составила 96 % и 87 % для сценариев 9 и 10 соответственно. Ухудшение точности определения положения уголкового отражателя на некоторых дальностях, например при $R = 55 \div 60$ м на рис. 7б, объясняется уменьшением величины ОСШ из-за интерференции прямого и отражённого от земли лучей. Некоторая неровность линий объясняется небольшими неконтролируемыми поперечными смещениями антенной решётки от линии прямолинейного движения.

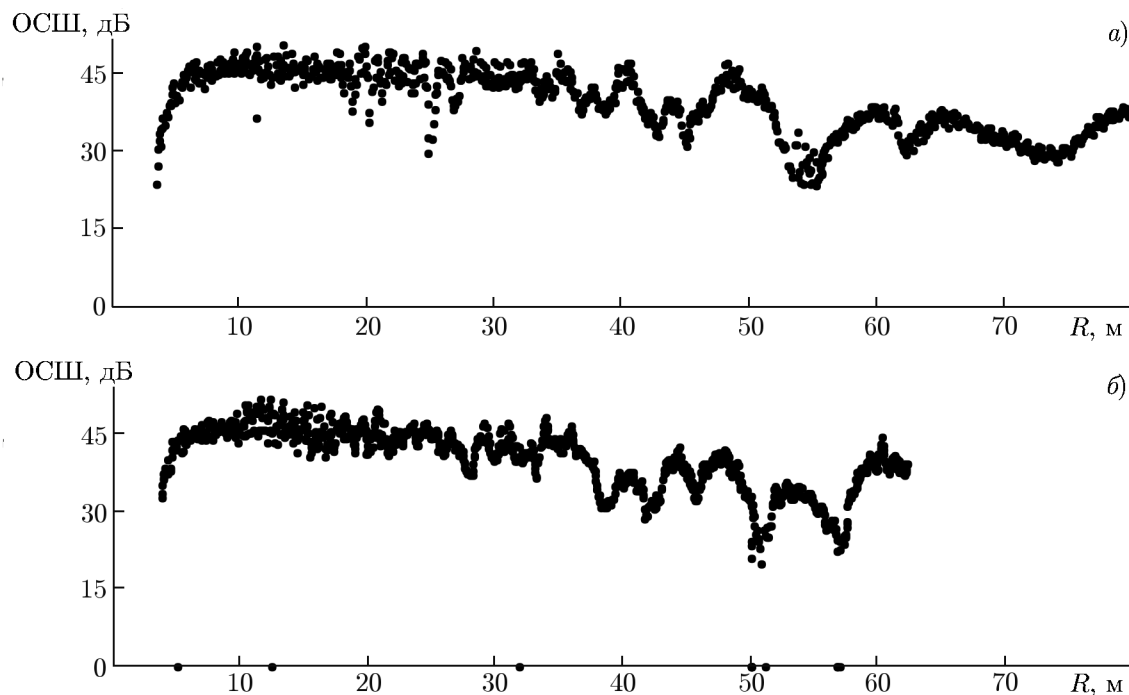


Рис. 7

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные с помощью автомобильного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн. Источники сигналов были коррелированы между собой, а входной процесс состоял только из одной выборки. Обработка полученных данных проводилась с помощью метода минимального многочлена (корневой вариант), критерия MDL и корневого метода MUSIC. В результате установлено следующее.

Метод минимального многочлена обеспечивал вероятность правильной оценки числа источников, близкую к 100 % во всех сценариях, и показал существенно более высокую эффективность по сравнению с критерием MDL.

Метод минимального многочлена обеспечивал сверхразрешение источников при угловом расстоянии в $4\div 5$ раз меньшем ширины диаграммы направленности антенной решётки. Эффективность данного метода по точности оценки координат источников сигналов практически совпала с эффективностью корневого метода MUSIC при условии, что в последнем истинное число источников считалось известным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: справочник / Под ред. Я. Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007. 512 с.
2. Ратынский М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках. М.: Радио и связь, 2004. 199 с.
3. Сазонтов А. Г., Малеханов А. И. // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 2. С. 233.
4. Караваев В. В. Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.

5. Турчин В. И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. 116 с.
6. Godara L. C. Smart antennas. Boca Raton, London, New York, Washington: CRC Press, 2004. 448 p.
7. Classical and modern direction-of-arrival estimation / Ed. by T. E. Tuncer, B. Friedlander. Burlington: Academic Press, 2009. 456 p.
8. Родионов А. А., Турчин В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 1. С. 60.
9. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Анушин А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С. 1144.
10. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Елохин А. В., Купцов В. В. // Акуст. журн. 2018. Т. 64, № 1. С. 78.
11. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Елохин А. В., Шмонин О. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 3. С. 261.
12. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Елохин А. В., Купцов В. В. // Сб. трудов X Всерос. конф. «Радиолокация и радиосвязь», Москва, 21–23 ноября 2016 года. М.: ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. 2016. С. 100.
13. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Елохин А. В., Шмонин О. А. // Труды XXI Научной конф. по радиофизике, Нижний Новгород, 15–22 мая 2017 года. С. 319.
14. Ермолаев В. Т., Флакسمан А. Г., Елохин А. В., Шмонин О. А. // Труды XXI Научной конф. по радиофизике, Нижний Новгород, 15–22 мая 2017 года. С. 365.
15. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). Ч. 1–2. М.: Наука, 1972. 624 с.
18. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2008. 432 с.
19. Ермолаев В. Т. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 8. С. 841.
20. Кобак В. О. Радиолокационные отражатели. М.: Советское радио, 1975. 348 с.
21. Xu G., Roy R., Kailath T. // IEEE Trans. Signal Proc. 1994. V. 42, No. 1. P. 102.

Поступила в редакцию 1 июня 2018 г.; принята в печать 28 ноября 2018 г.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE ANGULAR SUPERRESOLUTION OF TWO CORRELATED SIGNALS USING THE METHOD OF MINIMUM POLYNOMIAL

V. T. Ermolaev, A. G. Flaksman, A. V. Elokhin, and O. A. Shmonin

We present experimental results on the superresolution of two closely located signal sources, which were obtained using an automotive radar of the millimeter wavelength range. The signal sources were correlated among themselves and the input process consisted of only one sample. The method of minimum polynomial (the root variant) was compared with the MDL (Minimum Description Length) criterion when determining the number of the sources and with the root MUSIC (Multiple Signal Classification) method when estimating their angular location. The method of minimum polynomial is shown to have a higher efficiency compared with the MDL criterion and ensures the source superresolution for the angular distance which is a factor of 4–5 smaller than the width of the antenna-array pattern. The efficiency of this method almost coincides with that of the root MUSIC method if the number of the sources is considered to be known in the latter.

V. T. Ermolaev, A. G. Flaksman, A. V. Elokhin, O. A. Shmonin