

УДК 551.594

## ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

*Н. А. Денисова<sup>1\*</sup>, А. В. Калинин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

<sup>2</sup> Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Получено новое аналитическое представление решения для классической модели глобальной электрической цепи Робла—Хейса, в которой в граничных условиях учитывается связь значений электрического потенциала и тока в магнитосопряжённых точках верхней границы атмосферы. С использованием этого представления проанализировано влияние на распределение потенциала различных граничных условий на верхней границе атмосферы и дана оценка возмущений электрического поля грозowymi источниками в магнитосопряжённых точках.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение распределения электрических токов является одной из основных задач теории атмосферного электричества [1–3]. Оно связано с исследованием пространственных зависимостей электрических полей в атмосфере, вызванных сторонними токами, которые моделируют токи разделения заряда в грозовом облаке. Обсуждение ряда основных моделей глобальной электрической цепи и библиография по этому вопросу содержатся в работах [1–9], в частности, достаточно полный список литературы по аналитическим результатам представлен в работе [3].

Постановки задач для большинства существующих моделей глобальной электрической цепи не учитывают эффект связи электрических полей в магнитосопряжённых точках на верхней границе атмосферы. В частности, модели с эквипотенциальной верхней границей не позволяют учесть этот эффект в принципе.

Впервые исследование задачи, в которой в качестве граничных условий на верхней границе атмосферы были предложены соотношения, связывающие значения электрического потенциала и токов в магнитосопряжённых точках, проведено в классической работе Робла и Хейса [10]. Модель Робла—Хейса по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку в ней сделана попытка учесть влияние магнитосферы на глобальную электрическую цепь. Однако в работе [10] исследование распределения потенциала и поля проводилось только численно, при этом влияние условий на верхней границе на распределение электрического поля не анализировалось.

Целью данной работы является аналитическое исследование влияния выбора граничных условий (в первую очередь, на верхней границе атмосферы) на распределение электрического потенциала и поля в моделях глобальной электрической цепи и оценка возмущений, создаваемых грозowymi генераторами, в магнитосопряжённых точках.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе рассматривается задача о распределении электрического потенциала для атмосферы в виде шарового слоя  $r_1 < r < r_m$ , проводимость которого экспоненциально возрастает по радиусу,

\* natasha.denisova@mail.ru

с распределённым стационарным вертикальным током. Её математическая формулировка имеет вид [10]

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \phi) = \operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ext}}, \quad (1)$$

$$\phi(r, \theta, \varphi)|_{r=r_m} = \phi(r, \pi - \theta, \varphi)|_{r=r_m}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_m} = - \left. \frac{\partial \phi(r, \pi - \theta, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_m}, \quad (3)$$

$$\left( \phi - \Delta R \sigma_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma(r) = \sigma_0 \exp[(r - r_0)/H]$  — электрическая проводимость атмосферы,  $\sigma_0$  — электрическая проводимость вблизи сферической земной поверхности,  $r$  — расстояние от центра Земли,  $r_0$  — радиус Земли (при численных расчётах использовались следующие значения:  $r_0 = 6370$  км,  $H = 6$  км),  $\mathbf{J}^{\text{ext}}$  — плотность сторонних электрических токов, создаваемых грозowymi генераторами,  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты. Граничные условия (2) и (3) записываются на нижней границе магнитосферы над Землёй, где существенна анизотропия электрической проводимости и электрические токи текут вдоль силовых линий магнитного поля. Граничное условие третьего рода (4) согласует на границе  $r = r_1$  потенциал и ток [10]. Столбцовое сопротивление  $\Delta R$  усреднённым образом учитывает топографию суши,  $\sigma_1$  — значение электрической проводимости при некотором  $r = r_1$ .

Следует отметить, что задача (1)–(4) в силу граничных условий (2) и (3) не является классической задачей математической физики. Вопросы математической корректности этой и других моделей глобальной электрической цепи обсуждаются в работах [11–13].

В работе [10] в основу численного алгоритма решения задачи (1)–(4) положено разложение решения в сумму по сферическим функциям со специальным способом суммирования членов ряда (суммирование по Чезаро). В результате численных экспериментов (с учётом 37 членов ряда) анализируется влияние параметров источников и их расположения на распределение электрического потенциала в атмосфере в предположении, что нижняя граница магнитосферы, на которой задаются верхние граничные условия, находится на высоте  $h_m = 105$  км над поверхностью Земли,  $h_m = r_m - r_0$ . В работе [14] в частном случае, когда  $\Delta R = 0$ , получены формулы для коэффициентов разложения электрического потенциала по сферическим функциям и также обсуждаются вопросы влияния параметров источников на электрическое поле и возможности учёта топографии в рамках рассматриваемой модели.

В данной работе в основу аналитического исследования также положено разложение решения и источников по сферическим функциям. При  $\Delta R \geq 0$  получены выражения для коэффициентов ряда, аналогичные найденным в работе [14]. С использованием теоремы о сложении присоединённых полиномов Лежандра получена новая формула для электрического потенциала в виде суперпозиции двух полей (см. Приложение), одно из которых совпадает при  $h_m \rightarrow \infty$  с полем, создаваемым источником правой части (1)–(4) при граничном условии

$$\phi|_{r \rightarrow \infty} = V_\infty, \quad (5)$$

которое используется вместо условий (2) и (3). Такое разложение позволило явно выделить возмущение электрического поля в сопряжённых по отношению к расположению источника точках и сравнить решения двух разных задач для уравнения (1): задачи с граничными условиями (2)–(4) и задачи с условиями (4) и (5).

Будем рассматривать отдельный источник стороннего тока с номером  $s$ . В случае нескольких источников тока (например, грозowych генераторов) в формулах, приведённых ниже, следует

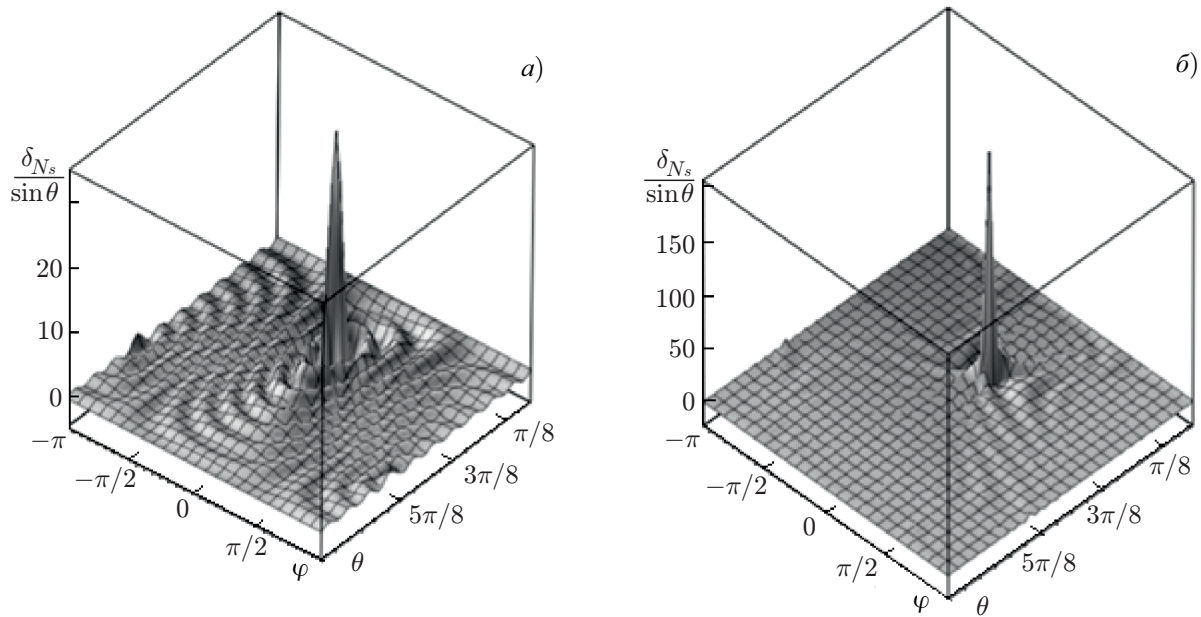


Рис. 1. График функции  $(1/\sin \theta)\delta_{N_s}(\theta, \pi/3, \varphi, 0)$  при  $N_s = 20$  (а) и  $N_s = 50$  (б)

провести суммирование по переменной  $s$ . Плотность стороннего радиального электрического тока запишем в виде

$$\mathbf{J}^{\text{ext}} = \frac{I_{s0}}{r^2 \sin \theta} [\theta(r - r_{s0}) - \theta(r - r_{s1})] \delta_{N_s}(\theta, \theta_{s0}, \varphi, \varphi_{s0}) \mathbf{e}_r, \quad (6)$$

где  $r_{s1}, r_{s0}$  — радиальные расстояния, соответствующие положительному и отрицательному зарядам грозового генератора, причём  $r_{s0} < r_{s1}$ ,  $I_{s0}$  — сила тока. Функцией  $\theta(r)$  обозначена функция Хевисайда,  $(1/\sin \theta)\delta_{N_s}(\theta, \theta_{s0}, \varphi, \varphi_{s0})$  — член дельтаобразной последовательности [16] с номером  $N_s$  вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \delta_{N_s}(\theta, \theta_{s0}, \varphi, \varphi_{s0}) &= \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^n \frac{Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \varphi) Y_{n,k}^{(1)}(\theta_{s0}, \varphi_{s0}) + Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \varphi) Y_{n,k}^{(2)}(\theta_{s0}, \varphi_{s0})}{\|Y_{n,k}\|^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N_s} (2n + 1) P_n(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между радиальным направлением на точку наблюдения и осью диполя,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_{s0} + \sin \theta \sin \theta_{s0} \cos(\varphi - \varphi_{s0}).$$

Последовательность (7) сходится при  $N_s \rightarrow \infty$  к обобщённой функции  $(\sin / \theta) \delta(\theta - \theta_{s0}) \delta(\varphi - \varphi_{s0})$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функции Дирака.

Сферические функции  $Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \varphi)$  и  $Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \varphi)$  связаны с присоединёнными функциями Лежандра формулами

$$Y_{n,k}^{(1)}(\theta, \varphi) = P_n^k(\cos \theta) \cos(k\varphi), \quad Y_{n,k}^{(2)}(\theta, \varphi) = P_n^k(\cos \theta) \sin(k\varphi)$$

и имеют норму

$$\|Y_{n,k}\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_k (n+k)!}{(2n+1)(n-k)!},$$

где  $\varepsilon_k = 1$  при  $k > 0$  и  $\varepsilon_0 = 2$ . На рис. 1 изображены графики двух членов последовательности при двух различных значениях  $N_s$ . Амплитуды этих функций принимают значение  $(N_s + 1)^2 / (4\pi)$  и находятся из формулы (7) при подстановке в неё  $\cos \gamma = 1$ .

Краевые задачи для уравнения (1) до сих пор не исследованы аналитически в полном объёме. Как правило, рассматривается уравнение, коэффициенты которого мало отличаются от коэффициентов уравнения (1) [10, 14]. В сферической системе координат

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \phi) = \sigma \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{H} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \Delta_{\theta, \varphi} \phi \right] \quad (8)$$

и во втором слагаемом отбрасывается член  $2/r$ . В данной статье, как и в работе [10], в третьем слагаемом в (8)  $1/r^2$  заменим на  $1/r_0^2$ . В получившемся уравнении делаем замену переменных

$$\sigma = \sigma_0 \exp[(r - r_0)/H], \quad \mu = \cos \theta. \quad (9)$$

В результате этой замены получим уравнение

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma^2 \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{r_0^2} \Delta_{\mu, \varphi} \phi = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ext}}, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_m, \quad (10)$$

где  $\sigma_m = \sigma(r_m)$ ,

$$\Delta_{\mu, \varphi} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}.$$

В новых переменных правая часть уравнения имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ext}} = \frac{I_{s0}}{H} \left[ \frac{1}{r_{s0}^2} \delta(\sigma - \sigma_{s0}) - \frac{1}{r_{s1}^2} \delta(\sigma - \sigma_{s1}) \right] \delta_{N_s}(\mu, \mu_{s0}, \varphi, \varphi_{s0}). \quad (11)$$

Выпишем преобразованные граничные условия (3)–(5):

$$\phi(\sigma_m, \mu, \varphi) = \phi(\sigma_m, -\mu, \varphi), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi(\sigma_m, \mu, \varphi)}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \phi(\sigma_m, -\mu, \varphi)}{\partial \sigma}, \quad (13)$$

$$\left( \phi - \frac{\Delta R \sigma_1^2}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) \Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (14)$$

Решение задачи (10)–(14), обобщающее решение соответствующей задачи в работе [14] на случай  $\Delta R \geq 0$ , приведено в Приложении. С использованием теоремы о сложении присоединённых полиномов Лежандра получено новое выражение для электрического потенциала в виде суперпозиции двух полей (П10)–(П16). Дальнейшее упрощение выражения для него зависит от параметров задачи  $H$ ,  $r_0$ ,  $h_1$ ,  $h_{s0}$ ,  $h_{s1}$ ,  $h_m$ ,  $\Delta R$ ,  $N_s$ , где высота  $h$  определяется из формулы  $h = r - r_0$ , так что  $h_1 = r_1 - r_0$ ,  $h_{s1} = r_{s1} - r_0$ ,  $h_{s2} = r_{s2} - r_0$ ,  $h_m = r_m - r_0$ . В дальнейшем полагаем  $h_1 = 0$ ,  $\Delta R = 0$ ,  $h_{s0} = 5$  км,  $h_{s1} = 10$  км (значения  $H$  и  $r_0$  приведены выше). Ниже анализируются формулы (П10)–(П16) в зависимости от параметра  $h_m$ . В формулах (П13)–(П16) есть суммы слагаемых вида  $(\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n}$  и  $(\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)$ , где  $\xi_n$  определяется по формуле (П7). При увеличении высоты  $h_m$  первое слагаемое уменьшается и, начиная с некоторого значения, становится существенно меньше второго слагаемого, т. е. формулы (П13)–(П16) можно упростить.

Для дальнейшего исследования и сравнения решений уравнения (1) с граничными условиями (2)–(4) и (5), (6) важную роль играет высота

$$h_m^* = h_{s1} + 2H \ln \left( \frac{r_0}{\sqrt{2} H} \right) + H \ln \left( 1 + \frac{4H^2}{r_0^2} \right) \approx h_{s1} + 2H \ln \left( \frac{r_0}{\sqrt{2} H} \right). \quad (15)$$

При выбранных значениях параметров  $h_{s1}$ ,  $H$  и  $r_0$  высота  $h_m^* = 89,5$  км.

Рассмотрим случай  $h_m = 120$  км ( $h_m > h_m^*$ ). Тогда справедливы неравенства

$$\left(\frac{\sigma_{s1}}{\sigma_m}\right)^{\xi_n} < \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_m} \ll \frac{\sigma_{s1}}{\sigma(h_m^*)} = \frac{2H^2}{r_0^2 + 4H^2} < \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} \leq \frac{\xi_n - 1}{\xi_n + 1}, \quad (16)$$

поэтому отношениями  $\sigma_1/\sigma_m$  и  $\sigma_{sj}/\sigma_m$  в формулах (П13)–(П16) можно пренебречь. В этом приближении  $\bar{T}_n^{(j)}(\sigma) \approx 0$  при всех  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_{s1}$ ,  $\bar{\bar{T}}_n^{(j)}(\sigma) \approx 0$ , если  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}$ . Поэтому значения потенциала под источниками и между источниками не зависят от выбора граничных условий. Над источниками в области  $\sigma_{s1} < \sigma < \sigma_m$  формула (П10) принимает вид

$$\phi_s = V_{\infty,s} + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) [A_n(\sigma)P_n(\cos \gamma) + B_n(\sigma)P_n(\cos \gamma_1)], \quad (17)$$

где

$$A_n(\sigma) = \frac{1}{\xi_n} \left[ \frac{1}{\sigma} C_n(\sigma) + B_n(\sigma) \right], \quad B_n(\sigma) = \frac{1}{\sigma(\xi_n - 1)} \left( \frac{\sigma}{\sigma_m} \right)^{\xi_n} C_n(\sigma), \quad (18)$$

$$C_n(\sigma) = \frac{Q_s}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\sigma_{s1}}{\sigma} \right)^{(\xi_n-1)/2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{s1}} \right)^{\xi_n} \right] - \left( \frac{\sigma_{s0}}{\sigma} \right)^{(\xi_n-1)/2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_{s0}} \right)^{\xi_n} \right] \right\}. \quad (19)$$

На ионосферных высотах при  $\sigma = \sigma_m$  коэффициенты (18) равны и, следовательно, электрический потенциал (17) принимает одинаковые значения в магнитосопряжённых точках  $(\sigma_m, \mu_{s0}, \varphi_{s0})$  и  $(\sigma_m, -\mu_{s0}, \varphi_{s0})$ . Кроме того, т.к.  $C_n(\sigma) > 0$ , то над источниками существенно меняется значение потенциала за счёт выбора параметра  $N_s$ . Поскольку для функции  $C_n(\sigma)$  при всех значениях  $\sigma_{s1} < \sigma < \sigma_m$  справедливо неравенство  $C_n(\sigma) \leq \xi_n \sigma_0 V_{\infty,s}$ , то для коэффициентов (18) получим оценки

$$B_n(\sigma) \leq \frac{\xi_1}{(\xi_1 - 1)} \frac{\sigma_0}{\sigma_m} V_{\infty,s}, \quad A_n(\sigma) \leq \left[ \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{(\xi_1 - 1)\sigma_m} \right] \sigma_0 V_{\infty,s}. \quad (20)$$

При любом фиксированном  $N_s$  в окрестности точки  $(\theta_{s0}, \varphi_{s0})$ , задаваемой неравенством  $\cos \gamma \geq \cos[1/(2N_s + 1)]$ , все полиномы Лежандра  $P_n(\cos \gamma)$ ,  $n = 1, \dots, N_s$ , принимают положительные значения [15]. Сравнивая коэффициенты  $A_n(\sigma)$  и  $B_n(\sigma)$ , можно ввести ещё один параметр

$$h_p \approx h_m - 2H \ln[r_0/(2H)], \quad (21)$$

такой, что при  $h_{s1} < h \ll h_p$

$$\frac{1}{\sigma} \gg \frac{1}{(\xi_1 - 1)\sigma_m}.$$

Тогда, в силу оценок (20), потенциал электрического поля (17) определяется выражением

$$\phi_s \approx V_{\infty,s} + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) \frac{C_n(\sigma)}{\sigma \xi_n} P_n(\cos \gamma). \quad (22)$$

Функция (22) является решением уравнения (10) при  $\sigma > \sigma_{s1}$  и удовлетворяет граничному условию  $V|_{\sigma \rightarrow \infty} = V_{\infty,s}$ .

Все численные результаты работы [10] были получены для случая  $N_s = 37$ . Покажем, что при  $h_m > h_m^*$  для  $N_s < 63$  формулы для потенциала (22) в области  $\sigma_{s1} < \sigma \ll \sigma_p$  можно упростить

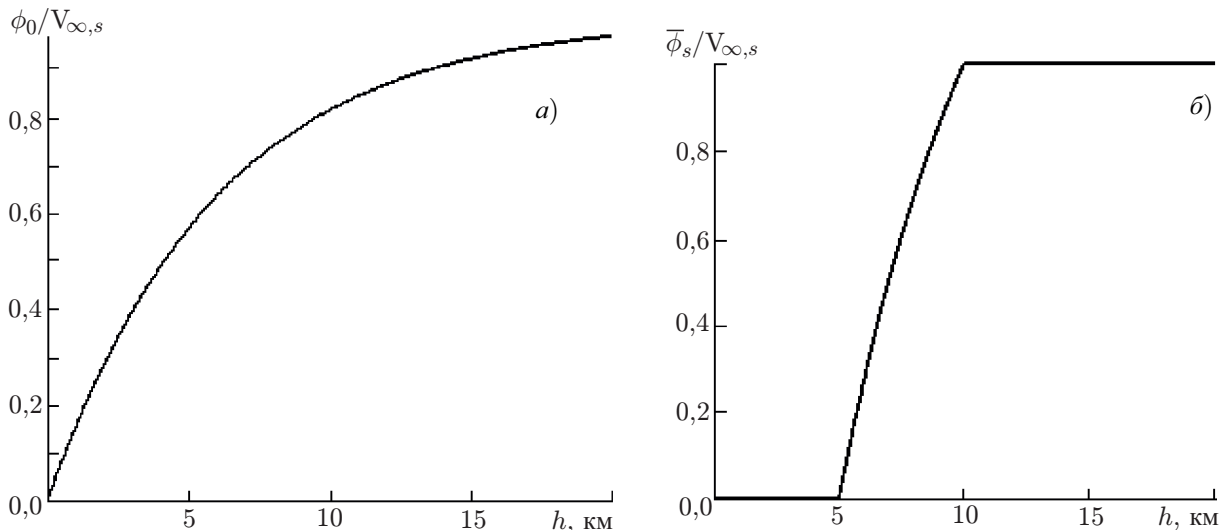


Рис. 2. График функции  $\phi_0(\sigma)/V_{\infty,s}$  (а) и сферическое среднее функции  $\phi_s/V_{\infty,s}$  (б)

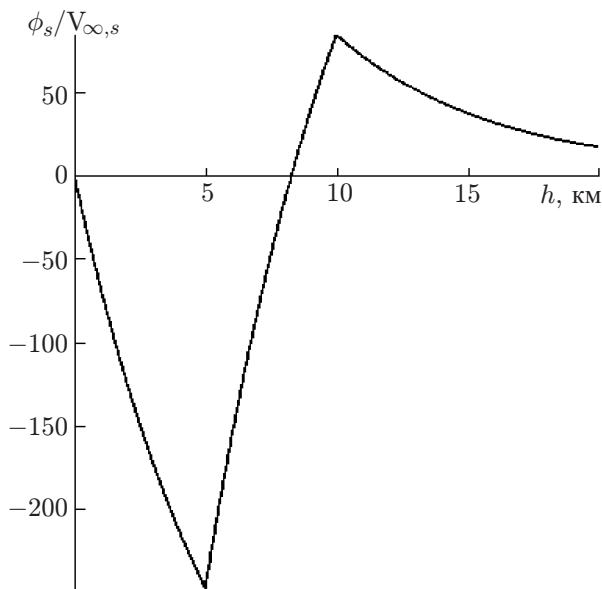


Рис. 3. График электрического потенциала  $\phi_s/V_{\infty,s}$  ( $N_s = 20, \theta = \theta_{s0} = \pi/3, \varphi = \varphi_{s0}$ )

(здесь  $\sigma_p$  — проводимость на высоте  $h_p$ ). В силу неравенства  $[4n(n+1)H^2]/r_0^2 < 1/100$ , при всех  $1 \leq n \leq N_s$  переменная  $\xi_n \approx 1 + 2n(n+1)H^2/r_0^2 \approx 1$ . Учитывая члены одного порядка малости, для коэффициента  $C_n(\sigma)$  получим выражение, которое не зависит от индекса  $n$ :

$$C_n(\sigma) \approx V_{\infty,s}\sigma_0/\sigma. \tag{23}$$

Используя формулы (22), (23) и (7), в области  $\sigma_{s1} < \sigma \ll \sigma_p$  будем иметь

$$\phi_s \approx V_{\infty,s} \times \left[ 1 - \frac{\beta_0\sigma_1}{\sigma} + 4\pi \frac{\sigma_0}{\sigma} \delta_{N_s}(\mu, \mu_{s0}, \varphi, \varphi_{s0}) \right]. \tag{24}$$

Аналогичные упрощения формул (П11) и (П12) при  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_{s0}$  и  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}$  приводят к следующему результату (при всех  $\sigma_0 < \sigma \ll \ll \sigma_p$ ):

$$\phi_s \approx \phi_0(\sigma) + \phi_1(\sigma)\delta_{N_s}(\mu, \mu_{s0}, \varphi, \varphi_{s0}). \tag{25}$$

Здесь введены обозначения

$$\phi_0(\sigma) = V_{\infty,s}(1 - \sigma_0/\sigma), \quad \sigma_0 < \sigma \ll \sigma_p, \tag{26}$$

$$\phi_1(\sigma) = \begin{cases} -4\pi V_{\infty,s}(1 - \sigma_0/\sigma), & \sigma_0 < \sigma < \sigma_{s0}; \\ 4\pi V_{\infty,s} \frac{\sigma_{s0}}{\sigma} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma} - \frac{\sigma_{s1} - \sigma}{\sigma_{s1} - \sigma_{s0}} \right), & \sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}; \\ 4\pi V_{\infty,s}\sigma_0/\sigma & \sigma_{s1} < \sigma \ll \sigma_p. \end{cases} \tag{27}$$

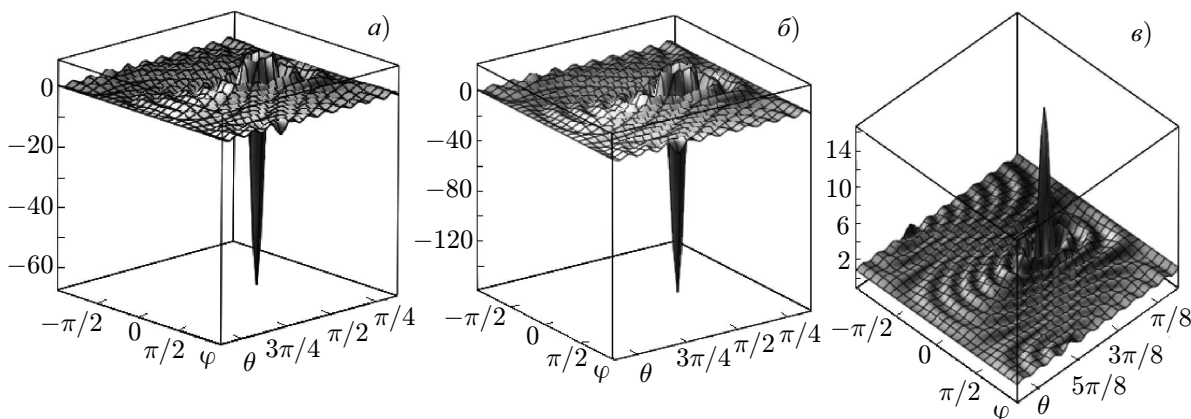


Рис. 4. Графики электрического потенциала  $\phi_s/V_{\infty,s}$  в зависимости от углов  $\theta$  и  $\varphi$  на фиксированных высотах  $h = 1$  км (а), 8 км (б) и 20 км (в),  $\theta_{s0} = \pi/3$ ,  $\varphi_{s0} = 0$

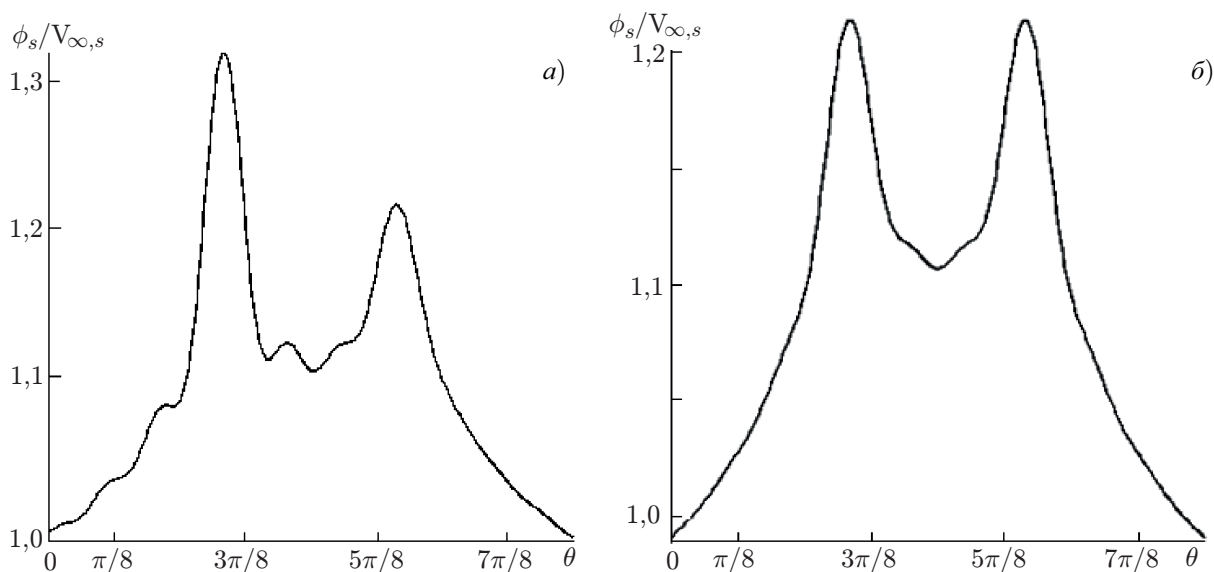


Рис. 5. График функции  $\phi_s/V_{\infty,s}$  в зависимости от угла  $\theta$  при фиксированном  $\varphi = \varphi_{s0}$ ,  $\theta_{s0} = \pi/3$ , высота  $h = 50$  (а) и  $h = 100$  км (б),  $N_s = 20$

На рис. 2а изображён график функции  $\phi_0(\sigma)/V_{\infty,s}$  в зависимости от высоты  $h$ , на рис. 2б — сферическое среднее функции (25), нормированной на  $V_{\infty,s}$ , определяемое по формуле

$$\frac{\bar{\phi}_s}{V_{\infty,s}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\phi_s/V_{\infty,s}) \sin \theta d\theta.$$

На радиальном луче  $\mu = \mu_{s0}$ ,  $\varphi = \varphi_{s0}$  функция  $\delta_{N_s}(\mu, \mu_{s0}, \varphi, \varphi_{s0})$  принимает максимальное значение  $(N_s + 1)^2 / (4\pi)$ . Поэтому максимальное и минимальное значения функции (25) определяются не только ионосферным потенциалом  $V_{\infty,s}$  и значениями проводимости, но и параметром  $N_s$ . На рис. 3 приведён график функции (25), нормированной на  $V_{\infty,s}$ , на радиальном луче расположения зарядов в зависимости от высоты  $h$  ( $N_s = 20$ ).

Нетрудно построить графики функции (25) при фиксированной высоте  $h$ . На рис. 4 они изображены в областях под источниками, между источниками и над источниками при одинаковых

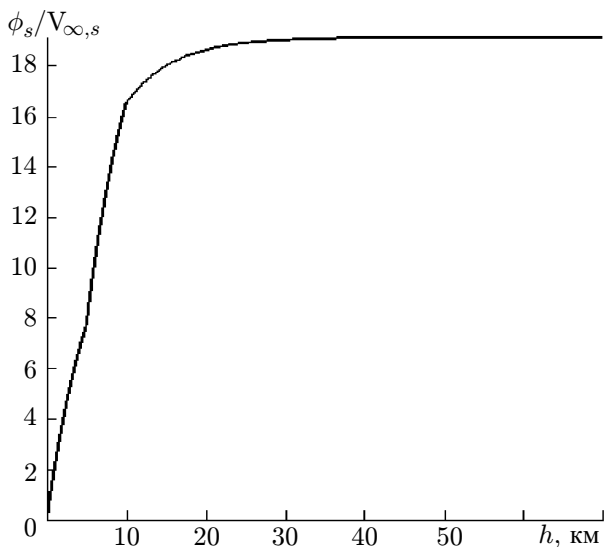


Рис. 6. График потенциала  $\phi_s/V_{\infty,s}$  в сопряжённой точке  $\theta = \pi - \theta_{s0}$  в зависимости от высоты  $h$  ( $N_s = 20, \theta = \theta_{s0} = \pi/3, \varphi = \varphi_{s0}$ )

не применимы. Численные расчёты по формулам (П10)–(П16) показывают, что в центре грозового образования под источниками и между источниками значения электрического потенциала мало отличаются от представленных на рис. 3 при  $h_m = 120$  км. Отличия потенциала по сравнению со случаем  $h_m = 120$  км затрагивают область выше источников при всех  $\theta$  и  $\varphi$  и окрестность сопряжённой точки на всех высотах. Зависимость потенциала в сопряжённой точке от высоты представлена на рис. 6.

На рис. 7 представлены графики потенциала  $\phi_s/V_{\infty,s}$ , рассчитанного в зависимости от угла  $\theta$  по формулам (23), в областях ниже источников, между источниками и выше источников. Из него видно, что изменения потенциала в сопряжённой точке появляются уже на достаточно малых высотах. Решения задач (1)–(4) и (1), (5) и (4) существенно отличаются.

значениях параметров.

Формула (25) даёт неплохое приближение на высотах  $0 < h \ll h_p$ . Однако при  $h_p < h < h_m$  ей пользоваться нельзя. Экстраполяция на этот интервал формулы (25) для решения задачи (10)–(14) с граничным условием на высоте  $h_m = 100$  км даёт значение потенциала  $\phi_s \approx V_{\infty,s}$ . В то же время численные расчёты по формулам (П10) показывают, что в области  $h_p < h < h_m$  потенциал  $\phi_s$  зависит углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Как видно из рис. 5, значения функции  $\phi_s/V_{\infty,s}$  отличаются от единицы почти при всех  $\theta$ . На нём выделяются две точки, соответствующие точке расположения источника и сопряжённой точке. На высоте  $h_m = 100$  км значения потенциала  $\phi_s$  в этих точках одинаковы.

Рассмотрим теперь случай, когда  $h_m = 70$  км ( $h_m < h_m^*$ ). При этом значения  $h_m$  неравенства (16) не выполняются и формулы (17) и (25)

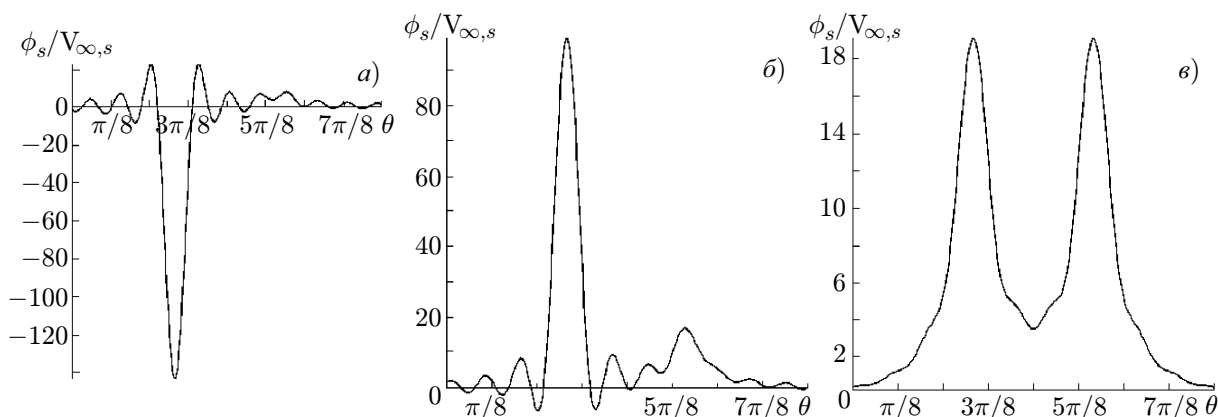


Рис. 7. Зависимости потенциала  $\phi_s/V_{\infty,s}$  от угла  $\theta$  при  $h = 2,5$  (а), 10 (б) и 70 км (в) ( $h_m = 70$  км,  $\varphi = \varphi_{s0}, \theta = \theta_{s0} = \pi/3$  и  $N_s = 20$ )



## 2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты работы.

С использованием теоремы о сложении присоединённых полиномов Лежандра получено новое выражение для электрического потенциала в виде суперпозиции двух полей (формулы (П10)–(П15)), позволяющее проанализировать влияние на его распределение различных граничных условий на верхней границе атмосферы и оценить возмущение электрического поля грозowymi источниками в магнитосопряжённых точках.

Определены фундаментальные параметры  $h_m^*$  и  $h_p$ , позволяющие оценить влияние граничных условий на верхней границе  $h_m$  на распределение электрического поля в атмосфере. Показано, что при  $h_m > h_m^*$  для нахождения электрического поля на высотах  $0 < h < h_p$  можно использовать краевую задачу для уравнения (1) с более простыми граничными условиями (5) и (4). При  $h_m < h_m^*$  краевые задачи (1)–(4) и (1), (4) и (5) приводят к разным результатам (для рассмотренного в работе значения параметра  $h_m^* = 90$  км).

Показано, что соотношение между величинами  $h_m$  и  $h_m^*$  также характеризует возмущение электрического поля грозowymi источниками в магнитосопряжённых точках. В частности, возмущение электрического поля при  $h_m < h_m^*$  будет существенно в магнитосопряжённой точке и на всех высотах под ней.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании глобальной электрической цепи с учётом влияния магнитосферы на распределение электрического поля в атмосфере.

Авторы благодарны Е. А. Марееву, С. С. Давыденко и Н. Н. Слюняеву за полезное обсуждение результатов. Исследование выполнено при поддержке РФФ (проект 18–12–00441).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение задачи (1)–(4), (6) аналогично полученному в работе [2] и имеет следующий вид:

$$\phi_s = V_{\infty,s} + \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{k=0}^n \frac{\tilde{R}_{n,k}^{(1)}(\sigma) - \tilde{R}_{n,k}^{(0)}(\sigma)}{\|Y_{n,k}\|^2} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_{s0}) \cos[k(\varphi - \varphi_{s0})], \quad \sigma_{s1} < \sigma < \sigma_m; \quad (\text{П1})$$

$$\phi_s = \frac{Q_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_{s0}} - \frac{1}{\sigma} \right) + \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{k=0}^n \frac{R_{n,k}^{(1)}(\sigma) - \tilde{R}_{n,k}^{(0)}(\sigma)}{\|Y_{n,k}\|^2} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_{s0}) \cos[k(\varphi - \varphi_{s0})], \quad \sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}; \quad (\text{П2})$$

$$\phi_s = \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{k=0}^n \frac{R_{n,k}^{(1)}(\sigma) - R_{n,k}^{(0)}(\sigma)}{\|Y_{n,k}\|^2} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_{s0}) \cos[k(\varphi - \varphi_{s0})], \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_{s0}. \quad (\text{П3})$$

Здесь

$$V_{\infty,s} = \frac{Q_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_{s0}} - \frac{1}{\sigma_{s1}} \right), \quad Q_s = \frac{I_{s0} H}{r_0^2}, \quad (\text{П4})$$

$V_{\infty,s}$  — ионосферный потенциал. Функции, зависящие от переменной  $\sigma$ , имеют вид

$$\tilde{R}_{n,k}^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{\sqrt{\sigma\sigma_{sj}}} \frac{(\sigma_{sj}/\sigma)^{\xi_n/2} [\tau_{n,k} + (\sigma/\sigma_m)^{\xi_n}] [1 - \beta_n (\sigma_1/\sigma_{sj})^{\xi_n}]}{\xi_n [\tau_{n,k} + \beta_n (\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n}]}, \quad j = 0, 1; \quad (\text{П5})$$

$$R_{n,k}^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{\sqrt{\sigma\sigma_{sj}}} \frac{(\sigma/\sigma_{sj})^{\xi_n/2} [\tau_{n,k} + (\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n}] [1 - \beta_n (\sigma_1/\sigma)^{\xi_n}]}{\xi_n [\tau_{n,k} + \beta_n (\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n}]}, \quad j = 0, 1; \quad (\text{П6})$$

где

$$\beta_n = \frac{2H + \Delta R \sigma_1 (1 - \xi_n)}{2H + \Delta R \sigma_1 (1 + \xi_n)}, \quad \xi_n = \sqrt{1 + 4n(n+1)H^2/r_0^2}, \quad (П7)$$

$$\tau_{n,k} = \begin{cases} (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1), & n + k - \text{чётное}; \\ -1, & n + k - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Решение (П1)–(П6) можно упростить. Все функции  $R_{n,k}^{(j)}(\sigma)$  делятся на два вида: те, для которых числа  $n + k$  являются чётными или нечётными. Поэтому в формулах (П1)–(П6) внутреннюю сумму по  $k$  можно представить в виде двух сумм и воспользоваться формулой

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\|Y_{n,k}\|^2} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_{s0}) \cos[k(\varphi - \varphi_{s0})] = \frac{2n+1}{8\pi} [P_n(\cos \gamma) + P_n(\cos \gamma_1)], \quad (П8)$$

если в суммировании по  $k$  берутся только такие значения переменной  $k$ , при которых числа  $n + k$  чётные, и формулой

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\|Y_{n,k}\|^2} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu_{s0}) \cos[k(\varphi - \varphi_{s0})] = \frac{2n+1}{8\pi} [P_n(\cos \gamma) - P_n(\cos \gamma_1)], \quad (П9)$$

если в суммировании по  $k$  берутся только такие  $k$ , при которых числа  $n + k$  — нечётные. Формулы (П8) и (П9) следуют из теоремы сложения для присоединённых функций Лежандра. Здесь

$$\cos \gamma = \mu \mu_{s0} + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_{s0}^2} \cos(\varphi - \varphi_{s0}), \quad \cos \gamma_1 = -\mu \mu_{s0} + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_{s0}^2} \cos(\varphi - \varphi_{s0}),$$

где  $\gamma_1$  — угол между радиальным лучом, направленным в точку наблюдения, и радиальным лучом, содержащим точки, сопряжённые точкам расположения зарядов диполя. В формуле (П8) стоят чётные по переменной  $\mu$  функции Лежандра, а в (П9) — нечётные. Используя формулы (П1)–(П9), для потенциала электрического поля получим следующие выражения:

$$\phi_s = V_{\infty,s} + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) [\bar{R}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{R}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma) + [\bar{T}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{T}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma_1) \quad (П10)$$

в области  $\sigma_{s1} < \sigma < \sigma_m$ ;

$$\phi_s = \frac{Q_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_{s0}} - \frac{1}{\sigma} \right) + \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) [\bar{R}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{R}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma) + [\bar{T}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{T}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma_1) \quad (П11)$$

в области  $\sigma_{s0} < \sigma < \sigma_{s1}$ ;

$$\phi_s = \sum_{n=1}^{N_s} (2n+1) [\bar{R}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{R}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma) + [\bar{T}_n^{(1)}(\sigma) - \bar{T}_n^{(0)}(\sigma)] P_n(\cos \gamma_1) \quad (П12)$$

в области  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_{s0}$ . Здесь введены обозначения

$$\bar{R}_n^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{8\pi \sqrt{\sigma \sigma_{sj}}} \times \frac{(\sigma_{sj}/\sigma)^{\xi_n/2} [1 - \beta_n (\sigma_1/\sigma_{sj})^{\xi_n}]}{\xi_n} \left[ \frac{(\sigma/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)}{\beta_n (\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)} + \frac{(\sigma/\sigma_m)^{\xi_n} - 1}{\beta_n (\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} - 1} \right], \quad (П13)$$

$$\bar{T}_n^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{8\pi\sqrt{\sigma\sigma_{sj}}} \times \frac{(\sigma_{sj}/\sigma)^{\xi_n/2}[1 - \beta_n(\sigma_1/\sigma_{sj})^{\xi_n}]}{\xi_n} \left[ \frac{(\sigma/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)} - \frac{(\sigma/\sigma_m)^{\xi_n} - 1}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} - 1} \right], \quad (\text{П14})$$

$$\bar{R}_n^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{8\pi\sqrt{\sigma\sigma_{sj}}} \times \frac{(\sigma/\sigma_{sj})^{\xi_n/2}[1 - \beta_n(\sigma_1/\sigma)^{\xi_n}]}{\xi_n} \left[ \frac{(\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)} + \frac{(\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n} - 1}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} - 1} \right], \quad (\text{П15})$$

$$\bar{T}_n^{(j)}(\sigma) = \frac{Q_s}{8\pi\sqrt{\sigma\sigma_{sj}}} \times \frac{(\sigma/\sigma_{sj})^{\xi_n/2}[1 - \beta_n(\sigma_1/\sigma)^{\xi_n}]}{\xi_n} \left[ \frac{(\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} + (\xi_n - 1)/(\xi_n + 1)} - \frac{(\sigma_{sj}/\sigma_m)^{\xi_n} - 1}{\beta_n(\sigma_1/\sigma_m)^{\xi_n} - 1} \right]. \quad (\text{П16})$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мареев Е. А. // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 527.
2. Анисимов С. В., Мареев Е. А. // Физика Земли. 2008. № 10. С. 8.
3. Морозов В. Н. Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учётом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ. СПб.: РГГМУ, 2011. 253 с.
4. Davydenko S. S., Mareev E. A. // J. Geophys. Res. 2004. V. 109, No. D11. Art. no. D11103.
5. Baumgaertner A. J. G., Thayer J. P., Neely R. R., Lucas G. // J. Geophys. Res. Atmos. 2013. V. 118, No. 16. P. 9221.
6. Bayona V., Flyer N., Lucas G. M., Baumgaertner A. J. G. // Geosci. Model Dev. 2015. V. 8, No. 10. P. 3007.
7. Jánky J., Pasko V. P. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. V. 120, No. 12. P. 10654.
8. Lucas G. M., Baumgaertner A. J. G., Thayer J. P. // J. Geophys. Res. Atmos. 2015. V. 120, No. 23. P. 12054.
9. Denisenko V. V., Rycroft M. J., Harrison R. G. // Surveys Geophys. 2018. V. 40, No. 1. P. 1.
10. Hays P. B., Roble R. G. // J. Geophys. Res. 1979. V. 84, No. A7. P. 3291.
11. Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 3. С. 355.
12. Slyunyaev N. N., Mareev E. A., Kalinin A. V., Zhidkov A. A. // J. Atmos. Sci. 2014. V. 71, No. 11. P. 4382.
13. Kalinin A. V., Slyunyaev N. N. // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450, No. 1. P. 112.
14. Ogawa T. // J. Geophys. Res. 1985. V. 90, No. D4. P. 5951.
15. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 511 с.

Поступила в редакцию 17 мая 2018 г.; принята в печать 29 октября 2018 г.

**INFLUENCE OF THE BOUNDARY CONDITIONS  
ON THE DISTRIBUTION OF THE ELECTRIC FIELD IN MODELS  
OF THE GLOBAL ELECTRIC CIRCUIT**

*N. A. Denisova and A. V. Kalinin*

We obtain a new analytical representation of the solution for the classical model of the Roble—Hays global electric circuit, where the connection between the values of the electric potential and the current at magnetoconjugate points of the upper boundary of the atmosphere is allowed for under boundary conditions. Using this representation, we analyze the influence of various boundary conditions at the upper boundary of the atmosphere on the potential distribution and present an estimate of perturbations of the electric field by thunderstorm sources at magnetoconjugate points.