

УДК 517.9

## ПОРОГИ СИНХРОНИЗАЦИИ В АНСАМБЛЕ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО СО СЛУЧАЙНО МИГАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

*Н. В. Барабаш, В. Н. Бельх\**

Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия

В работе рассматривается сеть фазовых осцилляторов Курамото со случайно мигающими связями. Строго обоснована применимость метода усреднения при малых интервалах переключения. С помощью данного метода аналитически получены оценки порога силы связи для синхронизации осцилляторов в ансамбле. Изучена зависимость порога синхронизации от интервала переключения при различных размерах сети. Обнаружен эффект сохранения синхронизации при значительном увеличении интервала переключения, что является главной особенностью системы, поскольку обычно незначительное увеличение этого интервала приводит к срыву синхронизации. При небольших размерах сети и больших интервалах переключения показана возможность прерывистой синхронизации. Установлено, что увеличение размера сети влечёт повышение устойчивости за счёт снижения вероятности появления несвязных конфигураций. В пространстве параметров системы выделены области, соответствующие глобальной синхронизации осцилляторов.

### ВВЕДЕНИЕ

Широкоизвестная модель Курамото [1], представляющая собой систему связанных фазовых осцилляторов с натуральными частотами, используется для описания динамики сердечных клеток [2], нейронов Ходжкина—Хаксли [3], ансамблей контактов Джозефсона [4], систем фазирования в антенных решётках [5] и различных явлений синхронизации (пешеходов на мосту, ритмических аплодисментов и др.) [6–8]. Интерес представляет исследование динамики сетей со случайно меняющимися во времени («blinking» — мигающими) связями между узлами. Примером таких систем является нейронная сеть, узлы в которой отсылают электрические сигналы в форме импульсов. Поскольку продолжительность импульса обычно является малой по сравнению с интервалами между импульсами, это сеть с мигающим взаимодействием [9]. Элементы вычислительных сетей (сеть Интернет, локальные компьютерные сети, активные беспроводные сети и др.) также взаимодействуют с прерываниями [10]. Процесс синхронизации в таких сетях может быть изучен с помощью модели Курамото [11], матрица связей в которой случайно меняется в дискретные моменты времени.

В данной работе получен ряд интересных свойств мигающей модели Курамото. Установлено сохранение режима синхронизации при значительном увеличении интервала переключения  $\tau$ . Выявлена сильная зависимость синхронизации от размера сети (количества узлов  $N$ ). При небольших размерах сети и больших интервалах переключения показана возможность прерывистой синхронизации, когда интервалы синхронного и асинхронного режимов чередуются в соответствии с определённым вероятностным распределением. Показано, что вероятность установления асинхронного режима быстро падает с ростом  $N$  и при достаточно больших размерах сети срыв синхронизации происходит только за счёт уменьшения силы связи и вероятности наличия связи между узлами. Строго обосновано, что наличие быстрых переключений позволяет воспользоваться методом усреднения стохастических систем и исследовать «мигающую» модель

\* belykh@vgavt-nn.ru

Курамото как детерминированную автономную систему. Получено аналитическое выражение для порога синхронизации для быстромигающей модели Курамото, т. е. при высокочастотных переключениях связей в сети.

## 1. МИГАЮЩАЯ МОДЕЛЬ КУРАМОТО

Уравнения ансамбля фазовых осцилляторов Курамото со случайно мигающим (прерывистым) взаимодействием записываются в виде

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}(t) \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  — фазы и натуральные частоты осцилляторов соответственно,  $N$  — количество осцилляторов,  $K$  — сила их связи,  $\varepsilon_{ij}(t)$  — элементы симметричной матрицы связей  $G(t)$ , зависящие от времени и принимающие значения 1 с вероятностью  $p_{ij}$  и 0 с вероятностью  $q_{ij} = 1 - p_{ij}$ . Элементы  $\varepsilon_{ij}(t)$  выбираются случайно на каждом временном интервале с длительностью  $\tau$ . При этом  $\varepsilon_{ij}(t) = 0$  для  $t \in [(k-1)\tau, k\tau)$  означает прерывание связи между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами на  $k$ -м интервале времени. Очевидно, что при условии  $\varepsilon_{ij}(t) \equiv 1$  система (1) принимает вид детерминированной модели Курамото [12].

Особенность модели Курамото состоит в том, что при переходе к вращающейся моде  $\varphi_i = \Omega t + \tilde{\varphi}_i$  с любой частотой  $\Omega$  система (1) преобразуется к аналогичному виду, где вместо  $\omega_i$  стоит сдвинутая частота  $\omega_i - \Omega$ . В частности, сдвиг частот на среднюю по ансамблю частоту  $\Omega = N^{-1} \sum_{i=1}^N \omega_i$  эквивалентен условию в исходной модели

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 0, \quad (2)$$

где  $\omega_i$  — отклонение частоты  $i$ -го осциллятора от средней частоты  $\Omega$ . Для определённости условие (2) будем считать выполненным. Сумма уравнений в системе (1) в силу симметричности матрицы связи приводит к нулевой сумме мгновенных частот

$$\sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i = 0. \quad (3)$$

Из этого условия получаем интеграл системы (1)  $I = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \text{const}$ , означающий отсутствие асимптотически устойчивых фаз  $\varphi_i$  и возможность исключения одного из уравнений в системе (1) переходом к разностям фаз и разностям частот [13]:

$$\Theta_i = \varphi_i - \varphi_N, \quad \Delta_i = \omega_i - \omega_N, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Вычитая в системе (1) из первых  $N-1$  уравнений последнее, приходим к системе

$$\dot{\Theta}_i = \Delta_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\varepsilon_{Nj} \sin \Theta_j - \varepsilon_{ij} \sin(\Theta_j - \Theta_i)], \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

Последний осциллятор в системе (1) считаем лидирующим, поскольку все фазы в системе (5) теперь отсчитываются относительно фазы этого осциллятора.

Фазовая синхронизация осцилляторов Курамото определяется аттрактором системы (5), траектории которого  $(\Theta_i^*(t), i = 1, \dots, N-1)$  удовлетворяют условиям

$$|\Theta_i^*(t)| \leq \alpha < \pi/3, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha$  служит мерой (точностью) синхронизации. Очевидно, что  $\langle \dot{\Theta}_i(t) \rangle = 0$  (угловые скобки обозначают усреднение по времени).

## 2. УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ МИГАНИИ

При достаточно малых интервалах переключения  $\tau = \mu \ll 1$  система (1) характеризуется явной высокочастотной ( $\omega = \mu^{-1} \gg 1$ ) зависимостью от времени, по которому эту систему можно усреднять [14–16]. Формально система (1) приводится к системе, удобной для усреднения, заменой времени  $t = \mu t'$ :

$$\frac{d\varphi_i}{dt'} = \mu \left[ \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}(t') \sin(\varphi_j - \varphi_i) \right], \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Учитывая, что среднее по времени  $\langle \varepsilon_{ij}(t) \rangle = p_{ij}$ , для малых интервалов мигания получаем усреднённую детерминированную систему вида

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N p_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: динамика мигающей системы Курамото с малым интервалом переключения связей  $\tau$  и вероятностями наличия связи между узлами  $p_{ij}$  аналогична динамике детерминированной системы Курамото с коэффициентами симметричной матрицы связи  $K_{ij} = K p_{ij}$ .

В данной работе для простоты мы ограничимся случаем равных вероятностей  $p_{ij} = p$ . Тогда система (8) в форме (5) запишется в виде

$$\dot{\Theta}_i = \Delta_i - \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N [\sin \Theta_j - \sin(\Theta_j - \Theta_i)], \quad (9)$$

где  $k = Kp$ .

Известно [1, 12], что система (8) при однородной конфигурации связи «каждый с каждым» ( $p_{ij} = p$ ) имеет порог синхронизации  $K^*$  такой, что при  $k > K^*$  все  $N$  осцилляторов синхронны, а при  $k < K^*$  синхронизм нарушен. Более того, в пределе «среднего поля» [17]  $N \rightarrow \infty$  система (8) преобразуется к виду

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + kr \sin(\psi - \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

где  $R = r \exp(i\psi)$  — параметр порядка,  $r$  и  $\psi$  — амплитуда и фаза параметра порядка [1] соответственно. Порог синхронизации определяется неравенствами

$$|\omega_i| < kr. \quad (11)$$

При конечных значениях  $N$  и разных отклонениях частот  $\omega_i$  в работе [13] получены следующие условия синхронизации.

1) При  $\Delta_i = 0$  (идентичные осцилляторы) система (9) имеет одно экспоненциально устойчивое состояние равновесия  $O$  ( $\Theta_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) с бассейном притяжения  $|\Theta_i| < \pi/3$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

2) При  $\Delta_i = \Delta = \text{const}$  (равные частотные рассогласования), если выполняется условие  $|\Delta| < k$ , система обладает устойчивой синхронизацией  $\Theta_i = \Theta^* = \arcsin(\Delta/k)$ .

3) В случае постоянных, но отличных друг от друга частотных рассогласований  $\Delta_i$  для установления синхронизации с точностью  $\alpha$  должно выполняться условие  $|\Delta_i| < 2k \sin \alpha (\cos \alpha - 1/2)$ .

4) Условие глобально асинхронного режима имеет вид  $|\Delta_i| > 2k$ .

### 3. УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ N

Система уравнений Курамото записывается в виде

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l + \frac{K}{N} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^N \varepsilon_{lj} \exp[i(\varphi_j - \varphi_l)] \right\}, \quad l = 1, \dots, N, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p; \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p \end{cases}$$

на каждом интервале времени  $t \in [(m - 1)\tau, m\tau)$ , где  $\tau$  — интервал мигания,  $m = 1, 2, \dots$ . Здесь элементы  $\varepsilon_{lj}$  — независимые друг от друга и от номера интервала  $m$  идентично распределённые случайные величины.

Перепишем систему (12) в виде

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l + K \operatorname{Im} \left\{ \exp(-i\varphi_l) \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{lj} \exp(i\varphi_j) \right] \right\}, \quad l = 1, \dots, N, \tag{13}$$

и перейдём к пределу среднего поля  $N \rightarrow \infty$ .

Имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_{lj} \exp(i\varphi_j) \right] = r \exp(i\varphi_0) = R, \quad l = 1, \dots, N. \tag{14}$$

Параметр порядка  $R$  один и тот же для любого интервала мигания и не зависит от величины интервала мигания  $\tau$ . Оценим параметр  $r = |R|$  в случае, когда фазовые осцилляторы синхронны, т. е. при условии

$$|\Theta_j| = |\varphi_j - \varphi_N| < \alpha. \tag{15}$$

Конечная сумма  $\sum_{j=1}^N \varepsilon_{lj} \exp(i\varphi_j)$  состоит из  $\tilde{p}N$  ненулевых слагаемых с  $\varepsilon_{lj} = 1$ , где  $\tilde{p}$  — статистическая вероятность. Сложим комплексные числа  $\exp(i\varphi_j)$ , расположенные на единичной окружности и, согласно (15), в фазовом секторе

$$\varphi_N - \alpha < \varphi < \varphi_N + \alpha. \tag{16}$$

Учитывая то, что модуль суммы чисел, ограничивающих сектор, равен  $|\exp[i(\varphi_N + \alpha)] + \exp[i(\varphi_N - \alpha)]| = 2 \cos \alpha$ , получаем неравенство

$$M \equiv \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_{lj} \exp(i\varphi_j) \right| > \tilde{p}N \cos \alpha. \tag{17}$$

Поскольку также имеет место неравенство  $M < \tilde{p}N$ , с учётом (14) имеем

$$p \cos \alpha < r < p, \tag{18}$$

где учтено, что  $\tilde{p} \rightarrow p$  при  $N \rightarrow \infty$  в силу закона больших чисел. В результате в пределе среднего поля система (12) и (14) приобретает вид детерминированной системы с разделёнными переменными

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l + Kr \sin(\varphi_0 - \varphi_l), \quad l = 1, \dots, N. \tag{19}$$

Используя нижний порог параметра порядка в неравенстве (18), получаем условия синхронизации как область существования устойчивого состояния равновесия системы (19):

$$\max |\omega_l| < Kp \cos \alpha. \quad (20)$$

Синхронные фазы записываются в виде

$$\varphi_l^* - \varphi_0 = \arcsin \frac{\omega_l}{Kp \cos \alpha}, \quad l = 1, \dots, N, \quad (21)$$

как координаты устойчивых состояний равновесия системы (19). Тогда, учитывая, что  $|\varphi_l^* - \varphi_0| < \alpha$  в силу (15), из (21) получаем условие синхронизации с точностью  $\alpha$ :

$$|\omega_l| < Kp \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (22)$$

Поскольку  $\omega_l$  — отклонение частоты  $l$ -го осциллятора от средней частоты осцилляторов ансамбля, неравенство (22) означает, что чем выше требуемая точность синхронизации (чем меньше  $\alpha$ ), тем уже должен быть спектр осцилляторов, обеспечивающий их синхронизацию с этой точностью.

Таким образом, в пределе среднего поля  $N \rightarrow \infty$  порог синхронизации ансамбля фазовых осцилляторов не зависит от интервала переключений  $\tau$  и согласно (22) определяется силой связи  $K$ , вероятностью наличия связи между осцилляторами  $p$  и точностью синхронизации  $\alpha$ . Этот результат указывает на высокую эффективность нелинейной связи осцилляторов и сильно отличается от случая случайно мигающей диффузионной связи [9], когда увеличение интервала переключения приводит к срыву синхронизации как при малом, так и при большом числе осцилляторов.

#### 4. ПОРОГИ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ $N$

Из неравенства (22) следует вывод, что зависимость порогов синхронизации от интервала переключений  $\tau$  должна проявляться при небольшом числе осцилляторов, а при большом, но конечном их числе пороги для разных  $\tau$  должны асимптотически сближаться.

Количественно зависимость порога синхронизации от числа осцилляторов в сети  $N$  представлена на рис. 1 в случае отсутствия мигания ( $\tau = 0, p = 1$ ), при  $\tau = 1, p = 1/2$  и при  $\tau = 10, p = 1/2$ . Из этого рисунка видно, что пороги синхронизации действительно сильно отличаются при небольшом числе осцилляторов и начинают практически совпадать при  $N > N^*(\tau)$ , где  $N^*(1) = 5, N^*(10) = 15$ .

Ясно, что срыв синхронизации в ансамбле стохастически взаимодействующих осцилляторов определяется вероятностью  $P$  несвязности сети, когда на отдельных интервалах времени она распадается на независимые кластеры. Поскольку вероятности  $p$  и  $q = 1 - p$  одинаковы для всех временных интервалов  $[(m-1)\tau, m\tau)$ , вероятность несвязности сети  $P$  также одинакова для любого интервала и может быть вычислена аналитически. Для простоты зависимость  $P(N)$  построена численно и представлена на рис. 2, из которого видно, что уже при  $N = 15$  вероятность несвязности близка к нулю. Отсюда следует, что при  $N > 15$  стохастическую сеть можно считать связанной и увеличение силы связи  $K$  должно приводить к синхронизации как при малых, так и при больших периодах переключения.

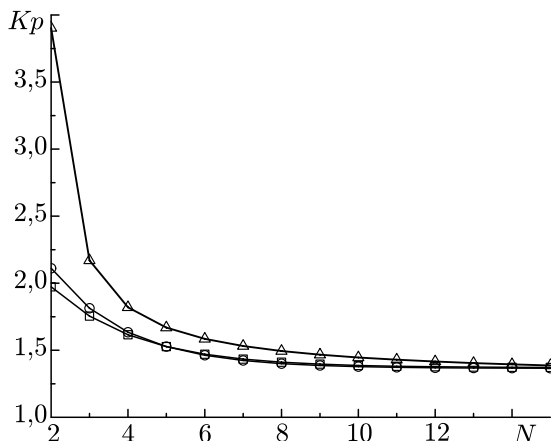


Рис. 1. Зависимость порога  $Kp$  от  $N$  в отсутствие мигания ( $-o-$ ), при  $\tau = 1$  ( $-\square-$ ) и  $\tau = 10$  ( $-\triangle-$ )

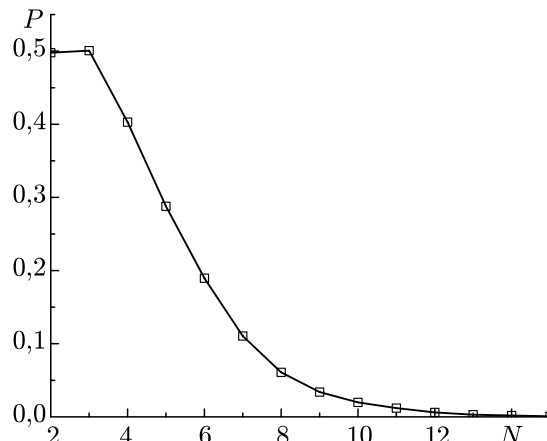


Рис. 2. Зависимость вероятности несвязности сети  $P$  от  $N$

### 5. ЗАВИСИМОСТЬ ПОРОГА СИНХРОНИЗАЦИИ ОТ ПЕРИОДА МИГАНИЯ $\tau$

В разделе 4 было показано, что при большом числе фазовых осцилляторов в сети зависимость порога синхронизации от периода переключений незначительна и начинает проявляться при небольших размерах ансамбля. Отметим [18–21], что небольшое увеличение периода  $\tau$  в ансамблях амплитудно-фазовых регулярных или хаотических осцилляторов приводит к срыву их синхронизации независимо от размеров ансамбля. Принимая во внимание указанную особенность рассматриваемой сети фазовых осцилляторов, рассмотрим зависимость порога от периода переключений в случае небольших размеров сети,  $N = 2, 3, 4, 5$ . При увеличении периода  $\tau$ , когда метод усреднения перестаёт работать, задача о пороге синхронизации приводит к решению стохастической системы (1) с вероятностной матрицей  $G = \{\varepsilon_{ij}\}$ , где  $\varepsilon_{ij} = 1$  с вероятностью  $p$  и  $\varepsilon_{ij} = 0$  с вероятностью  $1 - p$  на каждом интервале времени  $[(m - 1)\tau, m\tau)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Вычисление зависимости порога от периода переключений проводилось для системы (1) при равномерном распределении отклонений частот  $\omega_i$  на интервале  $[-1, 1]$ , случайном выборе начальных фаз  $\varphi_i(t_0)$  на периоде  $[0, 2\pi]$  и при  $p = 1/2$ .

Результаты численного моделирования приведены на рис. 3, из которого видно, что для небольших размеров сети ( $N = 3, 4, 5$ ) при увеличении периода переключений  $\tau$  для синхронизации требуется значительное увеличение силы связи  $K$ . Такая зависимость объясняется тем, что вероятность несвязности сети  $P(N)$ ,  $N = 3, 4, 5$  существенна и при больших интервалах  $\tau$  сеть с вероятностью  $P(N)$  рассыпается на несинхронные кластеры, которые с вероятностью  $1 - P(N)$

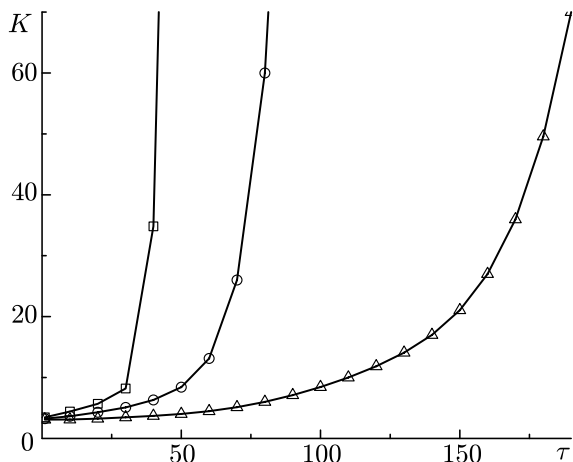


Рис. 3. Зависимость порога  $K$  от интервала  $\tau$  при  $N = 4$  ( $-\triangle-$ ),  $N = 3$  ( $-\square-$ ) и  $N = 5$  ( $-o-$ )

«собираются» в один синхронный кластер на следующем временном интервале. По-видимому, кривые на рис. 3 имеют вертикальные асимптоты, определяющие критические значения  $\tau_c(N)$ . При  $\tau > \tau_c(N)$  синхронизация сети становится прерывистой: последовательности интервалов  $I_m = [(m - 1)\tau, m\tau)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , случайно делятся «синхронные» и «асинхронные».

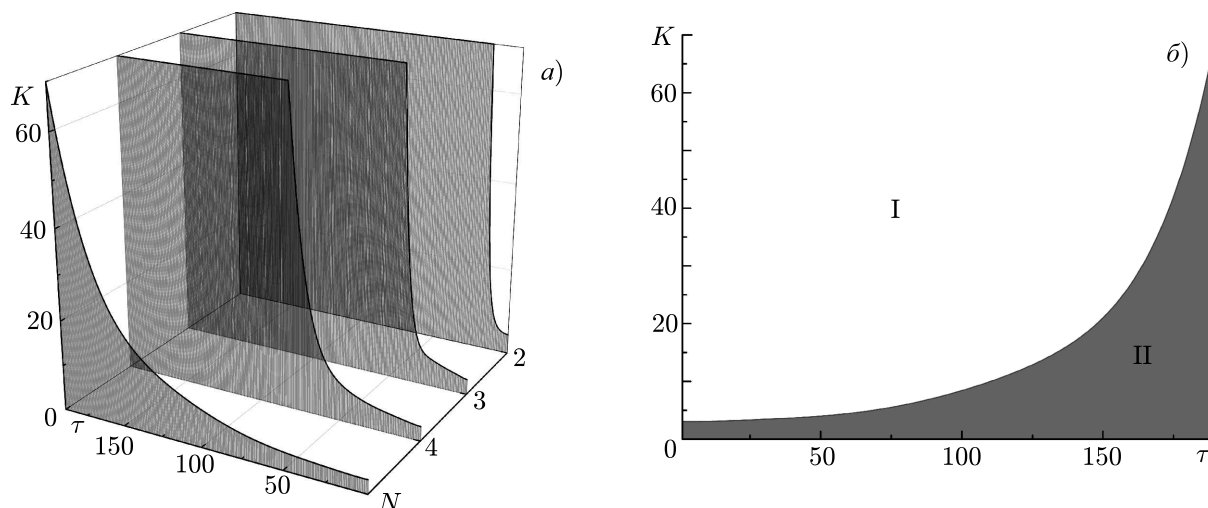


Рис. 4. Диаграмма динамических режимов (а, серым цветом отмечены области отсутствия синхронизации) и зависимость порога от периода переключений при  $N = 5$  (б), где область I соответствует синхронному режиму, а II — асинхронному

Из диаграммы, представленной на рис. 4, видно, что область асинхронного режима II уменьшается с ростом  $N$ . Это согласуется с теоретическим выводом о том, что при  $N \rightarrow \infty$  поверхность  $K(\tau, N)$ , соответствующая порогу синхронизации, стремится к порогу  $K^*(N)$ , не зависящему от интервала переключений  $\tau$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе строго обосновано, что при достаточно быстрых и равновероятных переключениях связей между узлами динамика мигающей системы Курамото качественно идентична динамике детерминированной системы Курамото с конфигурацией сети «каждый с каждым», в которой сила связи умножается на вероятность появления связи между узлами. Аналитически получены оценки порога силы связи для синхронизации осцилляторов в ансамбле. Установлена главная особенность мигающей модели Курамото — сохранение глобальной синхронизации при значительном увеличении интервала переключения связей. Показана возможность прерывистой синхронизации при небольших размерах сети и больших интервалах переключения. Численно определена область глобальной синхронизации. Установлено, что рост числа узлов  $N$  приводит к повышению устойчивости за счёт снижения вероятности появления в сети несвязных конфигураций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-08776) и Российского научного фонда (грант 14-12-00811).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. 156 p.
2. Michaels D. C., Matyas E. P., Jalife J. // Circ. Res. 1987. V. 61, No. 5. P. 704.
3. Brown E., Holmes P., Moehlis J. Globally coupled oscillator networks, in perspectives and problems in nonlinear science: a celebratory volume in honor of Larry Sirovich / Ed. E. Kaplan, J. E. Marsden, K. R. Sreenivasan. New York: Springer, 2003. P. 183.
4. Wiesenfeldt K., Colet P., Strogatz S. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57, No. 2. P. 1563.

5. Мишагин К. Г., Шалфеев В. Д., Пономаренко В. П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решётках: уч. пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2007. 188 с.
6. Neda Z., Ravasz E., Vicsek T., et al. // *Phys. Rev. E*. 2000. V. 61, No. 6. P. 6987.
7. Strogatz S. H., Abrams D. M., McRobie A., et al. // *Nature*. 2005. V. 438, No. 7064. P. 43.
8. Dorfler F., Bullo F. // *Automatica*. 2014. V. 50, No. 6. P. 1539.
9. Belykh I. V., Belykh V. N., Hasler M. // *Physica D*. 2004. V. 195, No. 1–2. P. 188.
10. Mills D. L. // *IEEE Trans. Commun.* 1991. V. 39, No. 10. P. 1482.
11. Дмитриев А. С., Герасимов М. Е., Емельянов Р. Ю., Ицков В. В. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2015. Т. 23, № 2. С. 21.
12. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // *Intern. Symp. on Mathematical Problems in Theoretical Physics (Kyoto University, Kyoto (Japan), 23–29 January 1975)* / Eds. H. Araki. *Lect. Notes Phys.* V. 39. New York: Springer, 1975. P. 420.
13. Belykh V. N., Petrov V. S., Osipov G. V. // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20, No. 1. P. 37.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955. 447 с.
15. Skorokhod A., Hoppensteadt F., Salehi H. *Random perturbation methods*. New York: Springer-Verlag, 2002. 510 p.
16. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
17. Strogatz S. H. // *Physica D*. 2000. V. 143, No. 1–4. P. 1.
18. Hasler M., Belykh V. N., Belykh I. // *SIAM J. Appl. Dynamical Systems*. 2013. V. 12, No. 2. P. 1007.
19. Hasler M., Belykh V. N., Belykh I. // *SIAM J. Appl. Dynamical Systems*. 2013. V. 12, No. 2. P. 1031.
20. Belykh I., Belykh V., Hasler M., Jeter R. // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2013. V. 222, No. 10. P. 2497.
21. Porfiri M., Stilwell D. J., Bollt E. M., Skufca J. D. // *Phys. D*. 2006. V. 224. P. 102.

Поступила в редакцию 29 декабря 2016 г.; принята в печать 4 июня 2017 г.

## SYNCHRONIZATION THRESHOLDS IN AN ENSEMBLE OF KURAMOTO PHASE OSCILLATORS WITH RANDOMLY BLINKING COUPLINGS

*N. V. Barabash and V. N. Belykh*

We consider a network of Kuramoto phase oscillators with randomly blinking couplings. Applicability of the averaging method for small switching intervals is rigorously substantiated. Using this method, we analytically estimate the threshold coupling force for synchronizing the ensemble oscillators. The threshold synchronization is studied as a function of the switching interval for various network sizes. The effect of preserving synchronization for a significant increase in the switching interval is found, which is the key feature of the system since an insignificant increase in this interval usually leads to synchronization failure. The intermittent-synchronization possibility for small network sizes and large switching intervals is shown. An increase in the network size is shown to result in a stability increase due to decreasing probability of appearance of uncoupled configurations. The regions corresponding to global oscillator synchronization are allocated in the system-parameter space.