УДК 551.510+533.9

РЕЖИМ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТОСФЕРНОМ ЦИКЛОТРОННОМ МАЗЕРЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. С. Грач[1*], *А. Г. Демехов*[2,1]

[1] Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород;
[2] Полярный геофизический институт, г. Апатиты, Россия

Уравнения, описывающие режим лампы обратной волны в магнитоактивной плазме при наличии перепада («ступеньки») на функции распределения энергичных заряженных частиц по скоростям, обобщены на случай произвольного направления распространения волны относительно внешнего магнитного поля и произвольной волновой моды. Определена зависимость порога возникновения неустойчивости от угла χ между волновым вектором $\mathbf{k}$ и внешним магнитным полем $\mathbf{B}_0$ для свистовых волн и медленной необыкновенной волны (Z-моды).

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при развитии кинетической неустойчивости в плазме на функции распределения заряженных частиц может образоваться резкий перепад по резонансной компоненте скорости. Это имеет место, например, при пучковой неустойчивости ленгмюровских волн [1] и при циклотронной неустойчивости свистовых волн [2]. В однородной среде образование такого перепада может привести к переходу от кинетической к гидродинамической неустойчивости. В неоднородной среде кинетический характер неустойчивости сохраняется, при этом частотная зависимость интегрального коэффициента усиления волн имеет узкий и высокий, но конечный максимум [2, 3].

В работе [4] было установлено, что при наличии такого перепада («ступеньки») на функции распределения возможен переход циклотронной неустойчивости свистовых волн в режим, аналогичный режиму лампы обратной волны (ЛОВ). В дальнейшем в работах [5–9] этот режим исследовался для случая свистовых волн, распространяющихся продольно по отношению к внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_0$, в приложении к теории генерации крайне низкочастотных и очень низкочастотных (0,3÷30 кГц) хоровых излучений в магнитосфере Земли [10–13]. В пользу преимущественно продольного направления волнового вектора $\mathbf{k}$ по отношению к $\mathbf{B}_0$ свидетельствуют экспериментальные данные спутников «Polar» и «Cluster» [14, 15]. Вместе с тем, довольно значительная часть хоровых излучений имеет направления с углами волновой нормали, близкими к резонансному [16–19]. Поэтому представляет интерес проанализировать особенности режима ЛОВ для волн с косым направлением распространения. В данной работе уравнения, описывающие этот режим, обобщаются на случай произвольного направления распространения и произвольной волновой моды и анализируется зависимость порога возбуждения волн в режиме ЛОВ от угла между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие электронов магнитоактивной плазмы с квазимонохроматической волной с частотой ω, распространяющейся под углом χ к внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_0$. Ось z

* vsgrach@appl.sci-nnov.ru

направим вдоль поля $\mathbf{B}_0$, которое будем считать плавно неоднородным, ось x — вдоль поперечной компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = \{k_\perp, 0, k_{||}\}$, где индексы $\perp$ и $\|$ обозначают поперечное и продольное направления по отношению к $\mathbf{B}_0$ соответственно, $k_\perp = k\sin\chi$, $k_{||} = k\cos\chi$. Электрическое поле волны представим в виде

$$\mathbf{E}_\mathrm{w} = \mathbf{E}\exp(i\Psi) = \mathcal{E}\mathbf{a}\exp(i\Psi), \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ — медленно меняющийся вектор электрического поля, $\mathcal{E}$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, $\Psi = -\omega t + \int \mathbf{k}\,\mathrm{d}\mathbf{r} + \phi_0$ — фаза волны, $\phi_0 = \mathrm{const}$ — начальная фаза, $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\{1, i\alpha_y, \alpha_z\}$ — вектор поляризации собственной волновой моды плазмы, $|\mathbf{a}| = 1$, a_x — действительное положительное число, t и $\mathbf{r}$ — время и радиус-вектор соответственно.

Коэффициенты поляризации α_y и α_z можно выразить через компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. В дальнейшем мы будем считать, что эрмитова часть тензора $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ определяется холодной плазмой, а энергичные электроны влияют только на условия резонансного возбуждения или поглощения волн. Если тензор диэлектрической проницаемости записать в виде

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

то поляризационные коэффициенты выражаются формулами [20]

$$\alpha_y = -\frac{\omega^2\varepsilon_2}{k^2c^2 - \omega^2}, \qquad \alpha_z = \frac{k_\perp k_{||}c^2}{k_\perp^2 c^2 - \omega^2\varepsilon_3}, \tag{3}$$

где c — скорость света в вакууме.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда существенна только продольная неоднородность среды. Также не будем учитывать эффекты рефракции волн, а именно медленное изменение угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ и связанное с этим изменение вектора поляризации нормальной моды. Данное упрощение оправдано малым продольным размером области, в которой реализуется режим ЛОВ, по сравнению с масштабом неоднородности магнитного поля [4]. В указанных приближениях эволюция волн описывается уравнением для медленно меняющейся комплексной амплитуды электрического поля $\mathcal{E}$ [21]:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + V_{\mathrm{g}||}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{4\pi\omega}{\partial(\omega^2 n^2)/\partial\omega}J, \tag{4}$$

где $\mathbf{V}_\mathrm{g} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — групповая скорость волны, $n = kc/\omega$ — показатель преломления среды, J — плотность комплексного резонансного тока [22]:

$$J = -e\int(\mathbf{v}\mathbf{a}^*)\exp(-i\Psi)F\,\mathrm{d}^3\mathbf{v}. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость электронов, e — элементарный заряд, индекс $*$ означает комплексное сопряжение, $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения электронов, нормированная на концентрацию энергичных электронов N_h:

$$\int F\mathrm{d}^3\mathbf{v} = N_\mathrm{h}. \tag{6}$$

В дальнейшем для краткости будем называть величину J просто резонансным током.

Движение энергичных электронов удобно описывать в переменных W, I, φ, где $W = mv^2/2 = mv_{||}^2/2 + IB_0/2$ — кинетическая энергия, $I = mv_\perp^2/B_0$ — первый адиабатический инвариант, φ — фаза гировращения, связанная с компонентами скорости частицы $\mathbf{v}$ соотношениями

$$v_x = v_\perp \cos\varphi, \qquad v_y = v_\perp \sin\varphi, \qquad v_z = v_{||}\,. \tag{7}$$

Фазу волны с учётом (7) можно записать как

$$\Psi = -\omega t + k_\perp(x_0 + v_\perp \sin\varphi/\Omega_\mathrm{c}) + \int k_{||}\,\mathrm{d}z + \phi_0, \tag{8}$$

где ϕ_0 — постоянная, x_0 — координата центра ларморовской окружности (её в нашей задаче без ограничения общности можно положить равной нулю), $\Omega_\mathrm{c} = eB_0/(mc) > 0$ — гирочастота, m — масса электрона. Здесь и далее ограничимся нерелятивистскими уравнениями движения частиц, имея в виду типичный для магнитосферных условий случай, когда кинетическая энергия $W \ll \ll mc^2$, $n = kc/\omega \gg 1$.

Система уравнений движения электронов включает закон сохранения энергии, уравнения для первого адиабатического инварианта и фазы гировращения и закон движения ларморовского центра:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -e(\mathbf{v}\mathbf{E}_\mathrm{w}), \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{2e}{B_0}\left\{(\mathbf{k}_\perp\mathbf{v}_\perp)(\mathbf{v}\mathbf{E}_\mathrm{w}) + \mathbf{v}_\perp\mathbf{E}_\perp\left[1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega}\right]\right\}, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Omega_\mathrm{c} + \frac{e}{mv_\perp^2}\left\{\left[1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega}\right][\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{E}_{\mathrm{w}\perp}]_z - \frac{[\mathbf{k}_\perp \times \mathbf{v}_\perp]_z}{\omega}(\mathbf{v}\mathbf{E}_\mathrm{w})\right\}, \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_\parallel. \tag{12}$$

Для функции распределения F, записанной в переменных W, I и φ, а именно $F = F[t, z(W, I, \varphi), \mathbf{v}(W, I, \varphi)]$, справедливо кинетическое уравнение, следующее из теоремы Лиувилля:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_\parallel\frac{\partial F}{\partial z} + \dot{W}\frac{\partial F}{\partial W} + \dot{I}\frac{\partial F}{\partial I} + \dot{\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0. \tag{13}$$

Здесь точкой обозначены производные по времени.

С помощью известных тождеств (подробнее см. [20]) входящие в выражение (5) и уравнения (9)–(11) выражения можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{v}\mathbf{E}_\mathrm{w}) = \mathcal{E}a_x\sum_l C_l(v_{||}, v_\perp)\exp(i\Psi_l), \tag{14}$$

$$\mathbf{v}\mathbf{a}^*\exp(-i\Psi) = a_x\sum_l C_l(v_{||}, v_\perp)\exp(-i\Psi_l). \tag{15}$$

Здесь $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$,

$$\Psi_l = -\omega t + l\varphi + k_{||}z + k_\perp x_0 + \phi_0, \tag{16}$$

$$C_l(v_{||}, v_\perp) = (l\Omega_\mathrm{c}/k_\perp + \alpha_z v_{||})J_l(\rho) + v_\perp\alpha_y J_l'(\rho), \tag{17}$$

$\rho = k_\perp v_\perp/\Omega_\mathrm{c}$, $J_l(\rho)$ и $J_l'(\rho)$ — функция Бесселя 1-го рода l-го порядка и её производная соответственно.

Из (16) и (11) следует уравнение для фазы Ψ_l:

$$\frac{\mathrm{d}\Psi_l}{\mathrm{d}t} = -\Delta_l + \frac{le}{mv_\perp^2}\left\{\left[1 - \frac{(\mathbf{kv})}{\omega}\right][\mathbf{v}_\perp, \mathbf{E}_{\mathrm{w}\perp}]_z - \frac{[\mathbf{k}_\perp \times \mathbf{v}_\perp]_z}{\omega}(\mathbf{vE}_{\mathrm{w}})\right\} = -\Delta_l + O(\mathcal{E}), \tag{18}$$

где $\Delta_l = \omega - l\Omega_{\mathrm{c}} - k_{||}v_{||}$ — частотная расстройка относительно циклотронного резонанса с номером l, через $O(\mathcal{E})$ обозначены члены, пропорциональные амплитуде волны. Доминирующим в суммах (14) и (15) является слагаемое, для которого $\mathrm{d}\Psi_l/\mathrm{d}t \approx 0$, что при достаточно малой амплитуде волны соответствует условию l-го циклотронного резонанса:

$$\Delta_l = \omega - l\Omega_{\mathrm{c}} - k_{||}v_{||} = 0. \tag{19}$$

Циклотронные резонансы отстоят друг от друга по оси $v_{||}$ на величину $\Omega_{\mathrm{c}}/k_{||}$, которая при малой амплитуде волны существенно превосходит нелинейную ширину для любого из них. Это позволяет в дальнейшем рассматривать изолированный резонанс.

2. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СО «СТУПЕНЬКОЙ»

Следуя работам [7, 8], рассмотрим ситуацию, когда исходная функция распределения электронов F_0 представляет собой функцию распределения со «ступенькой» по продольным скоростям $v_{||L}^2 = (v^2 - v_{\perp L}^2) = (2W - IB_{0L})/m$ в центральном сечении ловушки (здесь и далее индекс L обозначает величины в центральном сечении ловушки):

$$F_0(z, \mathbf{v}) = N_{\mathrm{h}L}[1 - b + b\Xi({V_*}^2/2 - v_{||L}^2/2)]\mathcal{F}(v_{||L}^2, I). \tag{20}$$

Здесь $N_{\mathrm{h}L}$ — концентрация горячих частиц на экваторе, $\Xi(x)$ — единичная степ-функция, $\mathcal{F}(v_{||L}^2, I)$ — плавная часть функции распределения, параметр $b < 1$ характеризует высоту «ступеньки», $V_* > 0$ — модуль продольной скорости, соответствующей ступеньке. Для этой функции распределения справедливо условие нормировки, аналогичное (6), а её значение в любой точке фазового пространства определяется с помощью записи входящих в неё величин через z и $\mathbf{v}$.

Выделим возмущение f функции распределения:

$$F = F_0 + f. \tag{21}$$

Если это возмущение рассматривать как функцию координаты, времени и начальных значений в пространстве скоростей, $f = f[t, z, \mathbf{v}(W_0, I_0, \varphi_0, t, z)]$, то из (13) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_{||}\frac{\partial f}{\partial z} = -\left(\frac{\mathrm{d}v_{||L}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial F_0}{\partial v_{||L}}\right|_I + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial F_0}{\partial I}\right|_{v_{||L}}\right). \tag{22}$$

В правую часть (22) основной вклад даёт слагаемое, пропорциональное большой производной $\partial F_0/\partial v_{||L}$ на «ступеньке»: для функции (20) $\partial F_0/\partial v_{||L} \propto [\delta(v_{||L} + V_*) - \delta(v_{||L} - V_*)]$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Это даёт возможность в случае малого коэффициента полезного действия (КПД) генератора считать, аналогично работам [7, 23], что резонансный ток (5) в основном переносится частицами с продольными скоростями $v_{||L0} \approx \pm V_*$. Также при малом КПД можно учитывать изменение продольной скорости частиц в центре ловушки по сравнению с начальным значением только в слагаемых, ответственных за отстройку от резонанса, и пренебрегать влиянием этого изменения на оператор $\partial/\partial t + v_{||}\partial/\partial z$. Это приближение широко используется

в электронике сверхвысоких частот [24]. Очевидно, оно справедливо для систем, на длинах которых заряженная частица успевает совершить хотя бы одну осцилляцию в поле волны (т. е. экспоненциальный множитель в формуле (5) для резонансного тока меняет знак), а продольная скорость изменяется не слишком сильно.

В данной работе мы рассматриваем только электромагнитную волну, распространяющуюся в заданном направлении, но при этом учитываем возможность взаимодействия как встречного, так и попутного электронного потока с этой волной. Следует отметить, что для разных потоков резонансное взаимодействие с волной проходит на разных циклотронных гармониках. В этом случае возмущение f удобно записать как

$$f = f_-[t, z, v_{||L0}(W_0, I_0), I_0, \varphi_0] + f_+[t, z, v_{||L0}(W_0, I_0), I_0, \varphi_0], \tag{23}$$

где функция f_- описывает возмущение функции распределения в окрестности скорости $v_{||L0} = -V_*$, f_+ — в окрестности скорости $v_{||L0} = V_*$. Тогда, проинтегрировав уравнение (22) по $v_{||L}$, имеем

$$\frac{\partial f_{\perp -}}{\partial t} - v_* \frac{\partial f_{\perp -}}{\partial z} = - \left.\frac{\mathrm{d}v_{||L}}{\mathrm{d}t}\right|_{v_{||}=-v_*} N_\mathrm{h} b \mathcal{F}({V_*}^2, I), \tag{24}$$

$$\frac{\partial f_{\perp +}}{\partial t} + v_* \frac{\partial f_{\perp +}}{\partial z} = \left.\frac{\mathrm{d}v_{||L}}{\mathrm{d}t}\right|_{v_{||}=v_*} N_\mathrm{h} b \mathcal{F}({V_*}^2, I). \tag{25}$$

Уравнение (24) получено интегрированием (22) в пределах $-\infty < v_{||L} < 0$, уравнение (25) — интегрированием (22) в пределах $0 < v_{||L} < \infty$, $v_* = \{{V_*}^2 + [B_{0L} - B_0(z)]\, I/m\}^{1/2}$ — величина продольной скорости в точке z, соответствующая «ступеньке»,

$$f_{\perp\sigma} = \int f_\sigma \,\mathrm{d}v_{||L} \approx \int f_\sigma \,\mathrm{d}v_{||L0}, \tag{26}$$

$\sigma = +, -$. Уравнение для величины $v_{||L} = (2W - IB_{0L})^{1/2}/m$ следует из уравнений (9) и (10) и для l-го циклотронного резонанса записывается следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}v_{||L}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{m}\left\{\frac{k_{||}}{\omega}\,(\mathbf{v}\mathbf{E}_\mathrm{w}) + E_{||}\left[1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega}\right]\right\} = -\frac{e}{m}\,\frac{\mathcal{E}a_x}{\omega}\left[k_{||}C_l(v_{||}, v_\perp) + \alpha_z \Delta_l J_l(\rho)\right]\exp\left(i\Psi_l\right). \tag{27}$$

Резонансный ток (5) при этом представляется как $J = J_- + J_+$, где

$$J_- = -ea_x \int C_{l^-}(v_{||} \approx -v_*, v_\perp)\exp\left(-i\Psi_{l^-}\right) f_- \,\mathrm{d}v_{||} v_\perp \,\mathrm{d}v_\perp \,\mathrm{d}\varphi \approx$$

$$\approx -ea_x \,\frac{B_0(z)}{B_{0L}}\,\frac{v_*}{V_*}\int C_{l^-}(v_{||} \approx -v_*, v_\perp)\exp\left(-i\Psi_{l^-}\right) f_{\perp -} v_{\perp L0}\,\mathrm{d}v_{\perp L0}\,\mathrm{d}\varphi_0, \tag{28}$$

$$J_+ = -ea_x \int C_{l^-}(v_{||} \approx v_*, v_\perp)\exp\left(-i\Psi_{l^-}\right) f_+ \,\mathrm{d}v_{||} v_\perp \,\mathrm{d}v_\perp \,\mathrm{d}\varphi \approx$$

$$\approx -ea_x \,\frac{B_0(z)}{B_{0L}}\,\frac{v_*}{V_*}\int C_{l^+}(v_{||} \approx v_*, v_\perp)\exp\left(-i\Psi_{l^+}\right) f_{\perp +} v_{\perp L0}\,\mathrm{d}v_{\perp L0}\,\mathrm{d}\varphi_0. \tag{29}$$

Здесь l^+ и l^- — номера резонансов, отвечающих встречным потокам ($v_{||} = v_*$ и $-v_*$ соответственно). Переход к интегрированию по начальным переменным в выражениях (26), (28) и (29) оправдан вследствие малости КПД генератора.

Дальнейшее упрощение возможно в ситуации, когда плавная часть функции распределения $\mathcal{F}(v_{||L}^2, I)$ имеет достаточно узкий максимум в окрестности значения $I_* = p_{\perp *}^2/(mB_{0L})$, где $p_{\perp *} = mv_{\perp *}$. В этом случае уравнения (24) и (25) можно умножить на $C_{l^-}(v_{||} \approx -v_*, v_{\perp L0})$ и $C_{l^+}(v_{||} \approx v_*, v_{\perp L0})$ соответственно, а затем проинтегрировать по I_0. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + V_{\mathrm{g}||}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{4\pi\omega}{\partial(\omega^2 n^2)/\partial\omega}\, J, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \Phi^-}{\partial t} - v_*\frac{\partial \Phi^-}{\partial z} = -\frac{Q_{l^-}}{2\pi e}\,\mathcal{E}\exp(i\Psi_{l-}), \tag{31}$$

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial t} + v_*\frac{\partial \Phi^+}{\partial z} = -\frac{Q_{l^+}}{2\pi e}\,\mathcal{E}\exp(i\Psi_{l+}), \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Psi_l}{\mathrm{d}t} = -\Delta_l + \frac{e}{m}\frac{l}{\omega}\,P_l(v_{||}, v_\perp)\,a_x\mathcal{E}\exp(i\Psi_l). \tag{33}$$

Здесь

$$\Phi^- = a_x\,[B_0(z)/B_{0L}]\,(v_*/V_*)\int C_{l^-}(-v_*, v_{\perp L0}) f_-\,\mathrm{d}v_{||L0} v_{\perp L0}\,\mathrm{d}v_{\perp L0},$$

$$\Phi^+ = a_x\,[B_0(z)/B_{0L}]\,(v_*/V_*)\int C_{l^+}(v_*, v_{\perp L0}) f_+\,\mathrm{d}v_{||L0} v_{\perp L0}\,\mathrm{d}v_{\perp L0},$$

резонансный ток (5) даётся формулой

$$J = J_- + J_+ = -e\left[\int \Phi^-\exp(-i\Psi_{l^-})\mathrm{d}\varphi_0 + \int \Phi^+\exp(-i\Psi_{l^+})\,\mathrm{d}\varphi_0\right], \tag{34}$$

параметры резонансного взаимодействия Q_l определяются соотношением

$$Q_l = -\mathrm{sgn}(v_{\mathrm{res}\,l})\,\frac{ba_x^2}{2}\,\frac{\Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2}{\omega}\,\frac{B_{0L}}{B_0(z)}\,\frac{V_*}{v_*}\times$$
$$\times\int C_l[\mathrm{sgn}(v_{\mathrm{res}\,l})v_*, v_{\perp L0}]\left\{k_{||}C_l[\mathrm{sgn}(v_{\mathrm{res}\,l})v_*, v_{\perp L0}] + \alpha_z\Delta_l J_l(\rho)\right\}\mathcal{F}({V_*}^2, I_0) v_{\perp L0}\,\mathrm{d}v_{\perp L0}, \tag{35}$$

$\Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 = 4\pi e^2 N_{\mathrm{h}}/m$ — квадрат плазменной частоты горячих электронов, $\mathrm{sgn}(v_{\mathrm{res}\,l})$ — знак продольной резонансной скорости $v_{\mathrm{res}\,l}$, отвечающей резонансу с номером l,

$$P_l(v_{||}, v_\perp) = v_\perp^{-1}(\omega - k_{||}v_{||})\,[lJ_l(\rho)/\rho + \alpha_y J_l'(\rho)] -$$
$$-\alpha_z k_\perp v_{||} J_l'(\rho) - k_\perp v_\perp\,[(1-\alpha_y)\,J_l(\rho) + J_{l-2}(\rho) + \alpha_y J_{l+2}(\rho)]. \tag{36}$$

Параметры Q_{l^-} и Q_{l^+} определяют эффективность взаимодействия волны с частицами; знак и величина данных параметров, в свою очередь, определяются характеристиками выбранной моды и энергичных частиц. При точном резонансе ($\Delta_l = 0$) знак параметра Q_l определяется знаком резонансной скорости $v_{\mathrm{res}\,l}$; при этом $Q_{l^-} \geq 0$, $Q_{l^+} \leq 0$. Как будет видно из дальнейшего, взаимодействие на «нулевом» резонансе в данном случае обусловливает затухание Ландау.

Следует отметить, что одновременное выполнение условий резонанса для обоих потоков возможно только при определённых сочетаниях параметров волны (частота, угол распространения) и частиц (начальные энергия и питч-угол).

Система (30)–(33) обобщает на случай произвольной плазменной моды и произвольного угла распространения волны полученную в [7] систему уравнений, описывающую режим ЛОВ при наличии «ступеньки» на функции распределения электронов. Такая система была названа С-ЛОВ, чтобы отличить её от лабораторных ЛОВ, в которых начальная функция распределения представляет собой пучок с малым разбросом по скоростям («пучковые» ЛОВ). Аналогично будем называть и обобщённую систему (30)–(33), хотя в ней присутствует также поток электронов, попутный с волной. Как сказано выше, в случае невозмущённой функции распределения (20) именно взаимодействие со встречным потоком порождает неустойчивость, а попутный поток обусловливает затухание волны.

2.1. Линейное приближение

В линейном приближении из уравнений (31) и (32) при учёте уравнения (33) можно получить уравнения для резонансных токов J_- и J_+. Для этого уравнения (31) и (32) нужно умножить на $\exp(-i\Psi_{l-})$ и $\exp(-i\Psi_{l+})$ соответственно, а затем проинтегрировать по φ. Поскольку в линейном приближении $\Phi^-\mathrm{d}\Psi_{l^-}/\mathrm{d}t = -\Delta_{l^-}\Phi^-$ и $\Phi^+\mathrm{d}\Psi_{l^+}/\mathrm{d}t = -\Delta_{l^+}\Phi^+$, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} - v_* \frac{\partial J_-}{\partial z} = -Q_{l^-}\mathcal{E} + i\Delta_{l^-}J_-, \tag{37}$$

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + v_* \frac{\partial J_+}{\partial z} = -Q_{l^+}\mathcal{E} + i\Delta_{l^+}J_+. \tag{38}$$

Обезразмерим пространственные переменные на некоторый масштаб длины l_{BWO} ($\zeta = z/l_{\mathrm{BWO}}$) и временны́е — на масштаб $t_{\mathrm{BWO}} = V_*/l_{\mathrm{BWO}}$ ($\tau = t/t_{\mathrm{BWO}}$), а также введём переменную $j = 4\pi\omega J/\partial(\omega^2 n^2)/\partial\omega$. Тогда система уравнений (4), (37) и (38) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} + u_{\mathrm{g}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = -(j_- + j_+), \tag{39а}$$

$$\frac{\partial j_-}{\partial \tau} - u_* \frac{\partial j_-}{\partial \zeta} = -q_{l^-}\mathcal{E} + i\delta_{l^-}j_-, \tag{39б}$$

$$\frac{\partial j_+}{\partial \tau} + u_* \frac{\partial j_+}{\partial \zeta} = -q_{l^+}\mathcal{E} + i\delta_{l^+}j_+. \tag{39в}$$

Здесь $u_{\mathrm{g}} = V_{\mathrm{g}\|}/V_*$, $u_* = v_*/V_*$, $\delta_l = \Delta_l t_{\mathrm{BWO}}$, $q_l = 4\pi Q_l t_{\mathrm{BWO}}^2\omega/[\partial(\omega^2 n^2)/\partial\omega]$ — безразмерный параметр взаимодействия.

Для дальнейших оценок рассмотрим плавную часть функции распределения в виде $\mathcal{F}(v_{\|L}^2, I_0) = \mathcal{F}_{\|}(v_{\|L}^2)\mathcal{F}_{\perp}(I_0)$, где $\mathcal{F}_{\perp}(I_0) = v_{\perp L0}^{-1}\delta[v_{\perp L0}(I_0) - v_{\perp L0}(I_*)]$. Тогда параметр q_l запишется в виде

$$q_l = -\mathrm{sgn}(v_{\mathrm{res}\,l})\, b a_x^2 \Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 t_{\mathrm{BWO}}^2 \frac{B_{0L}}{B_0(z)} \frac{V_*}{v_*} \frac{2\pi\omega c \mathcal{F}_{\|}({V_*}^2)}{\partial(\omega^2 n^2)/\partial\omega} [n_{\|}\widetilde{C}_l^2 + \alpha_z J_l(\rho)\delta_l \omega^{-1} t_{\mathrm{BWO}}^{-1}\widetilde{C}_l], \tag{40}$$

где $\widetilde{C}_l = C_l/c = \{[l\Omega_{\mathrm{c}}/(n_\perp\omega) + \alpha_z\beta_{\|}]\, J_l(\rho)\} + \alpha_y\beta_\perp J_l'(\rho)$, $\beta_\perp = v_\perp/c$, $\beta_{\|} = v_{\|}/c$, $n_{\|} = n\cos\chi$, $n_\perp = n\sin\chi$. При этом в соотношениях (40) $v_{\|}(l = l_-) = -v_*$, $v_{\|}(l = l_+) = v_*$, $v_\perp = v_*\mathrm{tg}\Theta$, где Θ — экваториальный питч-угол. Заметим, что величина Θ является не переменной, характеризующей конкретную частицу, а параметром плавной функции распределения $\mathcal{F}(v_{\|L}^2, I_0)$.

Очевидно, что номера гармоник l^- и l^+ не могут быть произвольными; также резонансное взаимодействие электрона с фиксированной заданной энергией и волны при движении во встречных направлениях возможно только при определённых значениях частоты волны ω и угла χ.

В большинстве ситуаций резкий перепад на функции распределения приводит к выделению только одной резонансной гармоники. В частности, для свистовых волн (их частота $\omega < \Omega_c$) одновременное выполнение условий основного и «нулевого» резонанса возможно, очевидно, лишь при $\omega = \Omega_c/2$.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда резонансное взаимодействие возможно только при движении электрона навстречу волне ($j_+ = 0$). Тогда система состоит из уравнений (39а) и (39б) и полностью аналогична линеаризованной системе, исследованной ранее [4, 6, 23] для продольного распространения волны.

Для случая безграничной однородной среды решение системы (39а) и (39б) можно искать в виде $\{\mathcal{E}, j\} \propto \exp(-i\Omega\tau + i\kappa\widetilde{z})$, $\Omega = \Omega_r + i\gamma$ (Ω_r и γ действительны). Учитывая, что в этом случае $u_* = 1$, получим дисперсионное соотношение

$$(\Omega_r + i\gamma + \kappa + \delta_l)(u_g\kappa - \Omega_r - i\gamma) = q_l. \tag{41}$$

Разделяя действительную и мнимую часть в (41), найдём выражение для инкремента неустойчивости γ:

$$\gamma^2 + (u_g\kappa - \Omega_r)^2 = q_l. \tag{42}$$

Для возмущений с $\kappa = \Omega_r/u_g$ получаем

$$\gamma^2 = q_l. \tag{43}$$

Для задачи о возбуждении волн в ограниченной системе с длиной l_{BWO} вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$ параметр q_l играет роль управляющего параметра С-ЛОВ. В работе [4] было показано, что условие возбуждения абсолютной неустойчивости в однородной С-ЛОВ имеет вид

$$\bar{q}_l = \frac{q_l}{u_g} > \bar{q}_{l\,\mathrm{thr}} = \frac{\pi^2}{16}. \tag{44}$$

Характеристики нелинейных режимов генерации в С-ЛОВ в зависимости от параметра q_l рассматривались в работах [7, 8]. В работах [6, 23] был найден порог возбуждения С-ЛОВ для неоднородной среды и было показано, что его можно записать в форме (44) при соответствующем переопределении эффективной длины системы l_{BWO}.

Таким образом, анализ условий развития неустойчивости в С-ЛОВ в общем случае сводится к вычислению параметра $\bar{q}_l$. Ниже рассмотрена зависимость этого параметра от угла распространения волны по отношению к $\mathbf{B}_0$.

3. УСЛОВИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН В С-ЛОВ ПРИ НЕПРОДОЛЬНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ

Поскольку наилучшие условия возбуждения С-ЛОВ реализуются при условии $\delta_l = 0$, в дальнейших расчётах рассматривается именно этот случай (следовательно, $q_1 \geq 0$, $q_0 \leq 0$). Также мы исследуем свойства параметров q_l в центре ловушки, т. е. считаем $v_* = V_*$.

3.1. Зависимость параметра связи С-ЛОВ от угла распространения свистовых волн для основного циклотронного резонанса

В данном разделе проанализирована зависимость параметра $\bar{q}_1$ от угла распространения свистовой волны χ для случая основного циклотронного резонанса ($l = 1$).

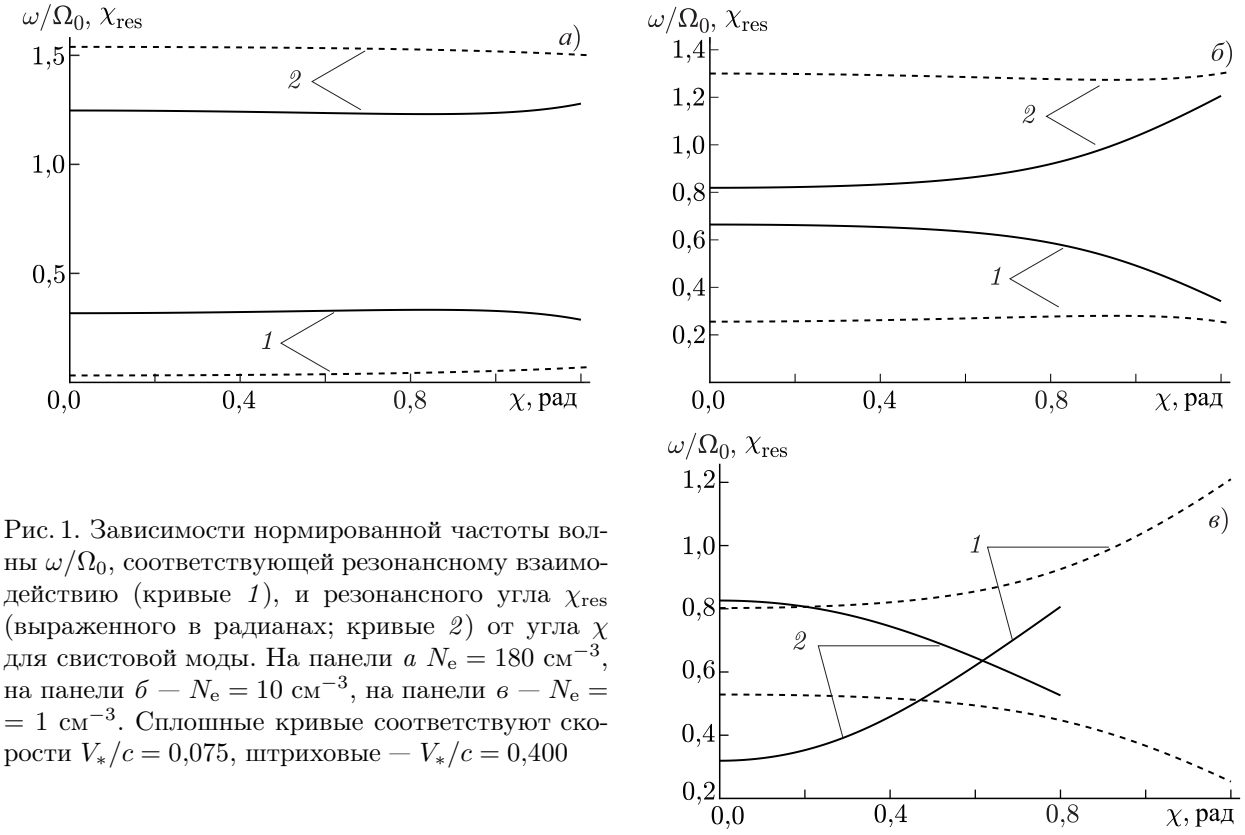

Рис. 1. Зависимости нормированной частоты волны ω/Ω_0, соответствующей резонансному взаимодействию (кривые *1*), и резонансного угла $\chi_{\rm res}$ (выраженного в радианах; кривые *2*) от угла χ для свистовой моды. На панели *а* $N_{\rm e} = 180$ см$^{-3}$, на панели *б* — $N_{\rm e} = 10$ см$^{-3}$, на панели *в* — $N_{\rm e} = 1$ см$^{-3}$. Сплошные кривые соответствуют скорости $V_*/c = 0{,}075$, штриховые — $V_*/c = 0{,}400$

Расчёты проводились для условий, отвечающих магнитной оболочке $L = 4{,}6$ в магнитосфере Земли, т. е. гирочастоте электронов $\Omega_{\rm c} \approx 5{,}6 \cdot 10^4$ с$^{-1}$. Концентрация холодной плазмы выбиралась в диапазоне $N_{\rm e} = 1 \div 180$ см$^{-3}$ (отношение плазменной частоты холодных электронов к гирочастоте составляло $\Omega_{\rm pe\,c}/\Omega_{\rm c} \approx 1 \div 13$). Характерные энергии горячих частиц $W \approx 5 \div 50$ кэВ, что соответствует $\beta = \sqrt{\beta_{||}^2 + \beta_{\perp}^2} \approx 0{,}10 \div 0{,}45$. Полученные результаты остаются качественно справедливыми в широком диапазоне параметров плазмы и магнитного поля, т. к. зависимость дисперсионных и поляризационных коэффициентов свистовых волн от угла χ качественно не изменяется при варьировании этих параметров, хотя она имеет различный характер на частотах выше и ниже $\Omega_{\rm c}/2$.

При фиксированной продольной скорости V_*, соответствующей «ступеньке», частота волны ω, отвечающая резонансному взаимодействию с энергичными частицами и определяемая из условия $\Delta_1 = 0$ (резонансная частота), также зависит от угла χ. Зависимость $\omega(\chi)$ представлена на рис. 1, там же приведены значения угла $\chi_{\rm res} \approx \arccos(\omega/\Omega_{\rm c})$, соответствующего резонансному конусу при данном ω. Частота волны, соответствующая резонансному взаимодействию, незначительно возрастает с ростом χ, затем убывает. При этом угол χ, при котором резонансная частота максимальна, возрастает с увеличением скорости V_* и концентрации $N_{\rm e}$. Заметим, что для разреженной плазмы максимальная частота отвечает продольному распространению (см. рис. 1*в*, резонансная частота монотонно убывает), а для достаточно плотной плазмы при больши́х скоростях частота возрастает вплоть до $\chi = \chi_{\rm res}$ (см. рис. 1*а*, штриховая линия). При бо́льших значениях продольной скорости V_* резонансное взаимодействие возможно в более широком диапазоне углов χ.

Зависимости параметра $\bar{q}_1$ от угла распространения χ для свистовой волны представлены на рис. 2, при этом $\bar{q}_1$ нормирован на величину $\bar{q}_1(\chi = 0) = \bar{q}_{1||}$, соответствующую продольному

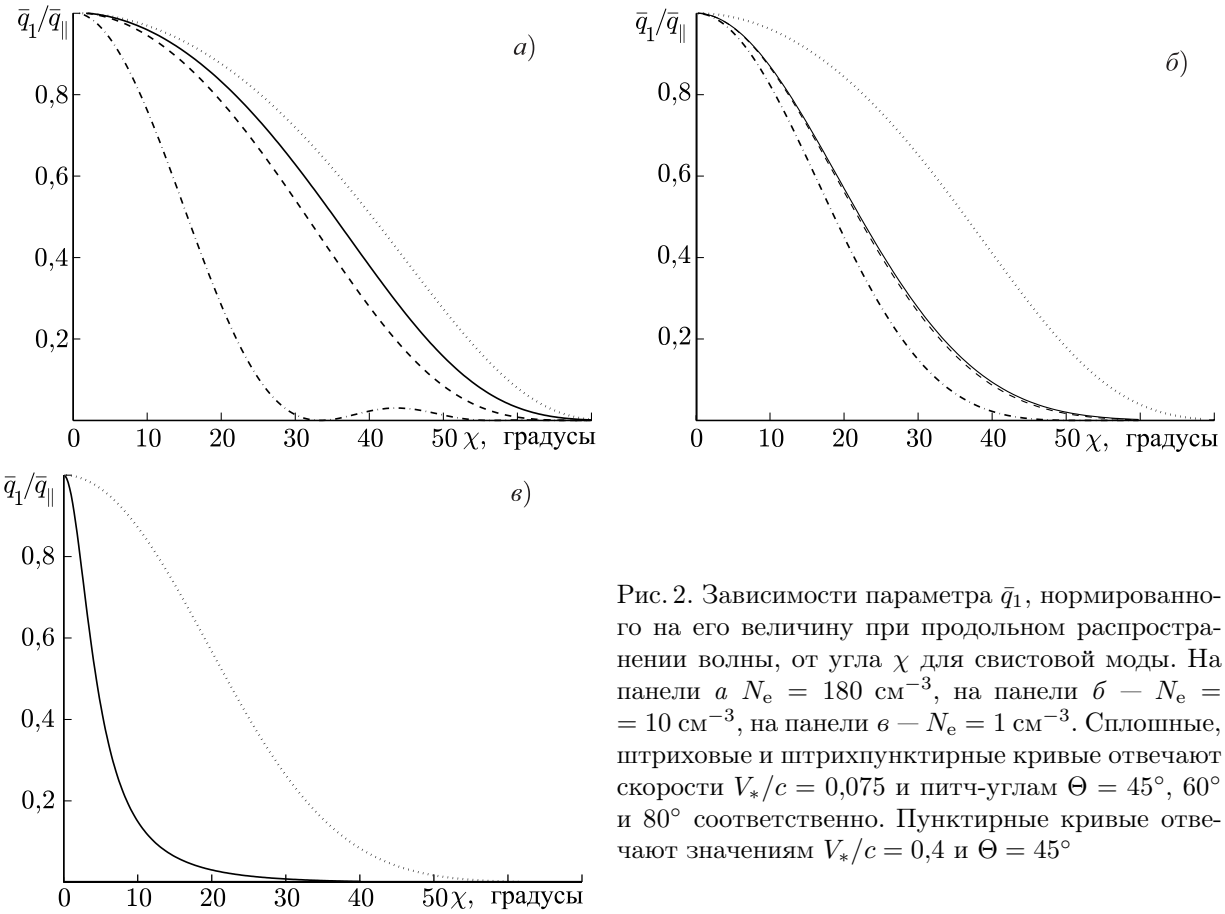

Рис. 2. Зависимости параметра $\bar{q}_1$, нормированного на его величину при продольном распространении волны, от угла χ для свистовой моды. На панели *а* $N_\mathrm{e} = 180$ см$^{-3}$, на панели *б* — $N_\mathrm{e} = 10$ см$^{-3}$, на панели *в* — $N_\mathrm{e} = 1$ см$^{-3}$. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые отвечают скорости $V_*/c = 0{,}075$ и питч-углам $\Theta = 45°$, $60°$ и $80°$ соответственно. Пунктирные кривые отвечают значениям $V_*/c = 0{,}4$ и $\Theta = 45°$

распространению волны [6, 7]:

$$\bar{q}_{1||} = \frac{q_{1||}}{u_\mathrm{g}} = ba_x^2\Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 t_\mathrm{BWO}^2 \frac{1}{u_\mathrm{g}} \left.\frac{2\pi\omega}{\partial(\omega^2n^2)/\partial\omega}\right|_{\chi=0} c\mathcal{F}_{||}({V_*}^2)\beta_\perp^2 = ba_x^2\Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 t_\mathrm{BWO}^2 \frac{\pi V_*}{n|_{\chi=0}}\,\mathcal{F}_{||}({V_*}^2)\beta_\perp^2. \quad (45)$$

Как следует из рис. 2, величина $\bar{q}_1$ убывает от $\bar{q}_{1||}$ до нуля при увеличении χ от нуля до χ_res. В случае относительно плотной плазмы и большого питч-угла (см. рис. 2*а*, штрихпунктирная кривая) величина $\bar{q}_1(\chi)$ достигает нуля при значениях χ, заметно меньших χ_res, затем $\bar{q}_1$ возрастает до локального максимума, значительно меньшего $\bar{q}_{1||}$, и снова убывает до нуля. При фиксированном угле $\chi \ll \chi_\mathrm{res}$ величина $\bar{q}_1$ возрастает с увеличением продольной скорости энергичных электронов V_* и убывает с ростом питч-угла Θ (для максимальной скорости $V_*/c = 0{,}4$ расчёты для больши́х питч-углов не проводились, т. к. в этом случае энергия частицы становится релятивистской при $\Theta > 45°$). Для малых значений V_* зависимость $\bar{q}_1$ от питч-угла ярко выражена для плотной плазмы и практически отсутствует для разреженной плазмы: на рис. 2*в* зависимости для больши́х питч-углов при $V_*/c = 0{,}075$ не приведены, т. к. полностью совпадают с зависимостью для $\Theta = 45°$.

Данные зависимости можно объяснить следующим образом. С ростом угла χ уменьшается коэффициент поляризации α_y ($\alpha_y = 1$ при $\chi = 0$, см. (3)) и возрастают аргумент функции Бесселя ρ и коэффициент α_z ($\alpha_z = 0$ при $\chi = 0$); поскольку в множитель C_1^2 слагаемые с коэффициентами α_y и α_z входят с разным знаком (см. (17), $v_{||} = -V_* < 0$), данное свойство коэффициентов поляризации, так же как и увеличение аргумента ρ, приводит к уменьшению величины $\bar{q}_1$. Также с ростом угла χ уменьшается множитель $\omega/[\partial(\omega^2n^2)/\partial\omega]$, связанный с групповой скоростью волны

$\mathbf{V}_{\rm g} = [\partial(c^2k^2 - \omega^2n^2)/\partial\mathbf{k}]/[\partial(\omega^2n^2)/\partial\omega]$ (при продольном распространении $[2\omega/\partial(\omega^2n^2)/\partial\omega]|_{\chi=0} = [V_{\rm g||}/(cn)]|_{\chi=0}$).

В случае относительно плотной плазмы и достаточно большого питч-угла (т. е. достаточно бóльших значений n и $v_\perp$) функция $J_1(\rho)$ с ростом χ достигает первого нуля ещё до резонансного конуса (см. штрихпунктирную кривую на рис. 2*a*). Напомним, что $\rho = k_\perp v_\perp/\Omega_{\rm c} = (nV_*/c)(\omega/\Omega_{\rm c})\sin\chi\,{\rm tg}\Theta$. Разрежённой плазме соответствуют меньший показатель преломления и меньший диапазон допустимых значений χ (см. рис. 1), и аргумент функций Бесселя в этом случае остаётся малым при любых питч-углах Θ. В этих условиях для вычисления величины C_l^2 можно пользоваться дипольным приближением, т. е. разложением функции Бесселя в ряд до первого ненулевого слагаемого. Тогда зависимость $\bar{q}_1(\Theta)$ практически отсутствует.

Вместе с тем для разрежённой плазмы параметры α_y, α_z и $\omega/[\partial(\omega^2n^2)/\partial\omega]$, а с ними и $\bar{q}_1$, изменяются с ростом χ быстрее; также эти зависимости ярче выражены для частиц с меньшими продольными скоростями V_* (т. к. меньшим скоростям, в свою очередь, отвечают меньшие частоты ω и бóльшие углы $\chi_{\rm res}$, см. рис. 1).

Заметим также, что зависимости $\bar{q}_1(\chi)$ для свистовой моды качественно не отличаются от зависимостей $q_1(\chi)$, т. е. множитель $1/u_{\rm g}$ вносит только несущественное количественное различие. Поэтому сказанное выше справедливо не только для величины $\bar{q}_1$, определяющей условия возбуждения С-ЛОВ, но и для инкремента неустойчивости в однородной безграничной среде (43).

3.2. Влияние «нулевого» резонанса на возбуждение свистовых волн

Как следует из рис. 1, в достаточно разрежённой плазме для некоторых значений скорости V_* возможны такие значения χ, при которых частота, соответствующая резонансному взаимодействию, составляет половину гирочастоты. Тогда для электронов со скоростью $v_{||L} = V_*$ выполнено условие «нулевого» резонанса, и в системе (39) нужно учитывать резонансное взаимодействие обоих потоков электронов с волной ($j_+ \neq 0$).

В этом случае дисперсионное уравнение для безграничной однородной среды имеет решение только при $\kappa = 0$, $\Omega_{\rm r} = 0$; при этом инкремент неустойчивости

$$\gamma^2 = q_0 + q_1. \tag{46}$$

Для решения граничной задачи, по сравнению с задачей, рассмотренной в работах [4, 6, 23], нужны ещё граничные условия для попутного волне потока электронов, которые для линейной задачи целесообразно задать в виде $j_+(\zeta_{\rm min}) = 0$ ($\zeta_{\rm min}$ — левая граница системы). Анализ граничной задачи выходит за рамки данной работы.

Результаты сравнения параметров q_1 и q_0 приведены на рис. 3. Для трёх величин концентрации плазмы в рассматриваемом интервале значений продольной скорости $V_*/c = 0{,}075 \div 0{,}040$ и для питч-угла $\Theta = 45^\circ$ найдены значения угла $\chi_{0,5}$, отвечающего резонансному взаимодействию при $\omega = \Omega_{\rm c}/2$, и соответствующие величины q_1 и $|q_0|$, нормированные на величину $\pi b\Omega_{{\rm pe\,h}}^2 t_{\rm BWO}^2 \times$ $\times c\mathcal{F}_{||}({V_*}^2)$. Напомним, что $q_0 \leq 0$ при выбранной функции распределения F_0. Также на рисунке приведены значения $\widetilde{q}_{1||} = q_{1||}/[\pi b\Omega_{{\rm pe\,h}}^2 t_{\rm BWO}^2 c\mathcal{F}_{||}({V_*}^2)]$.

Как можно видеть из рис. 3, при увеличении значения V_* угол $\chi_{0,5}$ сначала медленно убывает от значения, близкого к $\chi_{\rm res}$, потом резко падает до нуля при $V_* \approx V_{*\,\max}$; при $V_* > V_{*\,\max}$ одновременное выполнение резонансных условий для $l = 1$ и $l = 0$ невозможно. Скорость $V_{*\,\max}$ возрастает с уменьшением концентрации плазмы. Соответственно, в окрестности резонансного угла $|q_0| > q_1$ (но при этом $|q_0| \ll q_{1||}$). Параметр q_1 монотонно возрастает с ростом V_*, параметр $|q_0|$ достигает максимального значения в окрестности $V_* \approx V_{*\,\max}$ и затем резко падает до нуля. Поскольку при $V_* \approx V_{*\,\max}$ угол $\chi_{0,5} \to 0$, то $q_1(V_{*\,\max}) = q_{1||}$.

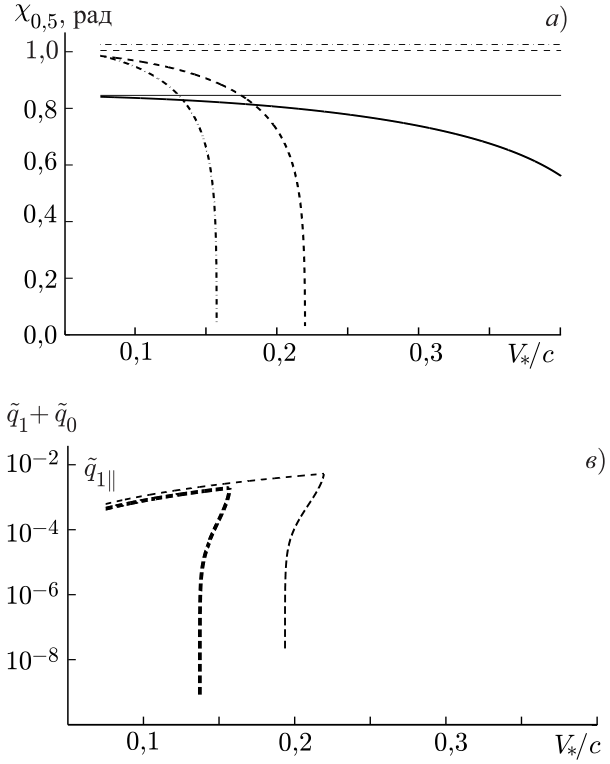

Рис. 3. Зависимости угла $\chi_{0,5}$, соответствующего резонансному взаимодействию электронов с волной при $\omega = \Omega_c/2$, от величины продольной скорости ($а$), соответствующие зависимости параметров взаимодействия q_1 ($б$, тонкие линии) и $|q_0|$ ($б$, толстые линии) и суммарный параметр $q_\Sigma = q_1 + q_0$ для области, где $q_\Sigma > 0$ ($в$, толстая линия). Величины q_1, $|q_0|$ и q_Σ нормированы на $\pi b \Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 t_{\mathrm{BWO}}^2 c \mathcal{F}_{||}(V_*{}^2)$. Сплошные линии соответствуют $N_\mathrm{e} = 10$ см$^{-3}$, штриховые — $N_\mathrm{e} = 5$ см$^{-3}$, штрихпунктирные — $N_\mathrm{e} = 1$ см$^{-3}$. Горизонтальные линии на панели $а$ отвечают резонансному углу χ_{res}

При фиксированной концентрации скорость $V_{*\max}$ можно найти из формулы

$$V_{*\max} = c/n|_{\chi=0}. \tag{47}$$

Зависимость суммарного параметра $q_\Sigma = q_1 + q_0$ от V_*/c приведена на рис. 3$в$. Построен только тот участок этой зависимости, для которого $q_\Sigma > 0$. Как можно видеть из этого рисунка, неустойчивость в безграничной однородной среде с инкрементом (46) имеет порог по скорости энергичных частиц: $V_* > V_{*\mathrm{thr}}$, $q_\Sigma(V_{*\mathrm{thr}}) = 0$. Согласно проведённым расчётам (см. рис. 3) скорости $V_{*\mathrm{thr}}$ и $V_{*\max}$ достаточно близки: $(V_{*\max} - V_{*\mathrm{thr}})/c \approx 0{,}02$.

Таким образом, для электронов с достаточно низкими энергиями ($|V_*| < V_{*\max}$) при соответствующих частотах волн необходимо учитывать влияние «нулевого» резонанса. В рамках безграничной задачи данное влияние приводит к снижению инкремента неустойчивости в небольшом интервале скоростей $V_{*\mathrm{thr}} < |V_*| < V_{*\max}$ и к исчезновению неустойчивости при $|V_*| < V_{*\mathrm{thr}}$. Граничная задача при таких параметрах волн и частиц требует отдельного рассмотрения.

3.3. Расчёт параметра взаимодействия для Z-моды

Как было сказано выше, система (39) справедлива для любой плазменной моды. Зависимости, аналогичные представленным в разделе 3.1, были также рассчитаны для медленной необыкновенной волны (Z-моды) для случая достаточно разрежённой плазмы, когда Z-мода существует при $\omega < \Omega_\mathrm{c}$. Зависимости частоты волны, отвечающей резонансному взаимодействию, от угла χ для различных Θ и V_* приведены на рис. 4, зависимости $\widetilde{q}_1(\chi)/u_\mathrm{g} = \bar{q}_1/[\pi b \Omega_{\mathrm{pe\,h}}^2 t_{\mathrm{BWO}}^2 c \mathcal{F}_{||}(V_*{}^2)]$ — на рис. 5.

Данная мода существует только при $\chi > 0$. В отличие от свистовой моды, частота Z-моды, отвечающая резонансному взаимодействию, с увеличением угла χ незначительно убывает, а затем

возрастает до Ω_c при $\chi \to \pi/2$. При больши́х скоростях V_* резонансная частота ω монотонно возрастает с увеличением χ.

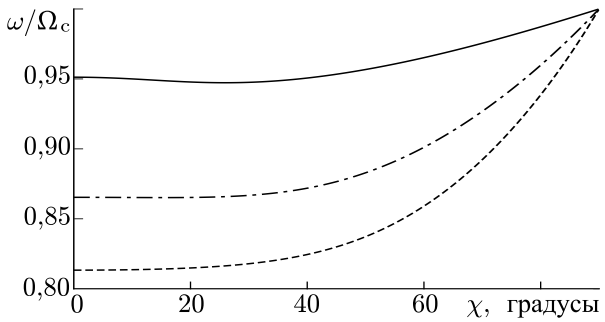

Рис. 4. Зависимость частоты волны, соответствующей резонансному взаимодействию, от угла χ для Z-моды. Концентрация плазмы $N_e = 1$ см$^{-3}$. Сплошная кривая соответствует скорости $V_*/c = 0{,}075$, штрихпунктирная — $V_*/c = 0{,}250$, штриховая — $V_*/c = 0{,}400$

Параметр взаимодействия $\bar{q}_1$ увеличивается от нуля до глобального максимума при росте угла χ, затем убывает. При больши́х питч-углах параметр $\bar{q}_1$ достигает нуля при $\chi < \pi/2$, затем возрастает; в остальных случаях $\bar{q}_1$ после достижения глобального максимума убывает до нуля при $\chi \to \pi/2$. Заметим, что зависимости $\widetilde{q}_1(\chi)$ построены для $0 < \chi \leq 0{,}95\pi/2$, поскольку групповая скорость u_g падает до нуля при $\chi \to \pi/2$. При большом питч-угле, как и в случае со свистовой модой, первый нуль функции $q_1(\chi)$ достигается при $\chi < \pi/2$, затем q_1 возрастает до локального максимума (его значение существенно меньше глобального) и снова убывает до нуля. При фиксированном угле χ параметр q_1 возрастает с увеличением питч-угла (за исключением небольшой окрестности первого нуля функции $q_1(\chi)$ при его наличии) и с увеличением скорости V_* (при фиксированном питч-угле). Положение глобального максимума $q_1(\chi)$ сдвигается в сторону меньших χ при увеличении питч-угла, в сторону бóльших — при увеличении скорости V_*.

Следует отметить, что показатель Z-моды при той же концентрации плазмы меньше, чем для свистовой моды, поэтому релятивистские эффекты при взаимодействии электронов с данной модой выражены ярче [25]. Таким образом, полученные результаты для Z-моды имеют качественный характер.

ВЫВОДЫ

В работе получены следующие результаты.

1) Выведена система уравнений, которая описывает резонансное взаимодействие произвольной плазменной моды, распространяющейся под углом к магнитному полю, с двумя встречными потоками энергичных электронов для случая, когда функция распределения энергичных электронов по продольным энергиям имеет резкий перепад («ступеньку»). Взаимодействие с потока-

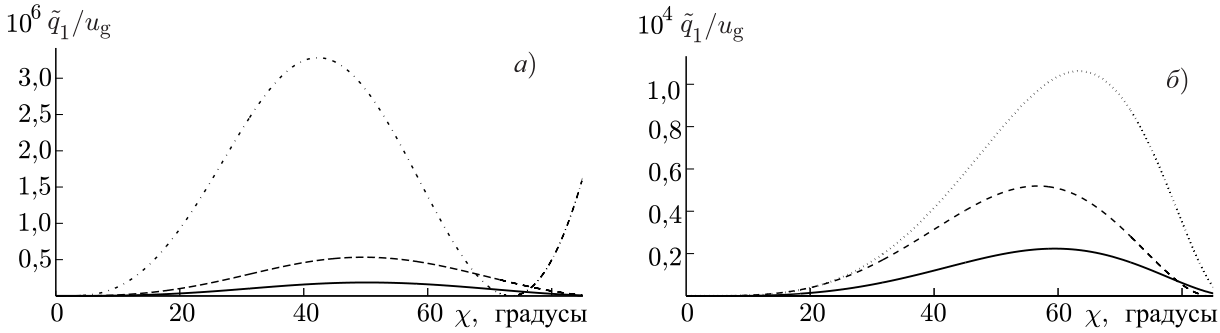

Рис. 5. Зависимость параметра q_1 от угла χ для Z-моды. Концентрация плазмы $N_e = 1$ см$^{-3}$. На панели *а* $V_*/c = 0{,}075$, сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые отвечают питч-углам $\Theta = 45°$, $60°$ и $80°$ соответственно. На панели *б* сплошные и штриховые линии отвечают скорости $V_*/c = 0{,}25$ и питч-углам $\Theta = 45°$ и $60°$ соответственно, пунктирная линия построена при $V_*/c = 0{,}4$ и $\Theta = 45°$

ми происходит на разных резонансах. Для взаимодействия на изолированном резонансе данная система с точностью до коэффициентов аналогична случаю взаимодействия с продольно распространяющимися волнами на основном циклотронном резонансе.

2) Для свистовых волн, взаимодействующих со встречным потоком электронов на основном циклотронном резонансе, получены зависимости параметра связи электронов и волны $\bar{q}_1$ в С-ЛОВ от угла распространения волны по отношению к магнитному полю, концентрации фоновой плазмы и питч-угла энергичных электронов. Показано, что параметр $\bar{q}_1$ имеет наибольшее значение при продольном распространении и стремится к нулю при стремлении угла распространения χ к резонансному конусу. Зависимость $\bar{q}_1(\chi)$ может иметь как монотонный, так и немонотонный характер в зависимости от параметров фоновой плазмы и энергии частиц. Таким образом, для функции распределения, имеющей вид «ступеньки», режим ЛОВ на основном циклотронном резонансе для свистовых волн с углами распространения вблизи резонансного конуса имеет очень высокий порог по концентрации энергичных электронов (намного выше, чем для продольно распространяющихся волн).

3) Показано, что для электронов с достаточно низкими энергиями ($V_* < c/n|_{\chi=0}$) необходимо учитывать взаимодействие свистовой волны с попутным потоком на «нулевом» резонансе.

4) Для случая достаточно разрежённой плазмы проведены оценки для распространяющейся Z-моды с частотой $\omega < \Omega_\mathrm{c}$. Показано, что существует некоторый угол $0 < \chi < \pi/2$, при котором параметр $\bar{q}_1$ максимален.

Полученные результаты могут быть полезны при интерпретации данных о дискретных излучениях в магнитосферах Земли и планет, в частности о хоровых излучениях на очень низких частотах.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 15–12–20005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. А., Рудаков Л. И. // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1966. Т. 51. С. 1 522.
2. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. // Вопросы теории плазмы. Т. 10 / под ред. М. А. Леонтовича. М.: Энергоатомиздат, 1980. С. 88.
3. Hobara Y., Trakhtengerts V. Y., Demekhov A. G., Hayakawa M. // J. Geophy. Res. 1998. V. 103, No. 9. P. 20 449.
4. Trakhtengerts V. Y. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, No. 9. P. 17 205.
5. Trakhtengerts V. Y. // Ann. Geophys. 1999. V. 17, No. 1. P. 95.
6. Demekhov A. G., Nunn D., Trakhtengerts V. Y. // Phys. Plasmas. 2003. V. 10, No. 11. P. 4 472.
7. Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 9. С. 719.
8. Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 11. С. 977.
9. Демехов А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 11. С. 679.
10. Burtis W. J., Helliwell R. A. // Planet. Space Sci. 1976. V. 24. P. 1 007.
11. Сажин С. С., Титова Е. Е. // Космические исследования. 1977. Т. 15, № 5. С. 791.
12. Titova E. E., Kozelov B. V., Jiriček F., et al. // Ann. Geophys. 2003. V. 21, No. 5. P. 1 073.
13. Santolík O., Gurnett D., Pickett J., et al. // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, No. A7. Art. no. 1 278.
14. Santolík O., Pickett J. S., Gurnett D. A., et al. // J. Geophys. Res. 2010. V. 115, No. 15. Art. no. A00F13.
15. Santolík O., Macúšová E., Kolmasová I., et al. // Geophys. Res. Lett. 2014. V. 41, No. 8. P. 2 729.
16. Santolík O., Gurnett D. A., Pickett J. S., et al. // J. Geophys. Res. 2009. V. 114, No. A12. Art. no. A00F03.

17. Li W., Thorne R. M., Bortnik J., et al. // J. Geophys. Res. 2011. V. 38, No. 14. Art. no. L14103.
18. Li W., Santolík O., Bortnik J., et al. // Geophys. Res. Lett. 2016. V. 43, No. 10. P. 4 725.
19. Taubenschuss U., Khotyaintsev Y. V., Santolík O., et al. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2014. V. 119. P. 9 567.
20. Шкляр Д. Р. Плазменная гелиогеофизика. Т. 2 / под ред. Л. М. Зелёного и И. С. Веселовского. М: Физматлит, 2008. С. 391.
21. Karpman V. I., Istomin Y. N., Shklyar D. R. // Plasma Phys. 1974. V. 16, No. 8. P. 685.
22. Трахтенгерц В. Ю., Райкрофт М. Д. Свистовые и альфвеновские циклотронные мазеры в космосе. М.: Физматлит, 2011. 344 с.
23. Беспалов А. А., Демехов А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 11. С. 845.
24. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
25. Демехов А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 6. С. 734.

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.; принята в печать 2 июня 2017 г.

BACKWARD-WAVE OSCILLATOR REGIME IN THE MAGNETOSPHERE CYCLOTRON MASER FOR AN ARBITRARY DIRECTION OF WAVE PROPAGATION RELATIVE TO AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

V. S. Grach and A. G. Demekhov

We generalize the equations, which describe the operation regime of a backward-wave oscillator in the magnetized plasma in the presence of a jump ("step") in the velocity distribution function of energetic charged particles, to the case of an arbitrary direction of the wave relative to an external magnetic field and an arbitrary wave mode. The dependence of instability formation threshold on the angle χ between the wave vector $\mathbf{k}$ and the external magnetic field $\mathbf{B}_0$ for whistler waves and a slow extraordinary wave (Z-mode) is determined.