

УДК 519.2+551.594.221

О СТАТИСТИКЕ ВЫБРОСОВ ГАУССОВСКОГО ШУМА, ПРЕВЫШАЮЩИХ ЗАДАННЫЙ ПОРОГ: ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЗРЯДАМ В ГРОЗОВОМ ОБЛАКЕ

*В. В. Клименко**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Получены выражения для вероятностей выбросов нормального шума с гауссовой корреляционной функцией и для плотности вероятности интервалов между выбросами. В отличие от дельта-коррелированного шума, в котором интервалы распределены по экспоненциальному закону, при конечном времени корреляции шума (ограничение частотной полосы) появляется зависимость вероятности следующего выброса от предыдущего и закон распределения интервалов отклоняется от экспоненциального. Это отклонение наиболее заметно при низком пороге детектирования. Показано, что имеется сходство в поведении распределений интервалов между разрядами в грозовом облаке и выбросами шума при изменяющейся частоте следования разрядов/выбросов, которая для выбросов определяется отношением порога детектирования к среднему квадратичному значению шума. Результаты работы могут быть полезны для количественного описания статистических характеристик выбросов шума, а также для исследования роли флуктуаций в возникновении разрядов в грозовом облаке.

ВВЕДЕНИЕ

Статистические характеристики шумовых выбросов представляют интерес в связи с разнообразными приложениями: срабатывание пороговых детекторов в радиотехнике, инициирование лавинообразных процессов в физике (фазовые переходы, электрический пробой) и др. Для электрического пробоя в воздухе при нормальных условиях необходимо, чтобы электрическое поле превысило 30 кВ/см, а в грозовых облаках на высотах 3÷6 км — величину 20÷15 кВ/см. Известно, что электрические поля, измеряемые с помощью зондов внутри грозового облака, в несколько раз меньше, чем требуется для пробоя: как правило, измеряемые значения равны 1÷2 кВ/см, а предельные когда-либо измеренные значения составляют около 4 кВ/см [1].

В настоящее время принято рассматривать два механизма генерации молниевых разряда. В первом механизме основная роль отводится коронным разрядам на поверхности гидрометеоров, которые трансформируются в распространяющийся в сильном электрическом поле положительный стример и далее в лидерный канал молнии [1]. В этом случае для распространения положительного стримера на высотах 3,5÷6,5 км необходимы поля 2,5÷1,5 кВ/см [1], что ненамного превышает значения зондовых измерений. Во втором механизме основным фактором формирования проводящего канала в сильном электрическом поле внутри облака является внешнее воздействие частицами космических лучей [2]. В этом случае для формирования канала и инициирования молнии достаточно реально наблюдаемых полей около 1 кВ/см, и с этой точки зрения механизм [2] выглядит предпочтительней. Вместе с тем, для первого механизма достаточно небольшой флуктуации электрического поля $\delta E \sim 20 \div 30$ % относительно фоновых значений 1÷2 кВ/см, чтобы возникли условия для распространения стримера. Если в облаке вместе с квазистационарным полем имеются достаточно быстрые (1÷10 с) флуктуации, то с некоторой вероятностью амплитуда флуктуации электрического поля может превысить пороговое значение, при котором реализуется

* klimenko@appl.sci-nnov.ru

стримерный механизм и генерируется молниевый разряд. Для краткости далее будем ссылаться на это предположение как на флуктуационную схему развития пробоя в облаке.

Предпосылкой для данной работы послужило обнаружение внешнего сходства между поведением статистических характеристик молниевых разрядов в грозовых облаках [3, 4] при изменении частоты следования разрядов и поведением выбросов гауссова шума при изменении соотношения между интенсивностью флуктуаций и некоторым заданным порогом [5]. В работе [5] показано, что для нормального шума с гауссовой корреляционной функцией распределение интервалов между выбросами, превышающими заданный порог, в общем случае не является пуассоновским (независимость выбросов друг от друга), а приближается к нему лишь асимптотически при неограниченном росте отношения порога к среднеквадратичному уровню шума и соответствующем уменьшении числа выбросов в единицу времени. Похожая картина наблюдается в характеристиках молниевых разрядов. А именно, когда во время грозы плотность разрядов в единицу времени мала, интервалы между разрядами распределены по экспоненциальному закону (пуассоновский поток), что указывает на независимость момента появления каждого следующего разряда от предыдущего. По мере увеличения частоты следования разрядов происходит отклонение от экспоненциального закона, что можно интерпретировать как появление связи между разрядами [3, 4].

В отличие от предельного случая, рассмотренного в [5], в данной работе в явном виде вычислена плотность вероятности для интервалов между выбросами гауссова шума. Результат вычислений может быть полезен для количественного описания статистических характеристик выбросов шума, а также для анализа статистических характеристик молниевых разрядов с точки зрения флуктуационной схемы стимулирования электрического пробоя в грозовом облаке.

1. ОБ ИНТЕРВАЛАХ МЕЖДУ МОЛНИЕВЫМИ РАЗРЯДАМИ В ГРОЗОВОМ ОБЛАКЕ

Если случайные события происходят последовательно и независимо друг от друга, то плотность вероятности для длительности интервалов τ между ними (время ожидания) описывается экспоненциальным законом [6]

$$w(\tau) = a^{-1} \exp(-\tau/a), \quad (1)$$

где $a = \langle \tau \rangle$ — средняя длина интервала, а дисперсия случайной величины τ равна $\sigma_\tau^2 = a^2$. Отличительным свойством распределения (1) является равенство среднего значения и стандартного (среднего квадратичного) отклонения: $\sigma_\tau = \langle \tau \rangle$. Если молниевые разряды возникают совершенно случайным образом независимо друг от друга, то интервалы между ними должны подчиняться закону (1). Для проверки этого предположения были отобраны несколько гроз с большим количеством разрядов, зарегистрированные в районе г. Городец (Нижегородская область) в 2005–2006 годах. Разряды детектировались с помощью электростатических датчиков (флюксометров) как скачкообразные изменения электрического поля (сброс электрического заряда облака), за которыми следовала релаксация к прежнему уровню с характерным временем $5 \div 10$ с. Алгоритм обработки позволял разрешать отдельные разряды с минимальным интервалом между ними около 2 с при точности определения момента разряда по переднему фронту скачка поля примерно 0,1 с.

Корректному построению эмпирических распределений для интервалов между разрядами и сопоставлению их с законом (1) препятствует существенная нестационарность грозы и генерируемого ей потока разрядов (см. рис. 1). В таком случае в качестве необходимого условия независимости моментов появления разрядов целесообразно принять равенство среднего значения и стандартного отклонения, характеризующее закон распределения (1). Средние значения

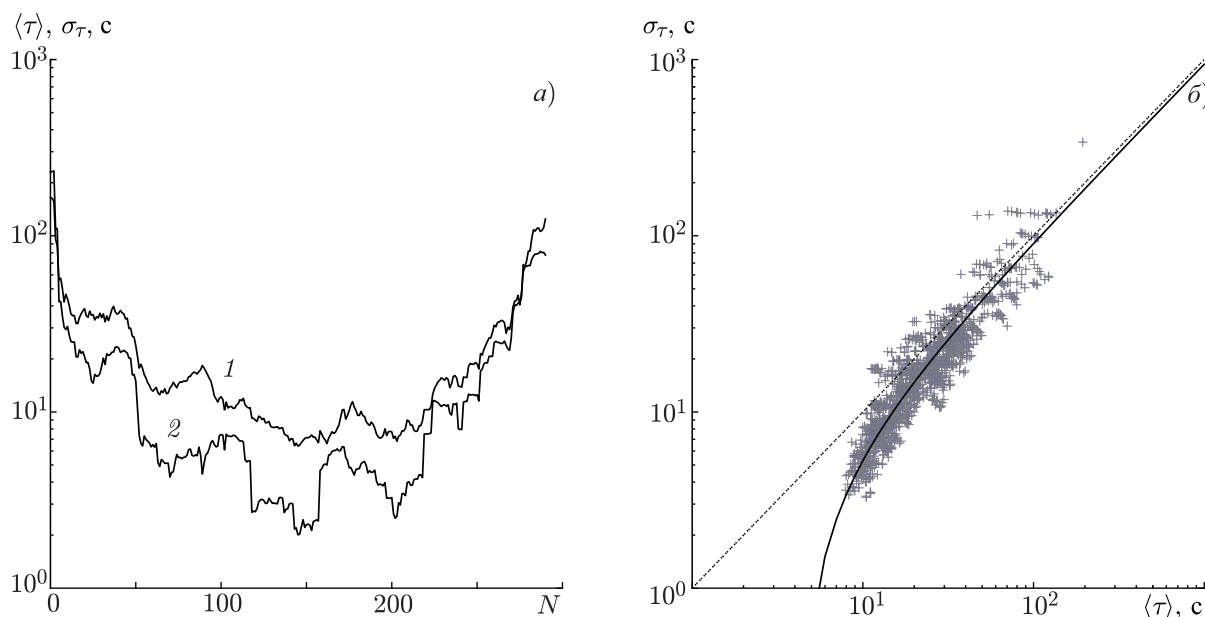


Рис. 1. Панель *а*: характеристики разрядов во время грозы 16.07.2005 (N — порядковый номер разряда), средняя длина интервала между разрядами $\langle \tau \rangle$ (кривая 1), стандартное отклонение от среднего σ_τ (2). Панель *б*: связь между средней длиной интервала и стандартным отклонением от среднего для 6-ти гроз в 2006 году; сплошная линия — аппроксимация методом наименьших квадратов, пунктир — зависимость, соответствующей закону (1)

и дисперсию промежутков между разрядами можно определять на относительно коротких временных участках грозы, где поток разрядов можно считать примерно стационарным.

На рис. 1 показаны соотношения между средним интервалом и стандартным отклонением для отдельной грозы 16.07.2005 (всего 291 разряд) и для 6-ти гроз в 2006 году (всего 1542 разряда). Значения среднего и стандартного отклонения для последовательности разрядов вычислялись с помощью скользящего окна, учитывающего 16 ближайших разрядов (15 интервалов). При $\langle \tau \rangle \approx \sigma_\tau$ относительные ошибки в определении среднего значения и стандартного отклонения будут порядка $\delta \langle \tau \rangle \approx 0,25$ и $\delta \sigma_\tau \approx 0,2$. Из рис. 1 видно, что при больших длительностях интервалов ($\langle \tau \rangle \sim 100$ с), или, что то же самое, при низкой плотности разрядов, характерной для начальной и заключительной фаз грозы, условие $\sigma_\tau \approx \langle \tau \rangle$ выполняется. Это предполагает экспоненциальное распределение вероятности и независимость разрядов друг от друга. В максимально интенсивной фазе грозы при высокой плотности разрядов ($\langle \tau \rangle \sim 10$ с) необходимое условие независимости $\sigma_\tau = \langle \tau \rangle$ не выполняется.

Таким образом, в рамках флуктуационной схемы развития электрического разряда в облаке и принимая во внимание асимптотические свойства флуктуационных (шумовых) выбросов [5], предположим следующее. При низкой интенсивности флуктуаций электрических зарядов в грозовом облаке вероятность превышения порога электрического пробоя мала, разряды происходят редко и практически независимо друг от друга. Наоборот, при высокой интенсивности флуктуаций превышения порога происходят часто и проявляется «коррелированность» разрядов, обусловленная коррелированностью флуктуаций. Для проверки справедливости предположения необходимы количественные соотношения.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫБРОСОВ НОРМАЛЬНОГО ШУМА

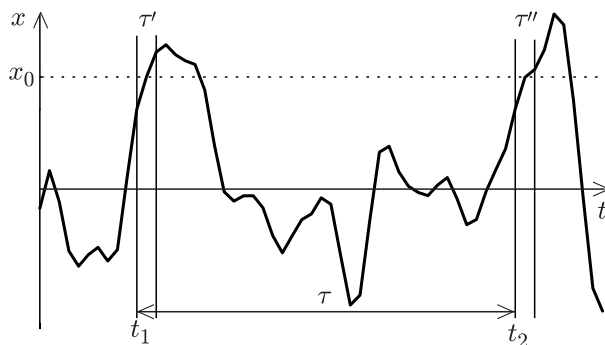


Рис. 2. Схематическое изображение процесса формирования выбросов шума $x(t)$, превышающих заданный порог x_0

Формально под выбросом понимается пересечение шумовым процессом $x(t)$ некоторого заданного уровня (порога) x_0 в некоторый момент времени с положительной производной $dx/dt > 0$ (см. рис. 2). Для стационарного случайного процесса способ вычисления вероятности отдельного шумового выброса приведён в работе [7] и сводится к заданию двумерной плотности вероятности $w(x, x_\tau)$ для значений $x(t_1)$ и $x_\tau = x(t_1 + \tau')$ (рис. 2) и вычислению совместной вероятности $P(x < x_0, x_\tau > x_0) = P_\tau(x_0)$:

$$P_\tau(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx \int_{x_0}^{+\infty} w(x, x_\tau) dx_\tau. \quad (2)$$

Если длина интервала τ' достаточно мала и вероятностью двух и более выбросов в интервале τ' можно пренебречь, то $P_\tau(x_0)$ — это вероятность одного выброса за время τ' , т. е. $P_\tau(x_0) = \tau' \nu_1(x_0)$, где $\nu_1(x_0)$ — среднее число выбросов в единицу времени. В [7] показано, что

$$\nu_1(x_0) = \int_0^\infty v w_{x,v}(x_0, v) dv,$$

где $v = dx/dt$, $w_{x,v}$ — двумерная плотность вероятности для величин x и v . В частности, для нормального шума с дважды дифференцируемой корреляционной функцией среднее число выбросов в единицу времени равно [7]

$$\nu_1(x_0) = \frac{\sqrt{-R''(0)}}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3)$$

Здесь $R(\tau)$ — нормированная корреляционная функция шума (коэффициент корреляции), штрих означает производную по аргументу, σ^2 — дисперсия шума. Соответствующая плотность вероятности для длины интервалов τ между выбросами имеет вид (1), где $a^{-1} = \nu_1(x_0)$. В работе [7] неявно предполагалось, что время корреляции шума так мало, что шум можно считать дельта-коррелированным, а выбросы не зависящими друг от друга.

Для того, чтобы учесть влияние коррелированности шума, необходимо определить совместную вероятность двух выбросов в моменты времени t_1 и t_2 ($t_2 - t_1 = \tau$, см. рис. 2):

$$P_\tau(\tau, x_0, x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx \int_{x_0}^{+\infty} dx_\tau \int_{-\infty}^{x_0} dy \int_{x_0}^{+\infty} w(x, x_\tau, y, y_\tau) dy_\tau,$$

где $x = x(t)$, $x_\tau = x(t + \tau')$, $y = x(t + \tau)$, $y_\tau = x(t + \tau + \tau'')$, $w(x, x_\tau, y, y_\tau)$ — четырёхмерная плотность вероятности.

В результате последовательного выполнения вычислений, аналогичных двумерному случаю в [7], получаем

$$P_\tau(\tau, x_0, x_0) = \nu_2(\tau, x_0, x_0) \tau' \tau'', \quad (4)$$

где

$$\nu_2(\tau, x_0, x_0) = \int_0^\infty dv \int_0^\infty v u w(x_0, x_0, v, u) du, \quad (5)$$

$v = dx/dt$, $u = dy/dt$.

Для нормального (гауссового) шума [6]

$$w(x, v, y, u) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{D}} \exp \left(-\frac{1}{2D} \sum_{i,j=1}^4 A_{i,j} z_i z_j \right),$$

где D — определитель корреляционной матрицы (необходимое условие $D > 0$), $z_1 = x$, $z_2 = dx/dt$, $z_3 = y$, $z_4 = dy/dt$; $A_{i,j}$ — соответствующие алгебраические дополнения.

Корреляционная матрица имеет вид (в работе [5] выражение для матрицы приведено с опечатками)

$$\|D\| = \begin{vmatrix} \sigma^2 & 0 & \sigma^2 R(\tau) & \sigma^2 R'(\tau) \\ 0 & -\sigma^2 R''(0) & -\sigma^2 R'(\tau) & -\sigma^2 R''(\tau) \\ \sigma^2 R(\tau) & -\sigma^2 R'(\tau) & \sigma^2 & 0 \\ \sigma^2 R'(\tau) & -\sigma^2 R''(\tau) & 0 & -\sigma^2 R''(0) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где $R(\tau)$ — нормированная корреляционная функция шума, $R''(0)$ — вторая производная корреляционной функции при $\tau = 0$.

Определитель D может быть записан в виде $D = \sigma^8 \tilde{D}$, где $\tilde{D} = A(\tau)B(\tau)$, $A(\tau) = (1+R)(R_0'' - R'') + R'^2$, $B(\tau) = (1-R)(R_0'' + R'') + R'^2$, $R_0'' = R''(0)$. После несложных, но довольно длинных прямых вычислений интеграла (5) получаем

$$\nu_2(\tau, x_0, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\tilde{D}}}{1-R^2} \exp \left(-\frac{M}{\tilde{D}} \frac{x_0^2}{\sigma^2} \right) [1 - \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 + \beta^2) \psi(\tau, x_0/\sigma)], \quad (7)$$

где $M(\tau) = (R_0'' - R'')B(\tau)$,

$$\begin{aligned} \psi \left(\tau, \frac{x_0}{\sigma} \right) &= \left(1 + \frac{R'^2}{c} \frac{1-R}{1+R} \frac{x_0^2}{\sigma^2} \right) I_0 - 2t_0 \exp(-\beta^2) \operatorname{erf}(\alpha), \\ \alpha \left(\tau, \frac{x_0}{\sigma} \right) &= \frac{R'B}{\sqrt{2\tilde{D}b}} \frac{x_0}{\sigma}, \quad \beta^2 \left(\tau, \frac{x_0}{\sigma} \right) = \frac{R'^2}{2b} \frac{1-R}{1+R} \frac{x_0^2}{\sigma^2}, \\ b(\tau) &= -(1-R^2)R_0'' - R'^2, \quad c(\tau) = (1-R^2)R'' - RR'^2, \\ I_0 \left(\tau, \frac{x_0}{\sigma} \right) &= \int_{\alpha}^{\infty} \exp \left[-\frac{(t-t_0)^2}{T^2} \right] \operatorname{Erfc}(t) dt, \quad t_0 \left(\tau, \frac{x_0}{\sigma} \right) = -\frac{R'}{1+R} \sqrt{\frac{b}{2\tilde{D}}} \frac{x_0}{\sigma}, \\ T(\tau) &= \frac{c}{\sqrt{(1-R^2)\tilde{D}}}, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad \operatorname{Erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x). \end{aligned}$$

Легко проверить, что, если $\tau \rightarrow 0$, то $\nu_2(\tau, x_0, x_0) \rightarrow 0$, а при $\tau \rightarrow \infty$ и $\{R(\tau), R'(\tau), R''(\tau)\} \rightarrow 0$

$$\nu_2(\tau, x_0, x_0) \rightarrow \frac{-R''(0)}{(2\pi)^2} \exp \left(-\frac{x_0^2}{\sigma^2} \right) = [\nu_1(x_0)]^2,$$

т. е. выбросы происходят независимо, т. к. совместная вероятность двух выбросов равна произведению вероятностей отдельных выбросов.

Предположим, что вероятность выброса в малом интервале τ' в момент $t = t_1$ (рис. 2) равна $\nu_1(x_0)\tau'$. Если записать соотношение (4) в виде

$$P_\tau(\tau, x_0, x_0) = \nu_2(\tau, x_0, x_0)\tau'\tau'' = P_c(\tau)\nu_1(x_0)\tau',$$

то можно определить $P_c(\tau)$ — условную вероятность того, что в момент $t = t_2$ произойдёт выброс при условии, что произошёл выброс в $t = t_1$ ($t_2 - t_1 = \tau$):

$$P_c(\tau) = \frac{\nu_2(\tau, x_0, x_0)}{\nu_1(x_0)} \tau''. \quad (8)$$

В отличие от выражения (7), являющегося точным, формула (8) приближенная, т. к. в ней используется вероятность отдельного выброса (3) без учёта коррелированности шума. С формальной точки зрения в выражение (8) следует подставлять среднюю частоту выбросов $\nu_a(x_0)$ с учётом корреляции, т. е. величину, обратную средней длине интервала между выбросами, распределение для которых мы хотим вычислить. С учётом асимптотики [5], связанная с этим ошибка будет пренебрежимо мала при достаточно высоком пороге (малой частоте выбросов), но должна увеличиваться при снижении порога (увеличении частоты выбросов).

Определим вероятность того, что после выброса в момент времени $t = t_1$ время ожидания следующего выброса превышает τ . Обозначим как $P(0, \tau)$ вероятность того, что интервал $(0, \tau)$ «пустой» (т. е. в нём нет выбросов). Тогда вероятность $P(0, \tau + \Delta\tau)$ того, что интервал $(0, \tau + \Delta\tau)$ также «пустой», определяется уравнением

$$P(0, \tau + \Delta\tau) = P(0, \tau)[1 - P_c(\tau + \Delta\tau)] = P(0, \tau) \left[1 - \frac{\nu_2(\tau, x_0, x_0)}{\nu_1(x_0)} \Delta\tau \right].$$

Разлагая в ряд по $\Delta\tau$ ($\Delta\tau \rightarrow 0$), получим для $P(0, \tau)$ дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$P(0, \tau) = \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\nu_2(\tau', x_0, x_0)}{\nu_1(x_0)} d\tau' \right]. \quad (9)$$

Вероятность того, что время ожидания следующего выброса будет превышать τ («функция выживания» в статистике) — это «хвост» $F(\tau)$: функции распределения вероятности для длин интервалов $F(\tau) = 1 - P(0, \tau)$. При этом плотность вероятности для длин интервалов между выбросами будет равна

$$w(\tau) = \frac{d}{d\tau} F(\tau) = \frac{\nu_2(\tau, x_0, x_0)}{\nu_1(x_0)} \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\nu_2(\tau', x_0, x_0)}{\nu_1(x_0)} d\tau' \right]. \quad (10)$$

Использование в выражениях (8)–(10) частоты выбросов $\nu_1(x_0)$ вместо средней частоты выбросов $\nu_a(x_0)$, учитывающей коррелированность шума, можно рассматривать, как «нулевое приближение». Вычислив с помощью (10) среднюю длину интервала и соответствующую среднюю частоту выбросов, можно подставить полученное значение в (8)–(10) и получить следующее приближение и т. д. При низких порогах ($x_0/\sigma < 1$) ошибка приближения уменьшается примерно до 1 % через 5–8 итераций. При высоких порогах ($x_0/\sigma > 1$) уже в нулевом приближении ошибка пренебрежимо мала ($\nu_1(x_0) \approx \nu_a(x_0)$ с точностью примерно 1 %).

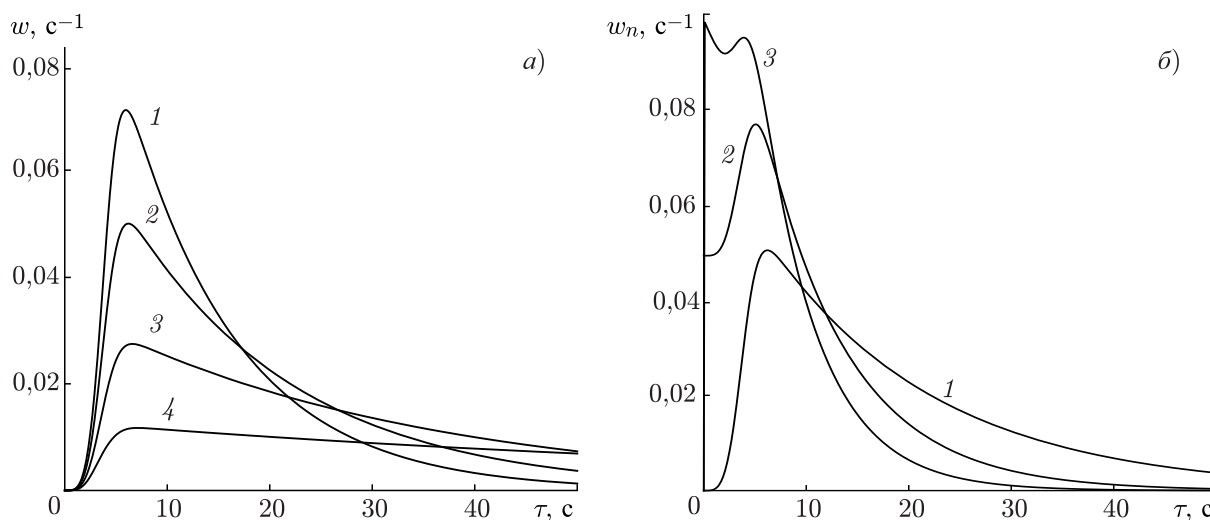


Рис. 3. Панель *а*: плотность вероятности (10) для интервалов между выбросами при порогах $x_0/\sigma = 0,5$ (кривая 1), $x_0/\sigma = 1,0$ (кривая 2), $x_0/\sigma = 1,5$ (кривая 3), $x_0/\sigma = 2,0$ (кривая 4). Панель *б*: плотности вероятности (10), (12) и (14) для интервалов между выбросами в общем потоке от одного (кривая 1), двух (кривая 2) и трёх (кривая 3) независимых источников при одном и том же пороге $x_0/\sigma = 1,0$

На рис. 3а показаны плотности вероятности (10) для гауссовой корреляционной функции $R(\tau) = \exp(-\omega^2 \tau^2)$ при $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ (время корреляции $\tau_k \sim 2,5$ с выбрано для лучшего согласия с экспериментальными данными для разрядов, см. ниже) и различных отношениях x_0/σ . При вычислении этих вероятностей была использована процедура приближения с помощью итераций, и в выражение (10) подставлялась средняя частота $\nu_a(x_0)$ вместо $\nu_1(x_0)$. Как и следовало ожидать, при $\tau < \tau_k$ имеется глубокий минимум, при $\tau \approx 2\tau_k$ — максимум вероятности, а в области $\tau > 3\tau_k$ плотность вероятности уменьшается экспоненциально. Из рис. 3а видно, что по мере повышения порога x_0/σ уменьшается доля интервалов с $\tau < 2\tau_k$ в общем потоке и всё большая доля интервалов попадает в область $\tau > 3\tau_k$ с экспоненциальной зависимостью плотности вероятности. Это и является причиной асимптотического приближения всего потока к пуассоновскому, как было показано в работе [5].

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ ВЫБРОСАМИ В ОБЩЕМ ПОТОКЕ ОТ ДВУХ И БОЛЕЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСТОЧНИКОВ НОРМАЛЬНОГО ШУМА

Полученная плотность вероятности соответствует детектированию выбросов от одного источника флуктуаций. В ряде случаев (например, в грозном облаке) может детектироваться последовательность выбросов, общая для двух (или более) действующих одновременно независимых источников флуктуаций. Положим, что при наличии двух независимых источников в момент времени $t = 0$ произошёл выброс в источнике 1. Вероятность того, что интервал до следующего выброса в этом же источнике окажется больше, чем τ , равна $P(0, \tau)$ (9). Вероятность того, что перед моментом $t = 0$ в промежутке $\tau_2 < t < \tau_2 + d\tau_2$ ($\tau_2 \leq 0$) произошёл выброс в источнике 2, равна $\nu_a(x_0) d\tau_2$ (если выброс в источнике 2 происходит после $t = 0$, то просто меняем нумерацию источников). Теперь для того, чтобы в промежутке $(0, \tau)$ отсутствовали выбросы, необходимо, чтобы интервал до следующего выброса в источнике 2 был больше, чем $\tau - \tau_2$ ($\tau_2 \leq 0$), вероятность чего равна $P(0, \tau - \tau_2)$. Таким образом, при выбросах в $t = 0$ в источнике 1 и в

$t = \tau_2$ в источнике 2 вероятность того, что промежуток $(0, \tau)$ «пустой», равна произведению трёх вероятностей:

$$dP_2(0, \tau) = P(0, \tau)P(0, \tau - \tau_2)\nu_a(x_0) d\tau_2.$$

Поскольку момент ближайшего к $t = 0$ выброса в источнике 2 выбран произвольно в пределах от $t = -\infty$ до $t = 0$, то полная вероятность того, что интервал между двумя выбросами в последовательности, общей для двух источников, превосходит τ , будет равна

$$P_2(0, \tau) = \nu_1(x_0)P(0, \tau) \int_{-\infty}^0 P(0, \tau - \tau_2) d\tau_2 = \nu_a(x_0)P(0, \tau) \int_{\tau}^{\infty} P(0, \xi) d\xi, \quad (11)$$

где использована замена переменной интегрирования $\xi = \tau - \tau_2$. Можно показать, что

$$\int_0^{\infty} P(0, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau dF(\tau) = \int_0^{\infty} \tau w d\tau = \langle \tau \rangle = \nu_a^{-1}.$$

При этом легко убедиться, что $P_2(0, 0) = 1$ и $P_2(0, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, $P_2(0, \tau)$ удовлетворяет требованиям к «хвосту» распределения вероятности $F_2(\tau)$, и функция распределения вероятности при двух источниках есть $F_2(\tau) = 1 - P_2(0, \tau)$, а плотность вероятности для длин интервалов равна

$$w_2(\tau) = -\frac{\partial P_2(0, \tau)}{\partial \tau} = \nu_a(x_0) \left[w(\tau) \int_{\tau}^{\infty} P(0, \xi) d\xi + P^2(0, \tau) \right]. \quad (12)$$

Аналогично можно вывести выражения для функции распределения и плотности вероятности в случае трёх независимых источников флуктуаций:

$$P_3(0, \tau) = 2\nu_a^2(x_0)P(0, \tau) \int_{\tau}^{\infty} d\xi P(0, \xi) \int_{\xi}^{\infty} P(0, \eta) d\eta, \quad (13)$$

$$w_3(\tau) = 2\nu_a^2(x_0) \left[w(\tau) \int_{\tau}^{\infty} d\xi P(0, \xi) \int_{\xi}^{\infty} P(0, \eta) d\eta + P^2(0, \tau) \int_{\tau}^{\infty} P(0, \xi) d\xi \right]. \quad (14)$$

Коэффициент 2 появляется в выражениях (13) и (14) из-за двух имеющихся возможностей следования выбросов в источниках 2 и 3: сначала выброс в 2, а затем в 3, и наоборот. Очевидно, что в случае четырёх источников коэффициент будет равен числу перестановок из трёх дополнительных источников $3! = 6$.

Из выражений (12) и (14) видно, что появление дополнительных источников приводит к «затмыванию» глубокого минимума плотности вероятности в области малых τ . При $\tau \rightarrow 0$ первое слагаемое в квадратных скобках в (12) и (14) стремится к нулю, а второе — к 1 в (12) и к ν_a^{-1} в (14). Соответственно, $w_2(\tau) \rightarrow \nu_a$ и $w_3(\tau) \rightarrow 2\nu_a$. При отсутствии коррелированности флуктуаций в источниках плотность вероятности стремится к

$$w_n(\tau) = n\nu_1(x_0) \exp[-n\nu_1(x_0)\tau],$$

где n — число источников, а средняя длина интервала уменьшается в n раз [6]. Плотности вероятности для интервалов между выбросами в случае детектирования общего потока от одного,

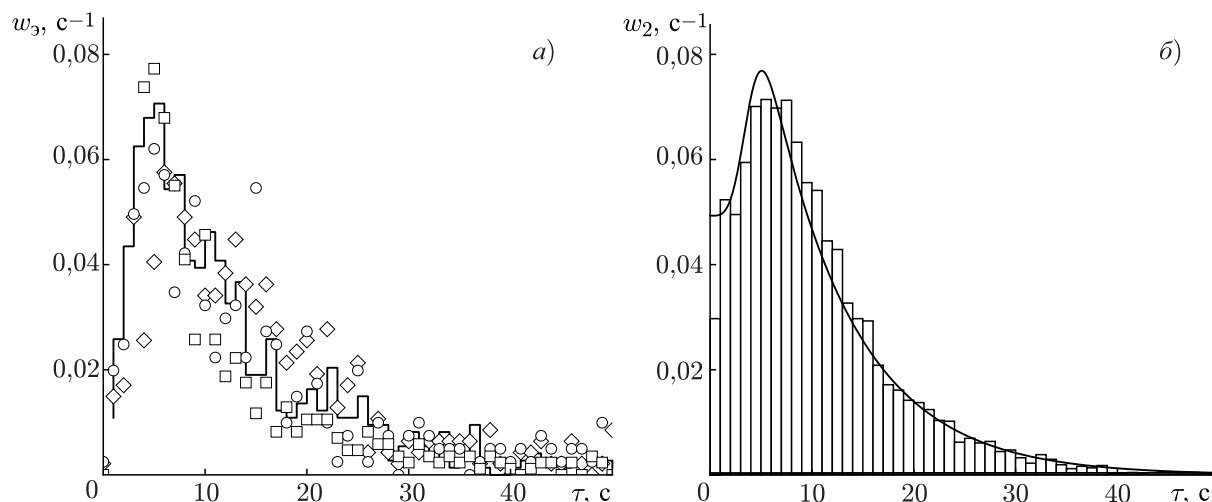


Рис. 4. Панель *а*: эмпирические плотности вероятности для интервалов между разрядами во время четырёх гроз, наблюдавшихся в 2005–2006 годах (всего 2 458 разрядов). Панель *б*: плотность вероятности (12) (сплошная линия) и результат численного стохастического моделирования (гистограмма) с двумя независимыми генераторами шума ($n = 2$, $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$, $x_0/\sigma = 1$)

двух и трёх независимых источников флуктуаций при $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ и пороге $x_0/\sigma = 1$ показаны на рис. 3б.

Для проверки корректности выражений (10), (12) и (14), было выполнено прямое численное стохастическое моделирование, которое состояло из нескольких последовательных процедур:

- 1) формирование с помощью генератора случайных чисел последовательности отсчётов с нормальным распределением амплитуд (дельта-коррелированный нормальный шум), длина последовательности равна 2^{16} отсчётам;
- 2) получение с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) спектральной плотности «белого» шума для данной последовательности;
- 3) преобразование «плоского» спектра в «гауссовский» с помощью низкочастотного фильтра с гауссовой амплитудно-частотной характеристикой;
- 4) получение с помощью обратного преобразования Фурье нормального шума с соответствующей гауссовой корреляционной функцией;
- 5) детектирование выбросов шума по установленному алгоритму (см. рис. 2), фиксирование соответствующих моментов «времени», по которым определяются интервалы между смежными выбросами и вычисление статистических характеристик.

На рис. 4б в виде гистограммы показаны результаты численного моделирования при $n = 2$, $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ и $x_0/\sigma = 1,0$ (всего 6 764 продетектированных выброса), которые демонстрируют практическую идентичность с теоретической плотностью вероятности (12).

4. СРАВНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ ВЫБРОСАМИ НОРМАЛЬНОГО ШУМА С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ РАЗРЯДАМИ

Как правило, последовательность разрядов во время грозы нестационарна (см. рис. 1) и построить корректное распределение вероятности для промежутков между разрядами в строгом смысле нельзя. Однако в редких случаях продолжительных интенсивных гроз удаётся выделить

достаточно длинный временной участок грозы с большим числом разрядов, на котором нет быстрых изменений интенсивности грозы и где поток разрядов можно считать условно стационарным. На рис. 4а показаны эмпирические плотности вероятности для интервалов между разрядами на таких временных участках в четырёх грозах: 21.07.2005 (735 разрядов), 28.07.2005 (853 разряда), 09.07.2006 (468 разрядов) и 16.07.2006 (402 разряда) — всего 2458 разрядов. Можно отметить вполне удовлетворительную близость эмпирических (рис. 4а) и теоретических (рис. 4б) распределений. В обоих случаях имеется максимум вероятности при $\tau \approx 5\div 6$ с, глубокий минимум при малых τ и экспоненциальный спад при $\tau > 10$ с. Основные отличия — это более глубокий провал вероятности около $\tau = 0$ с и заметный «хвост» вероятности в области больших интервалов ($\tau > 40$ с) в эмпирических распределениях. Первое, вероятно, связано с временным разрешением алгоритма обработки экспериментальных данных ($\Delta t \approx 2$ с), из-за чего теряется часть очень коротких интервалов. Второе отличие, возможно, обусловлено процессами в облаке, которые в данной модели не учитывались. Теоретические распределения выбросов шума определяются несколькими параметрами: полосой частот шума ω , соотношением между интенсивностью и порогом x_0/σ , числом действующих одновременно источников флуктуаций n . Кроме того, при $n > 1$ в разных источниках возможны разные значения ω и x_0/σ . От комбинации этих параметров зависит лучшее или худшее согласие с эмпирическими распределениями.

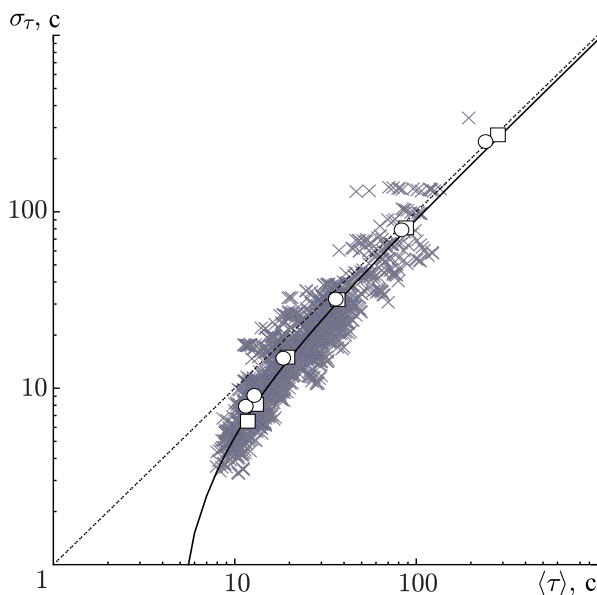


Рис. 5. Сравнение экспериментальных значений $\langle \tau \rangle$ и σ_τ (те же данные, что и на рис. 1) с расчётами для выбросов нормального шума при одном источнике шума с частотой $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ (квадраты) и при двух независимых источниках шума с $\omega = 0,2 \text{ с}^{-1}$ (кружки) при $x_0/\sigma = 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ и $2,5$

На рис. 5 для сравнения показаны экспериментальные значения σ_τ и $\langle \tau \rangle$ для большого числа молниевых разрядов (см. рис. 1 с комментариями в тексте) и значения σ_τ и $\langle \tau \rangle$, вычисленные с использованием формул (10) и (12) при различных порогах детектирования. Наблюдается ожидаемое уменьшение расчётного отношения $\sigma_\tau/\langle \tau \rangle$ при росте интенсивности шума, близкое к экспериментальным данным, за исключением участка коротких интервалов $\langle \tau \rangle \approx 10$ с. При заданной достаточно высокой частоте флуктуаций шума $\omega = 0,4 \text{ с}^{-1}$ и минимальных отношениях $x_0/\sigma \approx 0,2$ (интенсивность шума и частота выбросов велики) средняя длительность интервала между выбросами $\langle \tau \rangle \approx 12$ с. В экспериментальных данных около 10 % разрядов происходят с более короткими интервалами $\langle \tau \rangle \approx 8\div 10$ с. Можно получить такие же короткие интервалы между выбросами шума за счёт уменьшения времени корреляции шума (увеличение ω) или за счёт включения в общий поток выбросов дополнительных независимых источников (увеличение n). Но при этом в области $\langle \tau \rangle \approx 10$ с не будет столь явного уменьшения отношения и $\sigma_\tau/\langle \tau \rangle$, которое наблюдается в экспериментальных данных, т.е. отклонение от закона (1) будут значимы лишь в области ещё более коротких интервалов.

На рис. 5 показан вариант расчёта с увеличением числа источников и одновременным увеличением времени корреляции (уменьшением ω). Видно, что при добавлении второго независимого источника шума и одновременном уменьшении ω в 2 раза, значения $\langle \tau \rangle$ и σ_τ примерно сохраняются. На данный момент нет ясного понимания, как в рамках наших предположений согласовать характеристики выбросов шума с экспериментальными

данными в области $\langle \tau \rangle < 10$ с.

При $\omega \approx 0,2 \div 0,4 \text{ с}^{-1}$ и скорости воздушного потока в облаке $v \approx 10 \div 20$ м/с характерный масштаб пространственной корреляции флуктуаций можно оценить величиной $\lambda/2\pi \approx v/\omega \approx 25 \div 100$ м. Если флуктуации распределены во всём объёме облака $V \approx 10 \text{ км}^3$ равномерно, то число независимых источников «выбросов» будет велико, порядка $n \approx V/\lambda^3 > 10^3$. Как следствие, должно наблюдаться полное нивелирование влияния корреляции флуктуаций на статистические характеристики молний. По-видимому, чтобы предложенная флуктуационная схема не противоречила экспериментальным данным, необходимо, чтобы сильные флуктуации электрического поля были локализованы лишь в части объёма грозового облака. В работе [8] по результатам серии комплексных исследований молниевых разрядов было отмечено, что разряды формируются преимущественно в тех областях грозового облака, где существует так называемый шир скорости воздушного течения (сдвиговое течение). Характерные поперечные размеры струйных воздушных потоков в грозовых облаках (а также зон экстремальных электрических зарядов) составляют несколько десятков или сотен метров ($50 \div 200$ м) [9]. Объём такой ячейки по порядку величины соответствует нашей оценке объёма флуктуации порядка λ^3 . Таким образом, формально возможно, что одна струйная ячейка соответствует одному источнику сильных флуктуаций электрического поля. В большом грозовом облаке может одновременно существовать $2 \div 3$ таких струйных ячейки, при одновременном действии которых не будет полного нивелирования влияния корреляций, и признаки коррелированности будут наблюдаться в экспериментальных данных в виде отклонения распределения интервалов между разрядами от экспоненциального закона (см. рис. 4 и 5).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При вычислениях вероятностей в данной статье использовалась универсальная гауссова корреляционная функция $R(\tau) = \exp(-\omega^2 \tau^2)$. Предложенный способ вычислений вероятностей не применим к флуктуациям с физически значимой экспоненциальной корреляционной функцией $R(\tau) = \exp(-\omega \tau)$, которая часто используется при описании атмосферной турбулентности, т. к. у неё отсутствует вторая производная в нуле, $R''(0)$. Из физически значимых корреляционных функций представляет интерес функция $R(\tau) = \sin(\omega \tau)/(\omega \tau)$, соответствующая узкополосному шуму. В работе [10] был предложен механизм формирования в грозовом облаке ячеистой структуры электрического поля в результате неустойчивости движения тяжёлых заряженных частиц в потоке проводящего воздуха. Флуктуации электрического поля в таких ячеистых структурах могут описываться корреляционной функцией узкополосного шума. Определитель корреляционной матрицы при такой функции не удовлетворяет условию $D > 0$, и формальное вычисление распределения вероятностей не может быть выполнено. Прямое численное стохастическое моделирование показало, что плотность вероятности для длин интервалов между выбросами узкополосного шума должна быть модулирована с периодом, соответствующим полосе частот шума. Обнаружение такой модуляции в экспериментальных распределениях могло бы послужить аргументом в пользу механизма, предложенного в работе [10], и флуктуационной схемы запуска стримерного механизма генерации молний.

Предложенная в данной работе интерпретация экспериментальных распределений интервалов между молниями не единственная. Молниевый разряд уносит из облака заряд $10 \div 30$ Кл, тем самым ослабляя на некоторое время электрическое поле внутри облака. Возникает «мёртвая» пауза, необходимая для генерации новой порции электрического заряда, увеличения поля до прежних значений и создания условий для следующего разряда. Наличие таких пауз уменьшает вероятность появления коротких интервалов между разрядами и приводит к отклонению

от экспоненциального распределения так же, как и в случае корреляции флуктуаций поля. Для окончательных заключений необходимы дополнительные экспериментальные исследования.

Основные результаты работы следующие. Вычислены вероятности выбросов нормального шума с гауссовой корреляционной функцией, превышающих порог детектирования.

Показано, что распределения вероятности для интервалов между разрядами в грозном облаке имеют общие свойства с распределениями вероятностей для интервалов между выбросами шума. В частности, имеют место отклонение от экспоненциального закона распределения и появление коррелированности между выбросами/разрядами при увеличении частоты следования выбросов шума и частоты разрядов в грозном облаке. Это можно рассматривать как аргумент в пользу предположения о флуктуационной схеме развития стримерного пробоя в грозном облаке. Полученные результаты дают формальную основу для дальнейших исследований в этом направлении.

Автор признателен Е. А. Марееву за ряд замечаний и советов, способствовавших улучшению статьи. Исследования велись при поддержке Правительства РФ (мегагрант, соглашение 14.B25.31.0023) и РФФИ (грант 16-05-01086).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rakov V. A. Fundamentals of lightning. Cambridge University Press, 2016. 257 p.
2. Гуревич А. В., Зыбин К. П. // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, № 11. С. 1177.
3. Клименко В. В. // Сб. трудов. VII Всерос. конф. по атмосферному электричеству. 24–28 сентября 2012 года, Санкт-Петербург. С. 119.
4. Клименко В. В., Мареев Е. А., Шаталина М. В. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 11–12. С. 864.
5. Яковлев В. П. // Радиотехника и электроника. 1960. Т. 5, вып. 10. С. 1728.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
7. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприёмных устройствах. М.: Сов. радио, 1951. 360 с.
8. Раст У. Д., Тейлор У. Л., Макгормен Д. // Ракетная техника и космонавтика. 1982. Т. 20, № 5. С. 98.
9. Облака и облачная атмосфера. Справочник. / Под ред. И. П. Мазина и А. Х. Хргиана. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 648 с.
10. Трахтенгерц В. Ю. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. С. 584.

Поступила в редакцию 7 июля 2016 г.; принята в печать 19 октября 2016 г.

ON THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE GAUSSIAN-NOISE SPIKES EXCEEDING THE SPECIFIED THRESHOLD AS APPLIED TO DISCHARGES IN A THUNDERSTORM CLOUD

V. V. Klimenko

We have obtained the expressions for the probabilities of spikes of normal noise with the Gaussian correlation function and for the probability density of the inter-spike intervals. As distinct from the delta-correlated noise, in which the intervals are distributed by the exponential law, the probability of the subsequent spike depends on the previous one and the interval-distribution law deviates from the

exponential one for the finite noise-correlation time (the frequency-band restriction). This deviation is the most pronounced for a low detection threshold. Similarity of the behaviors of the interval distributions among the discharges in a thunderstorm cloud and the noise spikes during the varying repetition rate of the discharges/ spikes, which is determined by the ratio of the detection threshold to the standard value of noise, is observed. The results of this work can be useful for the quantitative description of the statistical characteristics of the noise spikes and studying the fluctuation role in the discharge emergence in a thunderstorm