

УДК 537.613

## ГЕОМАГНИТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ШАРА В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

*В. В. Сурков*<sup>1,2</sup>, *В. М. Сорокин*<sup>2\*</sup>, *А. К. Яценко*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, г. Москва;

<sup>2</sup> Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, г. Троицк, г. Москва, Россия

В работе исследуются возмущения внешнего магнитного поля, вызванные потоками проводящей несжимаемой жидкости, которая обтекает движущийся в ней диэлектрический шар. Для случая потенциального течения жидкости, постоянной скорости шара и произвольной ориентации внешнего магнитного поля получено аналитическое решение задачи. Исследованы угловое распределение магнитных и электрических возмущений, а также зависимости убывания амплитуд этих возмущений от расстояния. Определены направления, в которых максимальны магнитная и электрическая составляющие возмущений. Проанализированы временные зависимости и спектры электромагнитных сигналов при разных параметрах задачи. Результаты аналитических исследований проиллюстрированы численными расчётами.

### ВВЕДЕНИЕ

Движение надводных и подводных судов в морской воде может приводить к небольшим локальным возмущениям геомагнитного поля. Одна из причин этого явления — влияние собственного магнитного поля корабля, которое может возникнуть, например, во время его постройки из-за намагничивания его корпуса или ферромагнитных материалов, являющихся частью корабля [1]. Другой возможной причиной является генерация токов в морской воде вследствие её движения вокруг корпуса корабля [2–4]. Происхождение этих токов обусловлено действием магнитной силы на электрические заряды в морской воде. Аналогичный эффект возмущения геомагнитного поля возникает при волновых движениях морской поверхности (см, например, [5]), в частности цунами [6], при колебаниях проводящих слоёв Земли в сейсмических волнах, при воздействии акустических и внутренних гравитационных волн на проводящие слои ионосферы и т. д. [7].

Общий характер геомагнитных возмущений, вызываемых индукционными токами в морской воде вблизи корабля, существенно зависит от распределения поля массовых скоростей жидкости, обтекающей его корпус. Однако на далёких расстояниях магнитные возмущения могут иметь более универсальный характер, поэтому для их изучения можно использовать решения упрощённых модельных задач. В данной работе находится точное решение задачи о возмущениях внешнего магнитного поля, вызываемых ламинарным потоком проводящей несжимаемой жидкости, которая обтекает твёрдый диэлектрический шар. На основе этого решения оценивается распределение магнитных возмущений и их зависимость от расстояния до шара.

### 1. ДВИЖЕНИЕ ШАРА ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим диэлектрический немагнитный шар с радиусом  $R$ , который движется с постоянной скоростью в проводящей однородной жидкости, находящейся в однородном магнитном поле

---

\* sova@izmiran.ru

с индукцией  $\mathbf{B}_0$ . Будем исследовать возмущения  $\mathbf{b}$  магнитного поля, вызванные электрическими токами, которые будут генерироваться в потоке жидкости, обтекающей шар.

Перейдём в систему отсчёта, в которой шар покоится. В этой системе отсчёта распределения массовой скорости жидкости  $\mathbf{V}$  и возмущения магнитного ( $\bar{\mathbf{b}}$ ) и электрического ( $\bar{\mathbf{E}}$ ) полей стационарны, т. е. не зависят от времени. Кроме того, магнитные возмущения малы по сравнению с невозмущённым полем:  $b \ll B_0$ . В дальнейшем для удобства будем опускать черту в выражении для магнитных возмущений. Тогда уравнения Максвелла в данной системе отсчёта принимают вид

$$\text{rot } \mathbf{b} = \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0); \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \text{div } \mathbf{b} = 0,$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Считая коэффициент электропроводности жидкости  $\sigma$  постоянным, возьмём ротор от обеих частей первого уравнения, и, используя второе и третье уравнения, получим

$$\text{rot rot } \mathbf{b} = -\mu_0 \sigma \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0] (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \tag{1}$$

Предположим, что течение жидкости ламинарное и влияние её вязкости пренебрежимо мало. На проводящую жидкость действуют гидродинамическое давление и магнитная сила с объёмной плотностью  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока. В дальнейшем мы покажем, что в условиях данной задачи магнитным слагаемым в уравнении Эйлера можно пренебречь по сравнению с градиентом гидродинамического давления. Введём декартовую систему координат  $x, y$  и  $z$  с осью  $z$ , направленной вдоль вектора скорости набегающего потока жидкости. Используя известное решение уравнения Эйлера в задаче обтекания шара идеальной несжимаемой жидкостью (см, например, [8]), запишем выражение для массовой скорости жидкости:

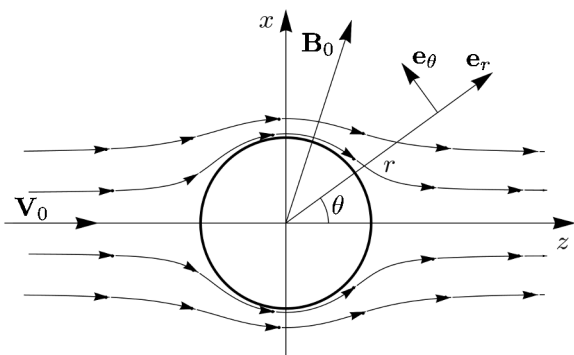


Рис. 1. Система координат, используемая для расчёта возмущения индукции магнитного поля движущимся шаром

$$\mathbf{V} = \frac{R^3}{2r^3} [3\mathbf{e}_r (\mathbf{V}_0 \mathbf{e}_r) - \mathbf{V}_0] - \mathbf{V}_0. \tag{2}$$

Здесь  $r$  и  $\mathbf{e}_r$  обозначают модуль и орт радиус-вектора, который проведён из центра шара соответственно,  $\mathbf{V}_0$  — скорость набегающего потока жидкости на бесконечности. Для решения задачи удобно использовать сферическую систему координат  $r, \varphi, \theta$  с полярным углом  $\theta$ , отсчитываемым от направления вектора  $\mathbf{V}_0$ , как показано на рис. 1.

Вначале предположим, что вектор индукции внешнего магнитного поля параллелен оси  $z$  (т. е. скорости шара  $\mathbf{V}_0$ ). Поскольку задача аксиально-симметрична, то все величины не зависят от азимутального угла  $\varphi$ . Подставим скорость из соотношения (2) в уравнение (1). Преобразуя полученное уравнение, запишем его в компонентах в виде

$$\begin{aligned} r^2 [\hat{T}_1 b_r - 2b_r + \hat{T}_2 (\partial_\theta b_r - 2b_\theta)] &= K (3 \cos^2 \theta - 1), \\ r^2 [\hat{T}_1 b_\theta + \hat{T}_2 \partial_\theta b_\theta + 2\partial_\theta b_r - \sin^{-2} \theta b_\theta] &= K \sin(2\theta), \end{aligned} \tag{3}$$

где введены следующие обозначения:

$$\partial_r = \partial/\partial r, \quad \partial_\theta = \partial/\partial \theta, \quad \hat{T}_1 = \partial_r (r^2 \partial_r), \quad \hat{T}_2 = \sin^{-1} \theta \partial_\theta (\sin \theta), \quad K = 3\mu_0 \sigma V_0 B_0 R^3 / 2.$$

Уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$  запишем в виде

$$r \partial_r b_r + 2b_r + \hat{T}_2 b_\theta = 0. \quad (4)$$

Решение уравнений (3) и (4) для компонент магнитных возмущений можно искать в виде разложений в ряды по присоединённым функциям Лежандра  $P_n^m(\cos \theta)$ . Однако, учитывая, что неоднородности в правых частях этих уравнений могут быть выражены через  $P_2^1 = 3 \sin \theta \cos \theta$  и  $P_2^0 = (3 \cos^2 \theta - 1)/2$ , можно предположить, что  $b_\theta \propto P_2^1(\cos \theta)$ , а  $b_r \propto P_2^0(\cos \theta)$ . Эта угловая зависимость компонент магнитных возмущений позволяет искать решение в виде

$$b_r = f_r(r) \{3 \cos^2 \theta - 1\}, \quad b_\theta = f_\theta(r) \sin \theta \cos \theta. \quad (5)$$

Подставляя соотношения (5) в уравнения (3) и (4), приходим к следующей системе уравнений для искомых функций  $f_r$  и  $f_\theta$ :

$$r^2 f_r'' + 2r f_r' - 8f_r - 2f_\theta = K/r^2, \quad r^2 f_\theta'' + 2r f_\theta' - 12f_r - 6f_\theta = 2K/r^2, \quad r f_r' + 2f_r + f_\theta = 0, \quad (6)$$

где штрих обозначает производную по  $r$ . Из системы (6) получим

$$r^4 f_r'' + 4r^3 f_r' - 4r^2 f_r = K. \quad (7)$$

Найдём общее решение уравнения (7) для функции  $f_r$ , а затем, подставляя  $f_r$  в последнее уравнение системы (6), определим  $f_\theta$ . В результате получим

$$f_r = C_1/r^4 + C_2 r - K/(6r^2), \quad f_\theta = 2C_1/r^4 - 3C_2 r, \quad (8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — неопределённые константы. Соотношения (8) дают общее решение системы уравнений (6). Учитывая, что магнитные возмущения (8) должны быть конечными при  $r \rightarrow \infty$ , получаем, что  $C_2 = 0$ .

Поскольку шар является непроводящим и немагнитным, то область внутри шара ( $r < R$ ) описывается уравнениями (3), в которых следует положить  $K = 0$ . Решая эти уравнения аналогичным способом, находим, что

$$f_r = C_3 r + C_4/r^4, \quad f_\theta = 2C_4/r^4 - 3C_3 r. \quad (9)$$

Из условия конечности решения при  $r = 0$  следует, что  $C_4 = 0$ . Константы  $C_1$  и  $C_3$  можно найти из условия непрерывности  $f_r$  и  $f_\theta$  на границе шара, т. е. приравнявая решения (8) и (9) при  $r = R$ . Подставляя их в соотношение (5), получаем окончательный вид решения для  $r > R$ :

$$b_r = \lambda B_0 \frac{R^2}{4r^2} \left(1 - \frac{3R^2}{5r^2}\right) (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad b_\theta = \lambda B_0 \frac{3R^4}{10r^4} \sin \theta \cos \theta, \quad \lambda = \mu_0 \sigma V_0 R. \quad (10)$$

Рассмотрим влияние граничных условий на поверхности шара на характер магнитных возмущений. Пусть шар покрыт проводящей оболочкой, проводимость которой намного превышает проводимость окружающей среды. В этом случае можно считать, что на шаре генерируются поверхностные токи, приводящие к тому, что магнитное поле внутри шара обращается в нуль. Тогда на поверхности шара тангенциальная составляющая магнитных возмущений будет испытывать скачок, а нормальная составляющая должна равняться нулю. Граничное условие  $f_r(R) = 0$  позволяет найти неопределённую константу  $C_1$ :  $C_1 = KR^2/6$ . Решение задачи для этого случая имеет вид ( $r > R$ ):

$$b_r = \lambda B_0 \frac{R^2}{4r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad b_\theta = \lambda B_0 \frac{R^4}{2r^4} \sin \theta \cos \theta. \quad (11)$$

Сравнение решений (10) и (11) для двух рассмотренных случаев показывает, что угловая и радиальная зависимости магнитных возмущений одинаковы, а их амплитуды близки по величине. Эта тенденция сохраняется и для других случаев. Поэтому можно заключить, что поведение магнитных возмущений (по крайней мере, на далёких расстояниях) слабо зависит от граничных условий на поверхности шара.

## 2. ДВИЖЕНИЕ ШАРА ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть шар движется в направлении, перпендикулярном вектору внешнего магнитного поля  $\mathbf{V}_0$ . Используем, как и ранее, сферическую систему координат с полярной осью  $z$ , проходящей через центр шара параллельно вектору  $\mathbf{V}_0$ , и осью  $x$  вдоль вектора магнитного поля  $\mathbf{V}_0$ . Решение уравнений (1) будем искать в виде  $b_r = f_r \cos \varphi$ ,  $b_\theta = f_\theta \cos \varphi$  и  $b_\varphi = f_\varphi \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — азимутальный угол, отсчитываемый от направления оси  $x$ . Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} (\hat{T}_1 + \hat{T}_2 \partial_\theta - \sin^{-2} \theta - 2) f_r - 2\hat{T}_2 f_\theta - 2f_\varphi \sin^{-1} \theta &= 3K \cos \theta \sin \theta / r^2; \\ (\hat{T}_1 + \hat{T}_2 \partial_\theta - 2 \sin^{-2} \theta) f_\theta + 2\partial_\theta f_r - 2f_\varphi \cos \theta \sin^{-2} \theta &= -K \cos 2\theta / r^2; \\ (\hat{T}_1 + \hat{T}_2 \partial_\theta - 2 \sin^{-2} \theta) f_\varphi - 2f_r \sin^{-1} \theta - 2f_\theta \cos \theta \sin^{-2} \theta &= K \cos \theta / r^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$  принимает вид

$$r \partial_r f_r + 2f_r + \hat{T}_2 f_\theta + f_\varphi \sin^{-1} \theta = 0. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (12) и (13) выражение  $\hat{T}_2 f_\theta + f_\varphi \sin^{-1} \theta$ , получаем уравнение относительно  $f_r$ . Решение этого уравнения ищем в виде  $f_r = f_1(r)$ . В результате получим

$$r^4 f_1'' + 4r^3 f_1' - 4r^2 f_1 = 3K. \quad (14)$$

Поскольку правые части уравнений (12) выражаются через присоединённые функции Лежандра, зависящие от аргумента  $\cos \theta$ , то решение этих уравнений имеет смысл искать в виде  $f_\theta = a_0(r) + a_2(r)P_2^0(\cos \theta)$ ,  $f_\varphi = a_1(r)P_1^0(\cos \theta)$ , где  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  — неизвестные функции. Подстановка данных выражений в уравнения (12) и (13) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} r^2 a_0'' + 2r a_0' + 2a_1 + 3a_2 - 2f_1/3 &= K/(3r^2), & r^2 a_1'' + 2r a_1' - 2a_1 + 3a_2 - 2f_1 &= K/r^2; \\ r^2 a_2'' + 2r a_2' - 6a_2 + 8f_1/3 &= -4K/(3r^2), & r f_1' + 2f_1 - 9a_2/2 &= 0, & a_0 + a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для диэлектрического шара нормальная составляющая вектора плотности тока на его поверхности обращается в нуль. Это условие эквивалентно тому, что радиальная составляющая ротора магнитных возмущений равна нулю при  $r = R$ , т. е.

$$\partial_\theta (f_\varphi \sin \theta) + f_\theta = 0. \quad (16)$$

На границе диэлектрического шара должны быть непрерывны все компоненты возмущений магнитного поля. Ограниченное в нуле и на бесконечности решение уравнений (14) и (15) ищется с условием (16). Из линейности исходных уравнений Максвелла следует, что при произвольной ориентации вектора скорости движения шара относительно направления внешнего магнитного поля общее решение задачи является суммой решений, полученных для случаев продольного и поперечного направлений его движения. Обозначая проекции внешнего магнитного поля на оси

$x$  и  $z$  как  $B_{0x} = B_0 \sin \beta$  и  $B_{0z} = B_0 \cos \beta$  соответственно (здесь  $\beta$  — угол между векторами  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ ), запишем выражения для компонент возмущения магнитного поля, сопровождающего движение шара, при  $r > R$ :

$$b_r = \lambda B_0 \frac{R^2}{8r^2} \left( 1 - \frac{3R^2}{5r^2} \right) [2 \cos(\beta) (1 - 3 \cos^2 \theta) - 3 \sin(\beta) \cos(\varphi) \sin(2\theta)];$$

$$b_\theta = \lambda B_0 \frac{3R^4}{20r^4} [\cos(\beta) \sin(2\theta) - \sin(\beta) \cos(\varphi) \cos(2\theta)], \quad b_\varphi = \lambda B_0 \frac{3R^4}{20r^4} \sin(\beta) \sin(\varphi) \cos(\theta). \quad (17)$$

Анализ полученных выражений показывает, что для далёких расстояний ( $r \gg R$ ) радиальная составляющая  $b_r$  становится намного больше поперечных составляющих  $b_\theta$  и  $b_\varphi$ . Асимптотическая формула для магнитных возмущений  $b_r$  имеет вид

$$b_r \approx \lambda B_0 \frac{R^2}{8r^2} [2 \cos(\beta) (1 - 3 \cos^2 \theta) - 3 \sin(\beta) \cos(\varphi) \sin(2\theta)].$$

Таким образом, вектор возмущений магнитной индукции на далёких расстояниях  $r$  убывает как  $r^{-2}$  и направлен на движущийся шар или в противоположном направлении. Анализ выражения (17) показывает, что  $b_r$  достигает максимального значения в плоскости  $y = 0$  ( $\varphi = 0$ ) под углом  $\theta_{\max} = (1/2) \arctg(B_{0x}/B_{0z}) = \beta/2$ . Заметим, что к данной задаче не применимо магнитное дипольное приближение, в котором амплитуда возмущений зависит от расстояния как  $r^{-3}$ . Это связано с тем, что в данной задаче источник возмущения, т. е. поле скоростей в жидкости, распределён в пространстве и поэтому не может быть заменён точечным магнитным диполем. Если в момент времени  $t = 0$  центр шара находился в начале координат, то в формулах (17) зависимость переменных  $r$  и  $\theta$  от времени имеет вид  $r = [x^2 + y^2 + (z - V_0 t)^2]^{1/2}$ ,  $\cos \theta = (z - V_0 t)/r$ .

При переходе в лабораторную систему отсчёта, относительно которой шар движется со скоростью  $\mathbf{V}_0$ , необходимы преобразования электромагнитного поля. В нерелятивистском случае ( $V_0 \ll c$ ) формулы для магнитных возмущений (17) сохраняют свой вид, но координаты  $r$  и  $\theta$  будут зависеть от времени, а электрическое поле преобразуется следующим образом:  $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0$ . Компоненты электрического поля  $\bar{\mathbf{E}}$  в системе координат, связанной с шаром, можно найти с помощью уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{b}} = \mu_0 \sigma (\bar{\mathbf{E}} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)$ . Компоненты напряжённости  $\mathbf{E}$  электрического поля в лабораторной системе отсчёта для  $r > R$  имеют вид

$$E_r = V_0 B_0 \frac{R^3}{2r^3} \sin(\beta) \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad E_\theta = -V_0 B_0 \frac{R^3}{4r^3} \sin(\beta) \sin(\varphi) \cos(\theta);$$

$$E_\varphi = -V_0 B_0 \frac{R^3}{4r^3} \sin(\beta) \cos(\varphi). \quad (18)$$

В векторной форме уравнения (18) записываются как

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{\mathbf{r}(\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0) R^3}{4r^3}.$$

Электрическое поле в лабораторной системе отсчёта имеет потенциальный характер. При этом потенциал  $\Phi$  этого поля вне шара соответствует полю эффективного диполя с электрическим моментом  $\mathbf{d} = \pi \varepsilon_0 (\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0) R^3$ , где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. Отсюда видно, что электрические возмущения могут достигать максимальных значений в направлении, задаваемом вектором  $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0$ , т. е. вдоль оси  $y$ . Компоненты электрического поля сопоставимы по амплитуде и убывают с расстоянием как  $r^{-3}$ . Однако амплитуда этих возмущений, определяемая эффективным дипольным моментом  $\mathbf{d}$ , зависит от угла между  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{V}_0$  и, в частности, может обратиться в нуль, если эти векторы параллельны.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

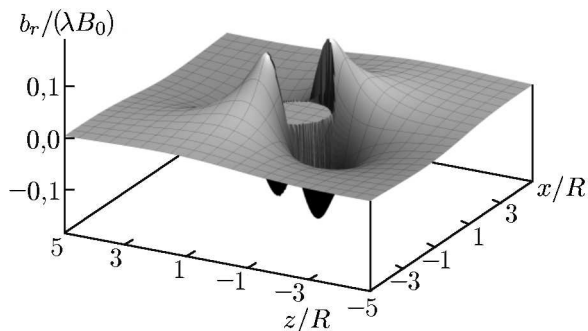


Рис. 2. Пространственное распределение радиальной компоненты безразмерного магнитного возмущения  $b_r/(\lambda B_0)$ , генерируемого движущимся шаром, в плоскости  $y = 0$ . Вектор скорости  $\mathbf{V}_0$  составляет угол  $\beta = 60^\circ$  с вектором  $\mathbf{B}_0$

На рис. 2 и 3 приведено пространственное распределение безразмерного радиального возмущения магнитного поля  $b_r/(\lambda B_0)$  в плоскости  $xz$ , рассчитанное по первой формуле (17) с использованием преобразования координат  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ;  $\theta = \arctg(x/z)$ . Для параметров  $\sigma = 5$  См/м,  $V_0 = 5$  м/с,  $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл и  $R = 50$  м величина  $\lambda B_0$  получается равной 75 нТл. В этом случае возмущение магнитного поля вблизи шара может достигать  $10 \div 15$  нТл. Как видно из рис. 3, полярные диаграммы распределения  $b_r/(\lambda B_0)$  в плоскости  $y = 0$  имеют четыре лепестка, расположение которых зависит от угла  $\beta$  между векторами  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ . Наибольшие значения магнитных возмущений достигаются в направлениях, которые составляют углы  $\beta/2$  и  $\pi + \beta/2$  с вектором

$\mathbf{V}_0$ . Ещё два локальных максимума образуются в ортогональных направлениях.

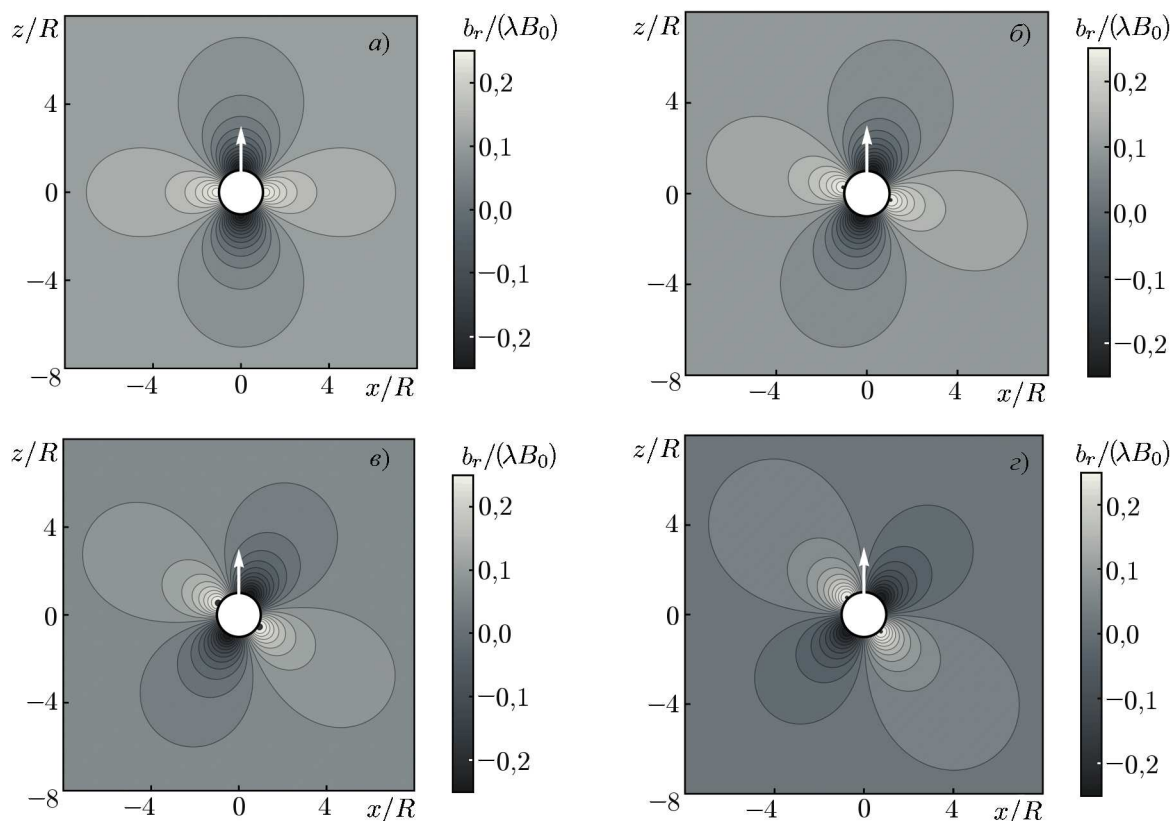


Рис. 3. Полярные диаграммы распределения радиальной компоненты безразмерного магнитного возмущения  $b_r/(\lambda B_0)$  в плоскости  $y = 0$  для различных углов наклона невозмущённого магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  относительно направления скорости  $\mathbf{V}_0$  набегающего потока жидкости:  $\beta = 0^\circ$  (а);  $30^\circ$  (б);  $60^\circ$  (в) и  $90^\circ$  (г)

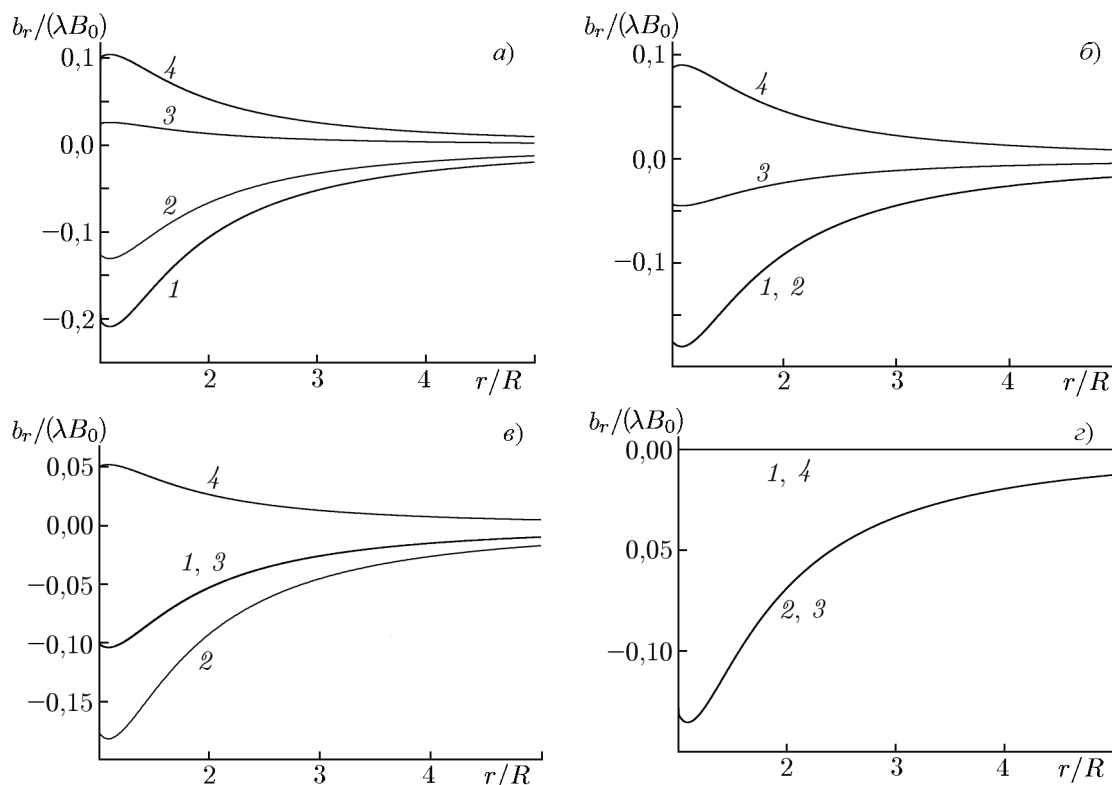


Рис. 4. Безразмерные зависимости радиальной компоненты магнитного возмущения  $b_r/(\lambda B_0)$  от безразмерного расстояния  $r/R$  для различных углов наклона  $\beta$  магнитного поля относительно направления скорости набегающего потока жидкости. На панели *a* угол  $\beta = 0^\circ$ , *b* —  $30^\circ$ , *c* —  $60^\circ$ , *d* —  $90^\circ$ ; кривые 1–4 отвечают значениям полярного угла  $\theta = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$  соответственно

Зависимости радиальной компоненты возмущения магнитного поля от расстояния для различных углов  $\beta$  между направлением потока жидкости и вектором индукции магнитного поля приведены на рис. 4. Кривые 1–4 построены при значениях полярного угла  $\theta = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно. На безразмерном расстоянии  $r/R = 5$  значения  $b_r$  убывают на  $1 \div 2$  порядка, поскольку эта зависимость в основном определяется соотношением  $b_r \propto r^{-2}$ . Разные знаки проекций радиальных возмущений при различных углах  $\theta$  обусловлены свойством замкнутости линий магнитной индукции.

Эти результаты получены в предположении о малости магнитной силы, действующей на проводящую жидкость, т. е. при условии  $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0| \ll |\nabla P|$ . Градиент давления жидкости вблизи поверхности шара  $|\nabla P| \approx \rho V_0^2/R$ , где  $\rho \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$  — плотность жидкости. Подставляя в эти соотношения указанные выше численные значения параметров, получаем следующее условие:  $j \ll \rho V_0^2/(RB_0) = 10^7 \text{ А/м}^2$ , которое хорошо выполняется, поскольку характерное значение плотности тока в данной задаче  $j = \sigma E \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ А/м}^2$ .

В лабораторной системе координат возмущение магнитного поля в точке измерения зависит от времени, т. к. от времени зависят координаты (см. уравнения (17)). Для безразмерной радиальной компоненты магнитного возмущения на оси  $x$  ( $y = z = 0$ ) имеем

$$b_r(\xi, \tau) = \frac{\lambda B_0}{4(\xi^2 + \tau^2)} \left[ 1 - \frac{3}{5(\xi^2 + \tau^2)} \right] \left[ \cos(\beta) \left( 1 - \frac{3\tau^2}{\xi^2 + \tau^2} \right) - 3 \sin(\beta) \frac{\xi\tau}{\xi^2 + \tau^2} \right], \quad (19)$$

где  $\xi = x/R$ ,  $\tau = t/t_0$ ,  $t_0 = R/V_0$ . На рис. 5 приведены графики зависимости величины  $b_r/(\lambda B_0)$

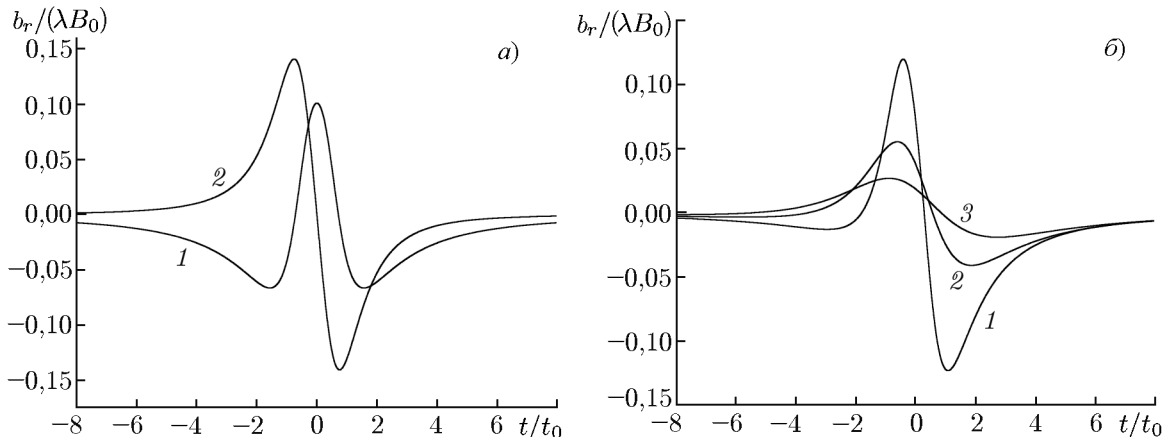


Рис. 5. Радиальная компонента безразмерного магнитного возмущения  $b_r/(\lambda B_0)$  на оси  $x$  в лабораторной системе координат в зависимости от безразмерного времени  $t/t_0$ . На панели *a* координата  $x = R$ , а  $\beta = 0^\circ$  (кривая 1) и  $90^\circ$  (кривая 2), на панели *б* угол  $\beta = 45^\circ$ , а координата  $x = R$  (кривая 1),  $2R$  (кривая 2) и  $3R$  (кривая 3)

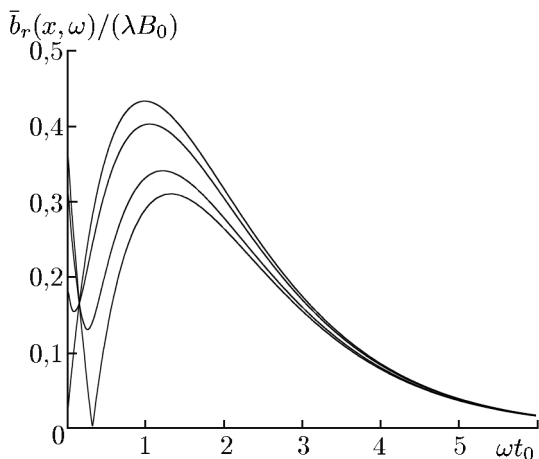


Рис. 6. Спектр  $\bar{b}_r(x, \omega)/(\lambda B_0)$  временной зависимости радиальной компоненты безразмерного магнитного возмущения на оси  $x$  в лабораторной системе координат в точке  $x = R$  для углов  $\beta = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ$  и  $90^\circ$  (кривые 1–4 соответственно)

от безразмерного времени  $t/t_0$  на различных расстояниях от центра шара и для различных углов  $\beta$  между векторами  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ . Принятые значения параметров дают значение  $t_0 = 10$  с. Графики на рис. 5*a* построены для  $x = R$  и  $\beta = 0^\circ$  (кривая 1) и  $90^\circ$  (кривая 2). Графики на рис. 5*б* построены для  $\beta = 45^\circ$  и  $x = R; 2R; 3R$  (кривые 1–3 соответственно). Как видно из рис. 5, зависимость магнитного возмущения от времени имеет знакопеременный характер, причём сигнал может содержать 2 или 3 пика, величины которых убывают с расстоянием.

Формула (19) позволяет получить частотный спектр сигнала, наблюдаемого на оси  $x$ . Проведя фурье-преобразование

$$\tilde{b}_r(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b_r(\xi, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad (20)$$

на больших расстояниях  $r \gg R$  получим, что

$$\tilde{b}_r(\xi, \omega) = (\pi\lambda B_0/8) \exp(-|\omega| t_0 \xi) \left\{ 3 |\omega| t_0 \exp[i\beta \text{sgn}(\omega)] - \frac{1}{\xi} \cos \beta \right\}. \quad (21)$$

Анализ формулы (21) показывает, что частотная зависимость модуля спектра магнитных возмущений имеет немонотонный характер, причём экстремумы возникают при частотах  $\omega_{\mp} = [3 + 2 \cos \beta \mp (9 + 4 \cos^2 \beta)^{1/2}]/(6\xi t_0)$ , где знак минус отвечает минимуму, а знак плюс — максимуму спектра. На рис. 6 приведены модули спектра магнитных возмущений (21) в зависимости от безразмерной частоты  $\omega t_0$  для точки с координатой  $x = R$ , рассчитанные для различных углов  $\beta$ . При указанных выше значениях параметров максимум спектра приходится на частоты  $\omega = 0,1 \div 0,2$  Гц. Из рис. 6 видно, что частоты максимума  $\omega_+$  и минимума  $\omega_-$  уменьшаются с ростом угла  $\beta$  в соответствии с приведённой выше формулой.



Электрическое поле (18) вне шара распределено по дипольному закону с эффективным дипольным моментом порядка  $7 \cdot 10^{-9}$  Кл·м (при указанных выше параметрах). Его максимальная величина на расстоянии  $r = 500$  м оценивается как 0,5 мкВ/м. В лабораторной системе отсчёта временная зависимость электрического сигнала, также как и магнитного, имеет немонотонный характер, а максимум его спектра лежит в том же частотном диапазоне порядка 0,1÷0,2 Гц.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное выше аналитическое решение задачи позволяет оценить магнитные возмущения, вызванные движущимся твёрдым диэлектрическим телом в проводящей жидкости. Если тело движется с постоянной скоростью, а течение жидкости потенциальное, то амплитуда магнитных возмущений оказывается пропорциональной объёму и скорости движения тела. В неограниченной жидкости магнитные возмущения убывают с расстоянием  $r$  как  $r^{-2}$ , а электрические возмущения — как  $r^{-3}$ . Распределение электрического поля вне шара подчиняется дипольному закону с эффективным дипольным моментом, который также пропорционален объёму и скорости движения шара. На далёких расстояниях в магнитных возмущениях преобладает радиальная составляющая  $B_r$ , направленная на движущееся тело или в противоположном направлении. Анализ показал, что наибольшая величина  $B_r$  достигается в плоскости, в которой лежат векторы невозмущённого магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  и скорости шара  $\mathbf{V}_0$ . Полярная диаграмма радиальных магнитных возмущений в этой плоскости имеет вид четырёх ортогональных лепестков, расположение которых зависит от угла  $\beta$  между векторами  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{V}_0$ . Магнитные возмущения максимальны под углами  $\beta/2$  и  $\pi + \beta/2$  к вектору  $\mathbf{V}_0$ . Электрические возмущения максимальны в направлении, перпендикулярном плоскости векторов  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{V}_0$ . В лабораторной системе отсчёта зависимости электрических и магнитных сигналов от времени имеют немонотонный характер. При выбранных параметрах максимумы спектров сигналов лежат в диапазоне десятых долей герца. Эти выводы, по-видимому, остаются справедливыми при других граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности движущегося шара, в частности для шара, выполненного из проводящих магнитных материалов.

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Urlick R. J. Principles of underwater sound. New York: McGraw-hill companies, 1983. 423 p.
2. Стефаник Т. // В мире науки. 1988. № 3.
3. Ya'akobi O., Zilman G., Miloh T. // J. Eng. Math. 2011. V. 70, No. 1. P. 17.
4. Zhu X.-J., Xia M.-Y. // Progress Electromagn. Res. 2014. V. 149. P. 109.
5. Weaver J. T. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70, No. 8. P. 1921.
6. Manoj C. S., Maus S., Chulliat A. // EOS Trans. AGU. 2011. V. 92. P. 13.
7. Surkov V., Hayakawa M. // Ultra and Extremely Low Frequency Electromagnetic Fields. Springer Geophysics Series, XVI. London, New York: Springer, 2014. 486 p.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.

Поступила в редакцию 27 апреля 2016 г.; принята в печать 15 июня 2017 г.

**GEOMAGNETIC PERTURBATIONS CAUSED BY A SPHERE MOVING  
IN THE CONDUCTING LIQUID**

*V. V. Surkov, V. M. Sorokin, and A. K. Yashchenko*

We study the external magnetic-field perturbations caused by flows of the conducting incompressible liquid which streamlines a dielectric sphere moving in it. An analytical solution of the problem is obtained for the case of a potential flow of liquid and an arbitrary orientation of the external magnetic field. Angular distribution of the magnetic and electric field perturbations, as well as the dependence of their amplitude on distance are examined. The directions in which the magnetic and electric components of the perturbations are the maximum are determined. Temporal dependences and the spectra of electromagnetic signals are analyzed for different parameters of the problem. The results of analytical research are illustrated by numerical calculations.