

УДК 621.372.8

## СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ МНОГОСЛОЙНЫХ ЩЕЛЕВЫХ СТРУКТУР

А. Н. Коваленко\*

Московский технологический университет, г. Москва, Россия

Предложенный в работе [1] эффективный численно-аналитический метод расчёта собственных волн микрополосковой линии обобщается на многослойные щелевые структуры. Получены соотношения, позволяющие учесть многослойность среды на основе решения электродинамической задачи для двухслойной структуры. Построены алгебраические модели одиночной и связанных щелевых линий в многослойной диэлектрической среде. Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты разложений электрического поля в щелях по «чебышевскому» базису, преобразованы в быстроходящиеся ряды. Построенные модели позволяют путём компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой скоростью и точностью независимо от числа диэлектрических слоёв. Представлены результаты численного исследования сходимости метода, подтверждающие его эффективность.

### ВВЕДЕНИЕ

Полосковые линии различного типа, в том числе щелевые, широко используются в качестве линий передач и элементов интегральных схем сверхвысоких частот. Современная технология изготовления таких схем приводит к необходимости анализа их элементов с учётом межэлементной связи и многослойности среды. В работе [1] предложен эффективный численно-аналитический метод расчёта собственных волн экранированной микрополосковой линии. В основу этого метода положен проекционный метод решения интегральных уравнений специального вида с использованием «чебышевского» базиса, учитывающего в явном виде особенности решения. Метод позволяет получить численные результаты с высокой точностью при небольшом числе базисных функций [2]. В данной работе этот метод обобщается на многослойные щелевые направляющие структуры. В результате построены алгебраические модели одиночной и связанных щелевых линий в многослойной диэлектрической среде. При выводе основных соотношений используется универсальный (не зависящий от числа слоёв) способ, аналогичный предложенному в работе [3]. При этом алгоритмы нахождения характеристик многослойных щелевых структур такие же, как и соответствующие алгоритмы для двухслойной структуры.

### 1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЁТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается многослойная направляющая структура в идеальном прямоугольном экране с поперечными размерами  $a$  и  $b$ . Поперечное сечение структуры показано на рис. 1. В сечении  $y = c$  расположена система щелей в идеальном бесконечно тонком экране. Область ниже экрана ( $y \leq c$ ) обозначена как 1, область выше экрана ( $y \geq c$ ) — как 2. В областях 1 и 2 имеется  $K$  и  $N$  слоёв соответственно,  $\varepsilon_{j\nu}$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды в  $j$ -м слое области  $\nu$  (индекс  $\nu$  принимает значения 1 или 2).

Для определения поля собственных волн в области 1 решаем задачу возбуждения идеального прямоугольного волновода с поперечными размерами  $a$  и  $c$  эквивалентным магнитным током,

---

\* aleks-kovalenko@mail.ru

поверхностная плотность которого определяется через тангенциальную составляющую напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  в сечении  $y = y_0 = c - 0$ :  $\boldsymbol{\eta}^M = [\mathbf{y}^0, \mathbf{E}|_{y=c-0}]$ , где  $\mathbf{y}^0$  — орт оси  $y$ . Для определения поля собственных волн в области 2 решаем задачу возбуждения идеального прямоугольного волновода с поперечными размерами  $a$  и  $b - c$  эквивалентным магнитным током с поверхностной плотностью  $\boldsymbol{\eta}^M = -[\mathbf{y}^0, \mathbf{E}|_{y=c+0}]$ .

Представим выражения для напряжённости электрического ( $\mathbf{E}$ ) и магнитного ( $\mathbf{H}$ ) полей собственных волн в обеих областях в виде [1]

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial y} + W_0 \Gamma U^M, & E_z &= -i\Gamma \frac{\partial U^E}{\partial y} - iW_0 \Gamma \frac{\partial U^M}{\partial x}, & E_y &= \frac{\partial^2 U^E}{\partial y^2} + \varepsilon_{j\nu} U^E, \\ H_x &= \frac{\partial^2 U^M}{\partial x \partial y} - \frac{\varepsilon_{j\nu}}{W_0} \Gamma U^E, & H_z &= -i\Gamma \frac{\partial U^M}{\partial y} + i \frac{\varepsilon_{j\nu}}{W_0} \frac{\partial U^E}{\partial x}, & H_y &= \frac{\partial^2 U^M}{\partial y^2} + \varepsilon_{j\nu} U^M, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  — волновое сопротивление свободного пространства,  $\Gamma$  — нормированная (к волновому числу  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ) постоянная распространения,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные соответственно. В (1) и последующих выражениях опущен множитель  $\exp[i(\omega t - \Gamma z)]$ , где  $\omega$  — круговая частота и  $t$  — время, и используются безразмерные координаты и элементы длины, переход к которым осуществляется путём умножения их размерных аналогов на волновое число свободного пространства  $k_0$ .

В каждом слое структуры выражения (1) удовлетворяют уравнениям электродинамики. Эти выражения получены с помощью электрического и магнитного векторных потенциалов, имеющих только одну составляющую (по оси  $y$ ). Функции  $U^E$  и  $U^M$ , удовлетворяющие волновому уравнению, являются этими составляющими. При их нахождении нужно обеспечить выполнение граничных условий электродинамики на стенках идеального экрана и на межслойных сечениях.

Представим функции  $U^E$  и  $U^M$  в виде разложений в ряды Фурье по координате  $x$ :

$$U^E(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^E(y) \sin(\alpha_m x), \quad U^M(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^M(y) \cos(\alpha_m x), \quad \alpha_m = \frac{\pi}{a} m.$$

Используя неоднородные волновые уравнения для составляющих  $E_y$  и  $H_y$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\varepsilon_{j\nu} - \Gamma^2) E_y &= \pm \left( \frac{\partial \eta_z^M}{\partial x} + i\Gamma \eta_x^M \right) \delta[y - (c \pm 0)], \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (\varepsilon_{j\nu} - \Gamma^2) H_y &= \pm \frac{i}{W_0} \left( \frac{\partial \eta_x^M}{\partial x} - i\Gamma \eta_z^M \right) \delta'[y - (c \pm 0)], \end{aligned}$$

и разложения в ряды Фурье этих составляющих,

$$E_y = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m^2 U_m^E(y) \sin(\alpha_m x), \quad H_y = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m^2 U_m^M(y) \cos(\alpha_m x), \quad \chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2,$$

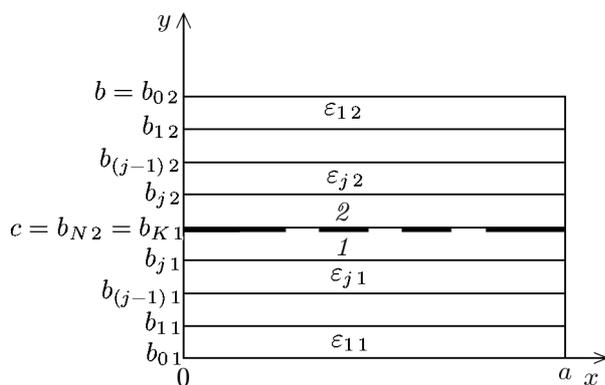


Рис. 1. Поперечное сечение многослойной щелевой направляющей структуры

получим следующие выражения для определения коэффициентов разложений  $U_m^E(y)$  и  $U_m^M(y)$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 U_m^E}{dy^2} + \beta_{mj\nu}^2 U_m^E \right) \chi_m^2 \sin(\alpha_m x) = \pm \left( \frac{\partial \eta_z^M}{\partial x} + i\Gamma \eta_x^M \right) \delta[y - (c \pm 0)],$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{d^2 U_m^M}{dy^2} + \beta_{mj\nu}^2 U_m^M \right) \chi_m^2 \cos(\alpha_m x) = \mp \frac{i}{W_0} \left( \frac{\partial \eta_x^M}{\partial x} - i\Gamma \eta_z^M \right) \delta'[y - (c \pm 0)],$$

где  $\beta_{mj\nu}^2 = \varepsilon_{j\nu} - \chi_m^2$ ,  $\boldsymbol{\eta}^M = [\mathbf{y}^0, \mathbf{E}|_{y=c-0}]$ ,  $\delta'(x)$  — производная  $\delta$ -функции. В приведённых и последующих выражениях верхний знак берётся при определении поля в области 2, а нижний — при определении поля в области 1.

Применяя обратное преобразование Фурье, приведём выражения для функций  $U^E(x, y)$  и  $U^M(x, y)$  к формулам

$$U^E(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} G_m^E(I_{xm}^M - \alpha_m I_{zm}^M) \frac{\sin(\alpha_m x)}{\chi_m^2},$$

$$U^M(x, y) = -\frac{\Gamma}{aW_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dG_m^M}{dy} \left( I_{zm}^M + \frac{\alpha_m}{\Gamma^2} I_{xm}^M \right) \frac{\varepsilon_m \cos(\alpha_m x)}{\chi_m^2}, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$I_{zm}^M = \sum_{r=1}^R \int_{x_r - W_r/2}^{x_r + W_r/2} \eta_{rz}^M(x') \sin(\alpha_m x') dx', \quad I_{xm}^M = \sum_{r=1}^R \int_{x_r - W_r/2}^{x_r + W_r/2} i\Gamma \eta_{rx}^M(x') \cos(\alpha_m x') dx',$$

$$\eta_{rz}^M = -E_{rx}^{sl}, \quad \eta_{rx}^M = E_{rz}^{sl},$$

где  $E_{rx}^{sl}$  и  $E_{rz}^{sl}$  — составляющие напряжённости электрического поля в  $r$ -й щели,  $R$  — число щелей,  $W_r$  — ширина  $r$ -й щели,  $x_r$  — центр  $r$ -й щели.

Одномерные функции Грина  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  в каждом слое областей 1, 2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 G_m^\sigma}{dy^2} + \beta_{mj\nu}^2 G_m^\sigma = \pm \delta(y - y_0), \quad y_0 = c \pm 0, \quad \sigma = E, M. \tag{3}$$

В сечении  $y = y_0$  производные от функций  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  терпят разрыв, равный

$$[G_m^\sigma(y)]' \Big|_{y=y_0-0} - [G_m^\sigma(y)]' \Big|_{y=y_0+0} = \mp 1. \tag{4}$$

Способ нахождения функций  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  в каждом слое областей 1 и 2 аналогичен способу, предложенному в работе [3].

Зададим на  $(j - 1)$ -м межслойном сечении областей 1 и 2 граничные условия импедансного типа:

$$Z_{m(j-1)\nu}^E = \pm \frac{(G_m^E)'}{\varepsilon_{j\nu} G_m^E} \Big|_{y=b_{(j-1)\nu}}, \quad Z_{m(j-1)\nu}^M = \pm \frac{(G_m^M)'}{\beta_{mj\nu}^2 G_m^M} \Big|_{y=b_{(j-1)\nu}}, \tag{5}$$

где  $j = 1, 2, \dots, K$  в области 1,  $j = 1, 2, \dots, N$  в области 2.

Используя (5), представим решение уравнения (3) в  $j$ -м слое областей 1 и 2 в виде

$$G_m^E(y) = C_{mj\nu}^E \frac{1}{\varepsilon_{j\nu}} \frac{\cos(\beta_{mj\nu} |y - b_{(j-1)\nu}|) + (Z_{m(j-1)\nu}^E / W_{mj\nu}^E) \sin(\beta_{mj\nu} |y - b_{(j-1)\nu}|)}{\cos(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|) + (Z_{m(j-1)\nu}^E / W_{mj\nu}^E) \sin(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|)},$$

$$G_m^M(y) = C_{mj\nu}^M \frac{1}{\beta_{mj\nu}^2} \times$$

$$\times \frac{\cos(\beta_{mj\nu} |y - b_{(j-1)\nu}|) + (Z_{m(j-1)\nu}^M / W_{mj\nu}^M) \sin(\beta_{mj\nu} |y - b_{(j-1)\nu}|)}{\cos(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|) + (Z_{m(j-1)\nu}^M / W_{mj\nu}^M) \sin(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|)}, \quad (6)$$

где  $W_{mj\nu}^M = \beta_{mj\nu} / \varepsilon_{j\nu}$ ,  $W_{mj\nu}^E = 1 / \beta_{mj\nu}$ ,  $C_{mj\nu}^E$  и  $C_{mj\nu}^M$  — постоянные коэффициенты.

Используя (6) и (5), найдём импедансы  $Z_{mj\nu}^E$  и  $Z_{mj\nu}^M$  на  $j$ -м межслойном сечении областей 1 и 2, т. е. при  $y = b_{j\nu}$ :

$$Z_{mj\nu}^\sigma = \frac{Z_{m(j-1)\nu}^\sigma + W_{mj\nu}^\sigma \operatorname{tg}(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|)}{1 - (Z_{m(j-1)\nu}^\sigma / W_{mj\nu}^\sigma) \operatorname{tg}(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|)}. \quad (7)$$

Таким образом, импедансы  $Z_{mj\nu}^E$  и  $Z_{mj\nu}^M$  на  $j$ -м межслойном сечении определяются через импедансы  $Z_{m(j-1)\nu}^E$  и  $Z_{m(j-1)\nu}^M$  на  $(j-1)$ -м межслойном сечении. Учитывая, что при  $y = 0$  и  $y = b$  импедансы равны нулю, можно, последовательно применяя рекуррентную формулу (7), определить импедансы на всех межслойных сечениях. Определив импедансы на  $(K-1)$ -м и  $(N-1)$ -м межслойных сечениях, находим, используя (6), функции  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  в  $K$ -м слое области 1 и в  $N$ -м слое области 2. Используя (4), получим следующие выражения для коэффициентов  $C_{mK1}^\sigma$  и  $C_{mN2}^\sigma$  ( $\sigma = E, M$ ):

$$C_{mK1}^\sigma = -1 / Z_{mK1}^\sigma, \quad C_{mN2}^\sigma = 1 / Z_{mN2}^\sigma. \quad (8)$$

Выполнение условий (5) обеспечивает выполнение граничных условий электродинамики на границах каждого слоя в областях 1 и 2, если на межслойных сечениях функции  $\varepsilon G_m^E(y)$ ,  $\beta_m^2 G_m^M(y)$  и производные от функций  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  непрерывны. Из этих условий определяем связь между постоянными коэффициентами  $C_{j\nu}^\sigma$  и  $C_{(j-1)\nu}^\sigma$ :

$$C_{m(j-1)\nu}^\sigma = C_{mj\nu}^\sigma \left[ \cos(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|) + \frac{Z_{m(j-1)\nu}^\sigma}{W_{mj\nu}^\sigma} \sin(\beta_{mj\nu} |b_{j\nu} - b_{(j-1)\nu}|) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Найдя по формуле (8) коэффициенты  $C_{mK1}^\sigma$  и  $C_{mN2}^\sigma$ , можно, последовательно применяя рекуррентную формулу (9), вычислить постоянные коэффициенты, необходимые для расчёта функций  $G_m^E(y)$  и  $G_m^M(y)$  по формулам (6) во всех слоях областей 1 и 2.

Таким образом, предлагаемый способ нахождения функции Грина позволяет определить по формулам (1) и (2) составляющие напряжённости электрического и магнитного полей во всех слоях областей 1 и 2, выражаемые через тангенциальную составляющую напряжённости электрического поля в щелях. Используя условие непрерывности тангенциальной составляющей напряжённости магнитного поля в щелях, получим следующую систему интегральных уравнений относительно поперечной ( $E_{rx}^{\text{sl}} = -\eta_{rz}^M$ ) и продольной ( $E_{rz}^{\text{sl}} = \eta_{rx}^M$ ) составляющих напряжённости электрического поля в каждой щели:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\chi_m^2} [(\Gamma^2 / G_m^M + \alpha_m^2 / G_m^E) I_{zm}^M + \alpha_m (1 / G_m^M - 1 / G_m^E) I_{xm}^M] \cos(\alpha_m x) = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\chi_m^2} [\alpha_m(1/G_m^M - 1/G_m^E)I_{zm}^M + (\alpha_m^2/(\Gamma^2 G_m^M) + 1/G_m^E) I_{xm}^M] \sin(\alpha_m x) = 0, \tag{10}$$

где  $|x - x_r| \leq W_r/2, r = 1, 2, \dots, R,$

$$G_m^\sigma = (1/Z_m^\sigma K_1 + 1/Z_m^\sigma N_2)^{-1}. \tag{11}$$

Применяя к решению этой системы проекционный метод, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из которой определяются постоянные распространения собственных волн  $\Gamma$  и коэффициенты разложения плотности магнитного тока в щелях по выбранному базису. При этом выражения для матричных коэффициентов СЛАУ, выражаемые через коэффициенты  $G_m^E$  и  $G_m^M$ , не зависят от числа слоёв щелевой структуры и имеют такой же вид, как и для щелевых линий на однослойной подложке. Поскольку алгоритмы вычисления коэффициентов  $G_m^E$  и  $G_m^M$  по формулам (7) и (11) не зависят от числа слоёв, то разработанные алгоритмы и реализующие их программы для двухслойной среды ( $K = 1, N = 1$ ) могут быть использованы (при небольшой доработке) для расчёта собственных волн щелевых линий в многослойной диэлектрической среде.

## 2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДИНОЧНОЙ ЩЕЛЕВОЙ ЛИНИИ

Представим искомые функции  $E_x^{sl}(x)$  и  $E_z^{sl}(x)$  в виде разложений по полиномам Чебышева первого и второго рода с весовыми функциями, учитывающих в явном виде краевые особенности решения [1]:

$$E_x^{sl}(\tilde{x}) = (1 - \tilde{x})^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} a_l T_l(\tilde{x}), \quad i\Gamma E_z^{sl}(\tilde{x}) = \frac{W}{2} \left[ (1 - \tilde{x})^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} b_l U_l(\tilde{x}) \right],$$

$$\tilde{x} = 2(x - x_0)/W, \quad |\tilde{x}| \leq 1, \tag{12}$$

где  $W$  — ширина щели,  $x_0$  — расстояние от плоскости  $x = 0$  до центра щели,  $T_l(\tilde{x})$  — полиномы Чебышева первого рода,  $U_l(\tilde{x})$  — полиномы Чебышева второго рода.

Подставляя (12) в систему интегральных уравнений (10) и проектируя полученные выражения на «чебышевский» базис, получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений  $a_l, b_l$ :

$$A_{q0}^{even} a_0 + \sum_{l=1}^L \left( A_{ql}^{even} a_{2l} + B_{ql}^{odd} b_{2l-1} + \tilde{A}_{ql}^{odd} a_{2l-1} + \tilde{B}_{ql}^{even} b_{2(l-1)} \right) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, L;$$

$$C_{q0}^{even} a_0 + \sum_{l=1}^L \left( C_{ql}^{even} a_{2l} + D_{ql}^{odd} b_{2l-1} + \tilde{C}_{ql}^{odd} a_{2l-1} + \tilde{D}_{ql}^{even} b_{2(l-1)} \right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, L;$$

$$\tilde{A}_{q0}^{even} a_0 + \sum_{l=1}^L \left( \tilde{A}_{ql}^{even} a_{2l} + \tilde{B}_{ql}^{odd} b_{2l-1} + A_{ql}^{odd} a_{2l-1} + B_{ql}^{even} b_{2(l-1)} \right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, L;$$

$$\tilde{C}_{q0}^{even} a_0 + \sum_{l=1}^L \left( \tilde{C}_{ql}^{even} a_{2l} + \tilde{D}_{ql}^{odd} b_{2l-1} + C_{ql}^{odd} a_{2l-1} + D_{ql}^{even} b_{2(l-1)} \right) = 0,$$

$$q = 1, 2, \dots, L \quad (L \rightarrow \infty), \tag{13}$$

где

$$A_{gl}^{even} = (-1)^{q+l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} A_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cos^2(m\beta),$$

$$\begin{aligned}
B_{gl}^{\text{even}} &= (-1)^{q+l} 2l \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cos^2(m\beta), \\
D_{gl}^{\text{odd}} &= (-1)^{q+l} 4ql \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cos^2(m\beta), \\
A_{gl}^{\text{odd}} &= (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \sin^2(m\beta), \\
B_{gl}^{\text{odd}} &= (-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \sin^2(m\beta), \\
D_{gl}^{\text{even}} &= (-1)^{q+l} (2q-1)(2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \sin^2(m\beta), \\
\tilde{A}_{gl}^{\text{odd}} &= -(-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
\tilde{B}_{gl}^{\text{even}} &= -(-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
\tilde{C}_{gl}^{\text{odd}} &= -(-1)^{q+l} 2q \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
\tilde{D}_{gl}^{\text{even}} &= -(-1)^{q+l} 2q(2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
A_m &= \frac{1}{\chi_m^2 G_m^E G_m^M} (\Gamma^2 G_m^E + \alpha_m^2 G_m^M), \quad B_m = \frac{1}{\chi_m^2 G_m^E G_m^M} (G_m^M - G_m^E), \\
D_m &= \frac{1}{\chi_m^2 G_m^E G_m^M} \left( \frac{G_m^E}{\Gamma^2} + \frac{G_m^M}{\alpha_m^2} \right), \quad J_{gl}(x) = J_q(x) J_l(x),
\end{aligned}$$

$J_\nu(x)$  — функция Бесселя 1-го рода порядка  $\nu$ ,  $\alpha = \pi W/(2a)$ ,  $\beta = \alpha(1+S/W)$ ,  $W$  — ширина щели,  $S/2$  — расстояние от края щели до плоскости  $x = a$  ( $S \leq a - W$ ).

Из условия равенства нулю определителя  $D$  системы (13) получим дисперсионное уравнение

$$D(\Gamma^2) = 0, \quad (14)$$

из которого численными методами определяются постоянные распространения собственных волн щелевых линий.

Бесконечные ряды для матричных коэффициентов системы (13) сходятся медленно, и непосредственное их вычисление требует большого времени счёта и может приводить к неустойчивым результатам даже при учёте весьма большого числа членов в этих рядах. Поэтому при численном решении дисперсионного уравнения (14) и СЛАУ (13) необходимо провести процедуру улучшения сходимости рядов по разработанной в работе [1] методике. При её выполнении возникает проблема суммирования следующих рядов:

$$\begin{aligned}
S_{ql}(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cos^2(m\beta), \\
P_{ql}(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \sin^2(m\beta),
\end{aligned}$$

$$Q_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta). \tag{15}$$

Эти ряды сходятся медленно, и для достижения точности расчёта постоянных распространения до четырёх значащих цифр в них необходимо учитывать до десяти тысяч членов, что связано с большими вычислительными затратами. Эта проблема решается путём математических преобразований выражений (15), близких проведённым в работе [1], в результате которых получают следующие интегральные представления для функций, определяемых рядами (15):

$$\begin{aligned} S_{ql} &= \frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) - F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta), \\ P_{ql}(\alpha, \beta) &= R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) - \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) + F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta), \\ Q_{ql}(\alpha, \beta) &= E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

где

$$R_{kn}(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cos[(k+n)\varphi] \ln\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) d\theta d\varphi, \tag{16}$$

$k+n$  — чётное число;

$$F_{kn}(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cos[(k+n)\varphi] \left[ \frac{1}{2} \ln(\sin \beta) + \frac{1}{4} \ln\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} / \operatorname{tg}^2 \beta\right) \right] d\theta d\varphi, \tag{17}$$

$k+n$  — чётное число;

$$E_{kn}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \sin[(k+n)\varphi] \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(u/2) / \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}(u/2) / \operatorname{tg} \beta} d\theta d\varphi, \tag{18}$$

$k+n$  — нечётное число,  $u = 2\alpha \cos \theta \sin \varphi$ .

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя почленно, приведём выражения для функции  $R_{kn}(\alpha)$  к виду

$$\begin{aligned} R_{kn}(\alpha)|_{k \neq n} &= (-1)^{(k+n)/2} \sum_{\nu=(k+n)/2}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \times \\ &\times \frac{\nu(\nu-1) \dots [\nu+1-(k+n)/2]}{(\nu+1)(\nu+2) \dots [\nu+(k+n)/2]} \frac{\nu(\nu-1) \dots [\nu+1-|(k-n)/2]}{(\nu+1)(\nu+2) \dots [\nu+|(k-n)/2]} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{2\nu}, \\ R_{kk}(\alpha)|_{k \neq 0} &= \frac{1}{2k} + (-1)^k \sum_{\nu=k}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu+1-k)}{(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{2\nu}, \\ R_{00}(\alpha) &= \ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{2\nu}, \quad S_{2\nu} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu}}. \end{aligned}$$

Из полученных выражений видно, что ряд быстро сходится и при расчёте функции  $R_{kn}(\alpha)$  в нём достаточно учесть несколько первых членов. При больших значениях  $q$  и  $l$  этот ряд близок

к нулю, и в этом случае для функции  $R_{kn}(\alpha)$  получается асимптотическое выражение  $R_{kn} \approx \delta_{kn}/(2k)$ , где

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Аналогичные представления можно получить также для функций  $F_{kn}(\alpha, \beta)$  и  $E_{kn}(\alpha, \beta)$ , разлагая в выражениях (17) и (18) тангенс и логарифм в степенные ряды и интегрируя почленно.

Таким образом, используя интегральные представления (16)–(18), можно получить выражения для функций  $S_{ql}(\alpha, \beta)$ ,  $P_{ql}(\alpha, \beta)$  и  $Q_{ql}(\alpha, \beta)$  в виде быстроходящихся рядов. При больших значениях  $q$  и  $l$  эти функции представляются в виде

$$S_{ql} \approx \frac{1}{8q} \delta_{ql}, \quad P_{ql} \approx \frac{1}{4(2q-1)} \delta_{ql}, \quad Q_{ql} \approx 0. \quad (19)$$

Используя (19), можно получить асимптотические выражения для матричных коэффициентов системы (13). Из анализа этих выражений следует вывод о диагональном характере матрицы коэффициентов СЛАУ (13), быстрой сходимости разложений (12) и возможности решения бесконечной системы уравнений методом редукции при небольшом порядке редуцированной СЛАУ. Порядок системы равен  $P = 4L + 1$  ( $L = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $2L$  — число учитываемых членов в разложениях (12) для  $E_z^{\text{sl}}$  и  $2L + 1$  — для  $E_x^{\text{sl}}$ . При симметричном расположении щели относительно боковых стенок экрана  $S = a - W$ ,  $\beta = \pi/2$  и усечённая система (13) распадается на две независимые подсистемы относительно коэффициентов  $a_{2l}$  ( $l = 0, 1, \dots, L$ ),  $b_{2l-1}$  ( $l = 1, \dots, L$ ) и  $a_{2l-1}$  ( $l = 1, \dots, L$ ),  $b_{2(l-1)}$  ( $l = 1, \dots, L$ ). Первая подсистема (порядка  $2L + 1$ ) соответствует собственным волнам чётного типа. Вторая (порядка  $2L$ ) отвечает собственным волнам нечётного типа.

### 3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗАННЫХ ЩЕЛЕВЫХ ЛИНИЙ

Поперечное сечение экранированных связанных щелевых линий для трёхслойной структуры показано на рис. 2. Приведённые на нём обозначения имеют следующий смысл:  $W$  — ширина щелей,  $S$  — расстояние между щелями,  $h$  — толщина подложки,  $h_1$  — высота подвеса подложки,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость подложки,  $2a, b$  — размеры экрана.

При одинаковой ширине полосковых проводников задача о собственных волнах связанных линий сводится к двум задачам о собственных волнах одиночной линии: 1) с электрической стенкой в плоскости симметрии  $x = a$ ; 2) с магнитной стенкой в этой плоскости. Из первой задачи определяются собственные волны чётного типа, из второй — нечётного типа. Для волн чётного типа в плоскости симметрии равна нулю тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля. Для волн нечётного типа в этой плоскости равна нулю тангенциальная составляющая напряжённости магнитного поля. Собственные волны чётного типа определяются выражениями, приведёнными в первом и втором разделах. Собственные волны нечётного типа определяются этими же выражениями, в которых нужно вместо  $m$  писать  $m - 1/2$  ( $m \neq 0$ ), а в матричных коэффициентах СЛАУ заменить  $\sin(m\beta)$  на  $\cos[(m - 1/2)\beta]$ ,  $\cos(m\beta)$  на  $\sin[(m - 1/2)\beta]$ ,  $S_{ql}(\alpha, \beta)$  на  $S_{ql}^{\text{M}}(\alpha, \beta)$ ,  $P_{ql}(\alpha, \beta)$  на  $P_{ql}^{\text{M}}(\alpha, \beta)$ ,  $Q_{ql}(\alpha, \beta)$  на  $Q_{ql}^{\text{M}}(\alpha, \beta)$ , где

$$S_{ql}^{\text{M}}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - 1/2} J_{(2q)(2l)} \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \cos^2 \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \beta \right],$$

$$P_{ql}^{\text{M}}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - 1/2} J_{(2q-1)(2l-1)} \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin^2 \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \beta \right],$$

$$Q_{ql}^M(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - 1/2} J_{(2q)(2l-1)} \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \beta \right] \cos \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) \beta \right]. \quad (20)$$

Путём математических преобразований, используя интегральные представления для функций Бесселя и их произведений, можно получить следующие формулы для функций, определяемых рядами (20):

$$P_{ql}^M(\alpha, \beta) = R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) - 2F_{(2q-1)(2l-1)} \left( \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right) - \left[ \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta) \right],$$

$$S_{ql}^M(\alpha, \beta) = 2 \left[ R_{(2q)(2l)} \left( \frac{\alpha}{2} \right) - R_{(2q)(2l)}(\alpha) + F_{(2q)(2l)} \left( \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) - F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta),$$

$$Q_{ql}^M(\alpha, \beta) = 2E_{2q(2l-1)} \left( \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right) - E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta). \quad (21)$$

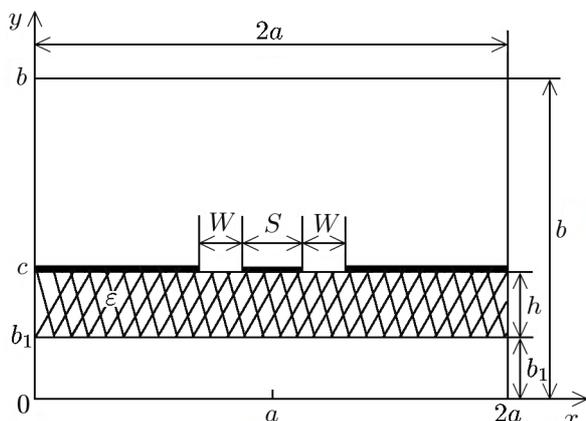


Рис. 2. Поперечное сечение связанных щелевых линий — коэффициентов замедления и волновых сопротивлений

При больших значениях  $q$  и  $l$  эти функции, как и функции  $S_{ql}(\alpha, \beta)$ ,  $P_{ql}(\alpha, \beta)$  и  $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ , представляются в виде (19). Из анализа асимптотических выражений для матричных коэффициентов следует вывод о диагональном характере матрицы коэффициентов системы (13) и быстрой сходимости разложений (12) и для собственных волн нечётного типа.

Использование «чебышевского» базиса, позволяющее учесть в явном виде краевые особенности поля, и улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов СЛАУ привели к разработке эффективного алгоритма расчёта электродинамических параметров щелевых линий (для распространяющихся типов волн). Волновые сопротивления определяются через мощность и магнитный ток в щелях и представляются в виде быстросходящихся рядов. На основе разработанного алгоритма создана компьютерная программа, позволяющая с высокими точностью и скоростью определять постоянные распространения, распределение поля в щели и волновые сопротивления одиночной и связанных щелевых линий. Результаты численного анализа сходимости разработанного алгоритма практически не зависят от числа диэлектрических слоёв и не отличаются от результатов анализа сходимости аналогичного алгоритма расчёта микрополосковых линий на однослойной подложке, представленных в работе [4].

В результате расчётов, выполненных на персональном компьютере, исследована сходимость разложений (12) для поля в щели и решён вопрос о выборе числа  $L$ , определяющего порядок СЛАУ, и числа членов ряда  $M_y$ , которое нужно учитывать в рядах для матричных коэффициентов после улучшения сходимости этих рядов. При  $L = 2$  и  $M_y = 50$  погрешность расчёта постоянных распространения и волновых сопротивлений основной волны и двух высших волн не

Таблица 1

| $W/a$   |       | 1/7    | 2/7    | 4/7    | 6/7    | 6,5/7  | 6,9/7  |
|---------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L = 1$ | $n_1$ | 2,8626 | 2,7783 | 2,5334 | 2,1358 | 2,2191 | 2,2803 |
|         | $n_2$ | 2,7202 | 2,7026 | 2,4837 | 1,8860 | 1,8136 | 1,9453 |
| $L = 2$ | $n_1$ | 2,8626 | 2,7774 | 2,5144 | 1,9005 | 1,8444 | 1,8343 |
|         | $n_2$ | 2,7202 | 2,7025 | 2,4831 | 1,6375 | 1,4124 | 1,3583 |
| $L = 3$ | $n_1$ | 2,8626 | 2,7774 | 2,5144 | 1,9002 | 1,8443 | 1,8338 |
|         | $n_2$ | 2,7202 | 2,7025 | 2,4831 | 1,6375 | 1,4113 | 1,3552 |
| [1]     | $n_2$ | 2,7202 | 2,7025 | 2,4831 | 1,6375 | 1,4113 | 1,3550 |

Таблица 2

| $f$ , ГГц | 20     | 22     | 24     | 26     | 28     | 30     | 60     |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n$       | 1,0851 | 1,4490 | 1,6839 | 1,8546 | 1,9867 | 2,0932 | 2,7026 |
| $n$ [5]   | 1,0870 | 1,4535 | 1,6904 | 1,8574 | 1,9966 | 2,1046 | —      |
| $n$ [1]   | 1,0851 | 1,4490 | 1,6839 | 1,8546 | 1,9867 | 2,0932 | 2,7025 |

превышает 0,1% в широком диапазоне изменения параметров. Для иллюстрации быстрой сходимости и высокой точности предлагаемого метода нахождения собственных волн щелевых линий в табл. 1 приведены результаты расчёта коэффициентов замедления  $n_1$  и  $n_2$  основной и первой высшей волн волноводно-щелевой линии соответственно при различных значениях числа  $L$  и отношения  $W/a$ . Параметры линии (см. рис. 2):  $b_1 = 0$ ,  $S = a - W$ ,  $a/h = 7$ ,  $b/h = 4$ ,  $h = 0,5$  мм,  $\varepsilon = 9$ , частота  $f = 60$  ГГц.

При  $W/a \leq 2/7$  первое приближение ( $L = 1$ ) даёт точность до 4÷5 значащих цифр. С увеличением ширины щели погрешность увеличивается и при  $W/a = 0,5$  достигает 1%. Но даже при значениях отношения  $W/a$ , близких к единице ( $W/a = 0,9$ ), погрешность второго приближения ( $L = 2$ ) не превышает 0,1%. В последней строке табл. 1 приведены результаты расчёта коэффициента замедления экранированной микрополосковой линии с шириной полоскового проводника  $a - W$ , полученные методом, предложенным в работе [1]. При  $W/a \leq 6/7$  эти результаты совпадают с точностью до пяти значащих цифр с результатами, полученными в данной статье при  $L = 2$ .

В табл. 2 приведены результаты расчёта различными методами коэффициента замедления  $n$  основной волны чётного типа рассмотренной выше волноводно-щелевой линии при  $W/a = 2/7$  и разных частотах  $f$ . В первой строке даны результаты, которые получены методом, изложенным в данной статье при  $L = 1$ . Во второй строке приведены результаты, основанные на данных [5], полученных путём приближённого решения сингулярного интегрального уравнения относительно электрического поля в щели. В последней строке даны результаты, найденные путём решения методом [1] интегрального уравнения относительно плотности электрического тока на полосковом проводнике в области границы, дополнительной по отношению к щели.

Для связанных щелевых линий (см. рис. 2) сходимость разложений (12) для близко расположенных щелей зависит в основном от отношения  $S/W$ . При его уменьшении сходимость ухудшается. Однако при  $S/W \geq 0,05$  точность до четырёх значащих цифр достигается уже при  $L = 2$ . Это подтверждается данными, представленными в табл. 3, в которой приведены результаты расчёта коэффициентов замедления и волновых сопротивлений основных волн нечётного ( $n_1$ ,  $Z_1$ ) и чётного ( $n_2$ ,  $Z_2$ ) типов щелевых линий при  $a/h = 20$ ,  $b/h = 7$ ,  $b_1/h = 3$ ,  $S/h = 0,1$ ,  $\varepsilon = 9$ ,  $fh = 10$  ГГц · мм и различных значениях  $S/W$  и  $L$ . Отметим, что использование интегральных

Таблица 3

| $W/S$   |            | 10     | 20     | 30     | 40     | 50     | 60     |
|---------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $L = 1$ | $n_1$      | 2,1892 | 2,1129 | 2,0519 | 2,0101 | 1,9812 | 1,9588 |
|         | $n_2$      | 1,6724 | 1,5082 | 1,4158 | 1,3578 | 1,3206 | 1,2965 |
|         | $Z_{1,OM}$ | 242,26 | 292,42 | 342,52 | 398,94 | 455,94 | 503,04 |
|         | $Z_{2,OM}$ | 66,02  | 96,93  | 127,80 | 159,86 | 193,29 | 227,45 |
| $L = 2$ | $n_1$      | 2,1892 | 2,1131 | 2,0536 | 2,0166 | 1,9956 | 1,9821 |
|         | $n_2$      | 1,6723 | 1,5088 | 1,4154 | 1,3577 | 1,3206 | 1,2963 |
|         | $Z_{1,OM}$ | 242,95 | 295,76 | 351,52 | 419,39 | 495,20 | 564,48 |
|         | $Z_{2,OM}$ | 66,03  | 96,98  | 127,87 | 159,94 | 193,38 | 227,66 |
| $L = 3$ | $n_1$      | 2,1892 | 2,1131 | 2,0540 | 2,0172 | 199,62 | 1,9826 |
|         | $n_2$      | 1,6723 | 1,5088 | 1,4154 | 1,3577 | 1,3206 | 1,2963 |
|         | $Z_{1,OM}$ | 242,98 | 296,05 | 352,65 | 422,31 | 500,51 | 571,78 |
|         | $Z_{2,OM}$ | 66,03  | 96,98  | 127,88 | 159,96 | 193,40 | 227,69 |
| $L = 4$ | $n_1$      | 2,1892 | 1,5088 | 2,054  | 2,0174 | 1,9965 | 1,9829 |
|         | $n_2$      | 1,6723 | 2,1131 | 1,4154 | 1,3577 | 1,3206 | 1,2963 |
|         | $Z_{1,OM}$ | 242,98 | 296,10 | 352,92 | 423,08 | 502,04 | 573,90 |
|         | $Z_{2,OM}$ | 66,03  | 96,98  | 127,89 | 159,96 | 193,41 | 227,69 |

представлений (16)–(18) для функций, определяемых рядами (15) и (20), и преобразование их в быстроходящиеся ряды позволило в десятки раз сократить время счёта электродинамических параметров щелевых линий.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в работе [3] и данной статье способы нахождения одномерных функций Грина по рекуррентным формулам, основанные на использовании импедансных граничных условий, позволили обобщить метод расчёта собственных волн микрополосковой линии [1] на многослойные полосковые и щелевые направляющие структуры. Указанные способы не зависят от числа слоёв. Поэтому при компьютерном моделировании многослойных структур можно использовать программы, разработанные для структур с двухслойным диэлектриком. Построенная в данной статье математическая модель щелевых линий позволяет путём компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой точностью и с малыми вычислительными затратами в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров линий независимо от числа диэлектрических слоёв. Это даёт возможность эффективно использовать её как при инженерном проектировании, так и в системах анализа и оптимизации с учётом технологических особенностей изготовления интегральных схем, работающих на сверхвысоких частотах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 2. С. 188.
2. Коваленко А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 11. С. 1388.
3. Коваленко А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 12. С. 759.
4. Коваленко А. Н. // Научный вестник МИРЭА. 2010. № 2 (9). С. 8.
5. Неганов В. А., Нефёдов Е. И., Яровой Г. П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайне высоких частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328 с.

Поступила в редакцию 22 сентября 2016 г.; принята в печать 20 января 2017 г.

## EIGENMODES OF MULTILAYER SLIT STRUCTURES

*A. N. Kovalenko*

We generalize the high-efficiency numerical-analytical method of calculating the eigenmodes of a microstrip line, which was proposed in [1] to multilayer slit structures. The obtained relationships make it possible to allow for the multilayer nature of the medium on the basis of solving of the electrodynamic problem for a two-layer structure. The algebraic models of a single line and a coupled slit line in a multilayer dielectric medium are constructed. The matrix elements of the system of linear algebraic equations, which is used to determine the expansion coefficients of the electric field in the slits with respect to the Chebyshev basis, are converted to fast-converging series. The constructed models allow one to use computer simulation to obtain numerical results with high speed and accuracy regardless of the number of dielectric layers. The presented results of studying the method convergence numerically confirm high efficiency of the method.