

УДК 621.373.1

## О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННОГО РЕЖИМА В ХАБ-КЛАСТЕРАХ ЭНЕРГОСЕТЕЙ

*А. С. Дмитричев\**, *Д. Г. Захаров*, *В. И. Некоркин*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Проведено исследование устойчивости синхронного режима в хаб-кластерах энергосетей, моделируемых ансамблями фазовых осцилляторов. Представлен подход, позволяющий оценивать области в пространстве параметров, которые соответствуют глобальной асимптотической устойчивости этого режима. Подход иллюстрируется на примере хаб-кластера, состоящего из одного генератора и двух потребителей.

### ВВЕДЕНИЕ

Нахождение условий устойчивости синхронных режимов электрических машин является важной и актуальной задачей теории энергосетей. Начиная с появления первых простейших сетей, эта задача привлекает всё большее внимание. Это связано с тем, что современные энергосети состоят из очень большого числа разнообразных элементов с многочисленными связями между ними; это значительно усложняет решение задачи и требует привлечения новых методов и подходов исследования. Распределение связей по сети (топология сети) имеет сложный характер, для описания которого привлекается математический аппарат сетей на случайных графах [1]. В частности, для многих энергосетей характерно существование так называемых «хабов» — элементов, число связей которых значительно превышает среднее число связей других элементов сети. Хабами, например, являются крупные электростанции (АЭС, ГЭС и др.) и их объединения. Зная условия устойчивости синхронных режимов отдельных хаб-кластеров, можно осуществлять гибкое управление энергосетью, например, путём балансировки генерируемых и потребляемых внутри таких кластеров мощностей с помощью контролируемых межкластерных перетоков мощности.

Базовым элементом многих энергосетей является синхронный генератор — электромеханическое устройство, детальное описание работы которого требует привлечения сложных математических моделей, таких как, например, система Парка—Горева [2, 3]. Использование моделей такого типа для описания динамики крупномасштабных энергосетей представляется затруднительным. Поэтому для этих целей в настоящее время широко используются более простые модели [4–7], основанные на следующих рассуждениях. В синхронной машине частота вращения ротора прямо пропорциональна частоте изменения электродвижущей силы в старторных обмотках. Следовательно, для упрощённого описания состояния элемента энергосети можно использовать механическую фазу вала его ротора,  $\theta_i(t) = \omega t + \phi_i(t)$ , где  $\omega$  — некоторая наперёд заданная опорная частота энергосети, а  $\phi_i$  — фаза вала ротора  $i$ -го элемента сети во вращающейся с опорной частотой  $\omega$  системе координат. Для синхронного генератора можно записать уравнение баланса мощностей [4], в котором учитываются кинетическая энергия вала ротора (пропорциональная  $d(\theta_i)^2/dt$ ), потери за счёт механического трения (пропорциональные  $\dot{\theta}_i^2$ ), подводимая механическая энергия  $P_i$  ( $P_i > 0$ ) и передаваемая в сеть электромагнитная энергия (здесь и далее точкой обозначены производные по времени).

\* admitry@neuron.appl.sci-nnov.ru

В приближении малых возмущений частоты ( $\dot{\phi}_i \ll \omega$ ) можно получить следующую систему, описывающую динамику генератора —  $i$ -го элемента энергосети:

$$\ddot{\phi}_i = -\alpha_i \dot{\phi}_i + P_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N X_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N R_{ij} [\cos(\phi_j - \phi_i) - 1]. \quad (1)$$

Здесь  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  — число элементов в сети,  $\alpha_i$  — коэффициент демпфирования (далее будем рассматривать случай  $\alpha_i = \alpha$ ). Два последних члена в правой части уравнения (1) описывают компоненты уходящей в энергосеть активной мощности, в приближении коротких и средних по протяжённости линий электропередачи, где  $X_{ij}$  и  $R_{ij}$  — элементы матрицы реактивного и активного импеданса линий соответственно. Отметим, что в отличие от случая, рассмотренного в работе [4], здесь  $R_{ij} \neq 0$ . Заметим также, что уравнение (1) может описывать динамику потребителя: в этом случае  $P_i < 0$  и перед последним слагаемым в правой части нужно поставить знак «+».

К настоящему времени подход моделирования энергосетей посредством сетей фазовых осцилляторов получил достаточно широкое признание и распространение (см., например, работы [4–13]). Поскольку нормальное функционирование энергосетей обеспечивается только в синхронном режиме, то основным изучаемым явлением в этих работах является синхронизация. Перепады потребляемой мощности, аварии на энергостанциях, ложные срабатывания систем автоматической защиты на линиях электропередач и обрывы на них, а также некоторые другие события могут приводить к потере синхронизации между хаб-кластерами и вызвать распад энергосети на отдельные хаб-кластеры («энергоострова»). Другими словами, они могут приводить к возникновению каскадных аварий. Поэтому важно определить не только условия существования устойчивого синхронного режима, но и его область притяжения. В частности, в работе [6] были установлены условия, при которых наблюдается спонтанная синхронизация энергосети; в работе [11] было введено понятие переходной устойчивости, т. е. способности системы поддерживать режим синхронизации при нарушении функционирования отдельных частей энергосетей; в работе [12] был предложен метод оценки областей притяжения аттракторов. Также было установлено [13], что введение новых связей, подключение новых потребителей или дополнительных мощностей может приводить к десинхронизации и нарушению функционирования энергосистемы. Более того, было показано, что в энергосети Великобритании, помимо синхронного режима, всегда существует асинхронный режим, отвечающий каскадной аварии.

Из вышесказанного следует, что для надёжной работы энергосетей или быстрого их перезапуска после аварий необходимо обеспечить глобальную устойчивость синхронного режима. Данная статья посвящена развитию подхода, позволяющего получать достаточные условия глобальной устойчивости синхронного режима в отдельных хаб-кластерах энергосетей, которые имеют топологию типа «звезда» (см. рис. 1). Решив такую задачу для всех хаб-кластеров энергосети, можно рассмотреть задачу устойчивости синхронного режима в рамках всей энергосети, учитывая возможные перетоки мощности между хабами. Рассмотрим динамику такого хаб-кластера,

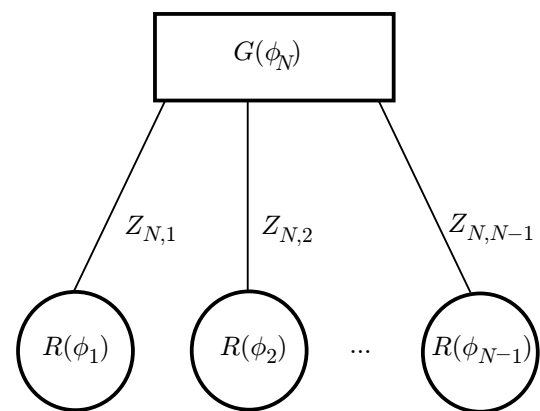


Рис. 1. Схематическое представление хаб-кластера, состоящих из одного генератора  $G(\varphi_N)$  и  $N - 1$  потребителей  $R(\varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$

состоящего из одного генератора и  $(N - 1)$ -го потребителей, расположенных на расстояниях  $d_i$  от него. В этом случае

$$P_j < 0, \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad P_N > 0, \\ \mathbf{R} = \frac{r_0}{r_0^2 + x_0^2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{X} = \frac{x_0}{r_0^2 + x_0^2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad (2)$$

где  $r_0$  и  $x_0$  — удельные активный и реактивный импедансы линий электропередачи соответственно, а матрица  $\tilde{\mathbf{R}}$  имеет вид

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & d_1^{-1} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & d_2^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & d_{N-1}^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & \cdot & d_{N-1}^{-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ХАБ-КЛАСТЕРА

Для удобства сделаем в системе (1) и (2) замену времени и переменных, а также введём новые параметры:

$$\bar{t} = t / \sqrt[4]{r_0^2 + x_0^2}, \quad \lambda = \alpha / \sqrt{r_0^2 + x_0^2}, \\ \cos \beta = r_0 / \sqrt{r_0^2 + x_0^2}, \quad \sin \beta = x_0 / \sqrt{r_0^2 + x_0^2}, \\ \bar{P}_i = P_i / \sqrt{r_0^2 + x_0^2}, \quad \gamma_i = \bar{P}_N - \bar{P}_i > 0, \quad \varphi_i = \phi_i - \phi_N. \quad (3)$$

В этих обозначениях система (1) и (2) примет вид

$$\dot{\varphi}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\lambda y_i - \gamma_i + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} [\cos(\varphi_j + \beta) - \cos \beta], \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $i = 1, \dots, N - 1, N > 1$ .

Система (4) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $S^{N-1} \times R^{N-1}$ , т. к. её правая часть периодична по переменным  $\varphi_i$  с периодом  $2\pi$ .

Покажем, что в фазовом пространстве системы (4) существует так называемая (см., например, [16]) поглощающая область, притягивающая все траектории системы с начальными условиями вне этой области. Действительно, непосредственно из системы (4) имеем

$$\dot{y}_i = -\lambda y_i - \gamma_i + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} [\cos(\varphi_j + \beta) - \cos \beta] \leq -\lambda y_i - \gamma_i + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} [1 - \cos \beta] \equiv Q^+.$$

Нетрудно видеть, что  $Q^+ < 0$ , если

$$y_i > y_i^{(1)} = \left[ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} (1 - \cos \beta) - \gamma_i \right] / \lambda, \quad (5)$$

и, следовательно,  $\dot{y}_i \leq 0$  для любой траектории системы (4) с начальными условиями  $(y_i(0), \varphi_i \in S^1)$ , где  $y_i(0) > y_i^{(1)}$ . Аналогично можно показать, что для любой траектории с начальными

условиями  $(y_i(0), \varphi_i \in S^1)$ , где  $y_i(0) < y_i^{(0)}$ , а

$$y_i^{(0)} = - \left( \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} [1 + \cos \beta] + \gamma_i \right) / \lambda, \quad (6)$$

выполняется неравенство  $\dot{y}_i \geq 0$ . Следовательно, область

$$\Pi = \{\varphi_i \in S^1, y_i \in [y_i^{(0)}, y_i^{(1)}]\}$$

фазового пространства притягивает все траектории системы (4) с начальными условиями вне этой области, которые в дальнейшем остаются в области  $\Pi$ .

В области  $\Pi$  при выполнении условий

$$-1 < \gamma_i^* < 1, \quad \gamma_i^* = d_i \gamma_i + \cos \beta - \frac{d_i}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j, \quad (7)$$

система (4) имеет  $2^{N-1}$  грубых состояний равновесия вида  $O_k(\varphi_i^{(a_{ki})}, y_i = 0, i = 1, \dots, N-1)$ , где  $\{a_{ki}\}$  — символьная последовательность ( $a_{ki} \in \{0, 1\}$ ) двоичного представления числа  $k-1$ , а

$$\varphi_i^{(0)} = -\beta + \arccos(\gamma_i^*), \quad \varphi_i^{(1)} = -\beta - \arccos(\gamma_i^*). \quad (8)$$

Стандартный анализ показывает, что только состояние равновесия  $O_1(\varphi_i^{(0)}, y_i = 0, i = 1, \dots, N-1)$ , является устойчивым, а все остальные имеют седловой тип. Поскольку в системе (4)  $\varphi_i = \phi_i - \phi_N$ , то очевидно, что состоянию равновесия  $O_1$  отвечает устойчивый синхронный режим работы хаб-кластера (1) и (2).

Найдём условия, при которых состояние равновесия  $O_1$  является глобально асимптотически устойчивым.

## 2. ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ $O_1$

Введём функцию

$$V(\varphi_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{(y_i - y_j)^2}{2} - N \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\varphi_i^{(0)}}^{\varphi_i} \frac{1}{d_i} [\cos(\xi + \beta) - \gamma_i^*] d\xi. \quad (9)$$

Производная этой функции в силу системы (4) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda \left[ \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} (y_i - y_j)^2 \right] \leq 0. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что вдоль траекторий системы (4) при увеличении времени поверхности уровня  $V(\varphi_i, y_i) = C = \text{const}$  убывают. В простейшем случае, когда  $\gamma_i^* \equiv 0$ , т. е.

$$\gamma_i = - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{2^{\delta_{ij}}}{d_j} \cos \beta, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (11)$$

функция (9) будет периодичной функцией Ляпунова с периодом  $2\pi$ . Следовательно (см., например, [15, 16]), состояние равновесия  $O_1$  является глобально асимптотически устойчивым. Однако этот случай не представляет практического интереса, поскольку соответствует неработающей энергосети ( $\gamma_i \equiv 0$ , т. е.  $P_i \equiv 0$ ).

Для реальных сетей, наоборот, представляет интерес случай, когда условия (11) не выполняются. При этом функция  $V(\varphi_i, y_i)$  теряет свойства периодичности (с периодом  $2\pi$ ), но условие (10) по-прежнему выполняется и траектории системы (4) по-прежнему пересекают поверхности уровня  $V(\varphi_i, y_i) = C = \text{const}$  в направлении убывания  $C$ . Покажем, как с помощью определённых выбранных поверхностей уровня функции  $V(\varphi_i, y_i)$  и границы области  $\Pi$  можно получить условия глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия  $O_1$  и при невыполнении условий (11) (для систем, заданных на двумерном цилиндре, идеи этого подхода изложены в работе [16]).

Рассмотрим поверхности уровня, проходящие через седловые состояния равновесия  $O_k$ :  $V(\varphi_i, y_i) = C_k, k = 2, 3, \dots, 2^{N-1}$ , где

$$C_k = V(O_k) = -N \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\varphi_i^{(0)}}^{\varphi_i^{(a_{ki})}} \frac{1}{d_i} [\cos(\xi + \beta) - \gamma_i^*] d\xi.$$

Выберем из них поверхность уровня, отвечающую минимальному значению  $C_k$ , и рассмотрим её часть

$$V^+ = \{V(\varphi_i, y_i) = \min\{C_k\}, \varphi_j < \varphi_j^*\}. \tag{12}$$

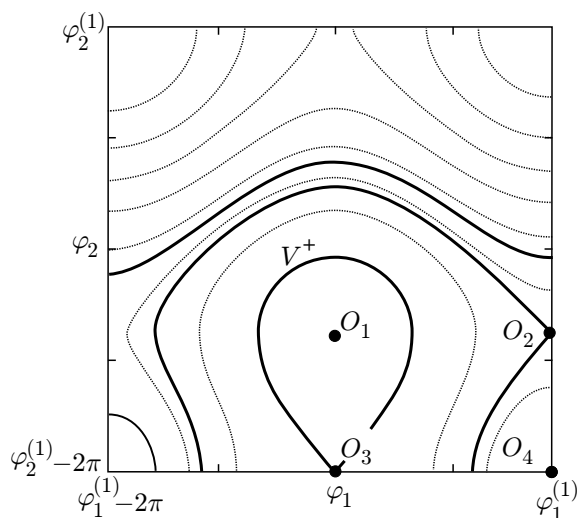


Рис. 2. Следы поверхностей уровня функции (9) для хаб-кластера из трёх элементов в сечении  $\{y_1 = 0, y_2 = 0\}$  при  $\gamma_1 = 0,5; \gamma_2 = 1,1; \beta = \pi/2; d_1 = d_2 = 1$ .  $O_1$  является устойчивым состоянием равновесия,  $O_2, O_3$  и  $O_4$  — седлами

Обозначим через  $\Omega^+$  область фазового пространства, ограниченную поверхностью  $V^+$ . Поверхность уровня  $V^+$  (см. рис. 2) и все поверхности  $V(\varphi_i, y_i) = C < \min\{C_k\}$ , расположенные в области  $\Omega^+$ , являются замкнутыми и охватывают только состояние равновесия  $O_1$ . Следовательно, все траектории системы (4), имеющие начальные условия в области  $\Omega^+$ , в силу условия (10) асимптотически стремятся к состоянию равновесия  $O_1$ , которое, таким образом, является устойчивым в «большом» (в области  $\Omega^+$ ).

Для оценки области глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия  $O_1$  рассмотрим систему (4) для значений параметров, при которых сечение  $\varphi_i = \varphi_i^{(0)}$  поверхности  $\Pi$  целиком располагается внутри соответствующего сечения поверхности  $V^+$  (рис. 3а). Такие значения параметров всегда существуют, поскольку «размеры» поглощающей области  $\Pi$  зависят от параметра  $\lambda$  (уменьшаются с его увеличением),

а поверхность  $V^+$  от  $\lambda$  не зависит. Поскольку  $V^+$  не является периодической функцией, то она проходит через некоторую точку  $(y_i = 0, \varphi_i = \varphi_i^*)$ , расположенную внутри области  $\Pi$  (рис. 3б). Следовательно, существуют такие значения  $\varphi$ , при которых поверхность  $V^+$  полностью «перекрывает» область  $\Pi$  (делит её на две части). С другой стороны, в силу условия (10), все траек-

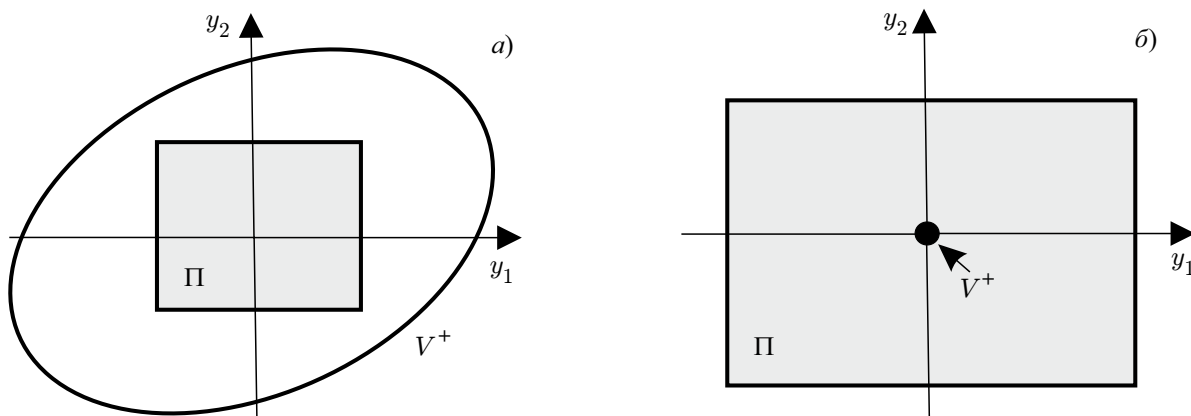


Рис. 3. Схематическое изображение двух из возможных взаимных расположений поглощающей области  $\Pi$  и поверхности  $V^+$  функции (9) для хаб-кластера из трёх элементов

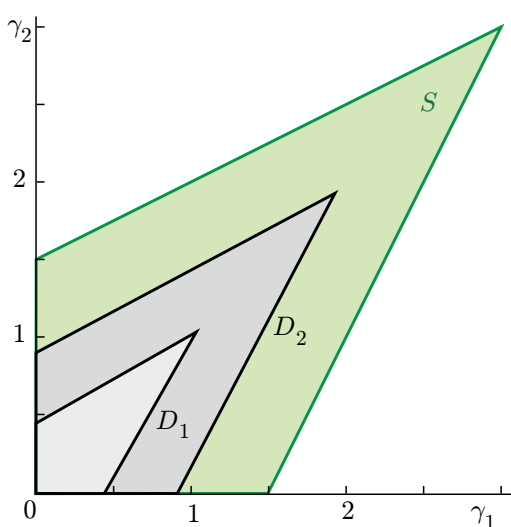


Рис. 4. Области  $D_i$ , отвечающие глобальной устойчивости состояния равновесия  $O_1$  на плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  при  $\lambda = 3$  ( $D_1$ ) и  $\lambda = 5$  ( $D_2$ ) для хаб-кластера из трёх элементов при  $\beta = \pi/2$  и  $d_1 = d_2 = 1$ . Область  $S$  соответствует области существования состояний равновесия системы (4)

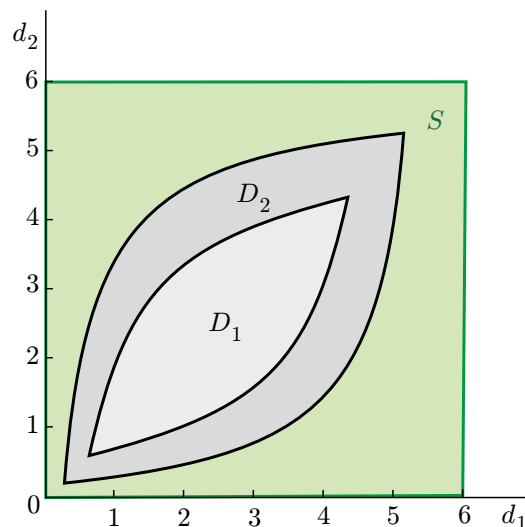


Рис. 5. Области  $D_i$ , отвечающие глобальной устойчивости состояния равновесия  $O_1$  на плоскости параметров  $(d_1, d_2)$  при  $\lambda = 3$  ( $D_1$ ) и  $\lambda = 5$  ( $D_2$ ) для хаб-кластера из трёх элементов при  $\beta = \pi/2$  и  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ . Область  $S$  соответствует области существования состояний равновесия системы (4)

тории системы с начальными условиями в области  $\Pi$ , но вне  $\Omega^+$ , пересекая поверхности уровня  $V(\varphi_i, y_i) = C > C_{\min}$ , стремятся в область  $\Omega^+$  и асимптотически приближаются к  $O_1$ . Таким образом, состояние равновесия является глобально асимптотически устойчивым.

Для численной оценки области глобальной устойчивости найдём параметры, при которых в сечении  $\varphi_i = \varphi_i^{(0)}$  след, образованный поглощающей областью  $\Pi$ , будет вложен в след поверхности  $V^+$ . В этом сечении след  $V^+$  имеет наибольший размер и представляет собой эллипсоидную поверхность  $l(y_i) = 0$ , где

$$l(y_i) = V(\varphi_i^{(0)}, y_i) - \min\{C_k\}.$$

С другой стороны, поглощающая область в сечении  $\varphi_i = \varphi_i^{(0)}$  представляет собой гиперкуб с вер-

пинами

$$A_k = (y_i^{(a_{ki})}, i = 1, \dots, N-1), \quad k = 2, 3, \dots, 2^{N-1}.$$

Следовательно, поглощающая область  $\Pi$  будет вложена в поверхность  $V^+$ , если

$$l(A_k) \leq 0, \quad k = 2, 3, \dots, 2^{N-1}. \quad (13)$$

Для примера условия (13) были численно изучены для случая сети из одного генератора и двух потребителей. На рис. 4 и 5 в различных плоскостях параметров представлены оценки областей существования режима глобальной устойчивости состояния равновесия такой сети. Область глобальной устойчивости  $D$  в обоих случаях существует при значении параметра  $\lambda > \lambda_{\min} = 3/\sqrt{2}$  и увеличивается с ростом этого параметра, пока не совпадёт с областью существования состояний равновесия  $S$ , задаваемой условиями (7).

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована устойчивость синхронного режима в хаб-кластерах энергосетей, имеющих топологию типа «звезда». Показано, что синхронный режим в таких кластерах может быть глобально асимптотически устойчивым. Это означает, что синхронизация элементов энергосети возникает при любых начальных условиях. Представлен подход, позволяющий оценивать область глобальной устойчивости в пространстве параметров хаб-кластера. Применение этого подхода продемонстрировано на примере сети, состоящей из трёх элементов: одного генератора и двух потребителей. Установлено, что область глобальной устойчивости синхронного режима такой сети в пространстве параметров существует при значениях параметра  $\lambda > \lambda_{\min}$ . Поскольку  $\lambda = \alpha/\sqrt{r_0^2 + x_0^2}$ , то управлять устойчивостью работы хаб-кластера можно, с помощью изменения реактивного импеданса линий электропередачи. Показано, что при расчёте устойчивости энергосетей важно учитывать длины линий электропередачи между генератором и потребителями. Предложенный подход может быть распространён на всю энергосеть посредством учёта перетоков мощности между хаб-кластерами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-42-02353, 15-02-04245).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pagani G. A., Aiello M. // *Physica A*. 2013. V. 392. P. 2688.
2. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. М.: ГЭИ, 1950. 551 с.
3. Park R. // *Trans. AIEE*. 1929. V. 48. P. 716.
4. Filatrella G., Nielsen A. H., Pedersen N. F. // *European Physical J. B*. 2008. V. 61. P. 485.
5. Lozano S., Buzna L., Díaz-Guilera A. // *European Physical J. B*. 2012. V. 85. P. 231.
6. Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T. // *Nature Physics*. 2013. V. 9. P. 191.
7. Ji P., Peron I. K. D.M., Menck P. J., et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P. 218701.
8. Sole R. V., Rosas-Casals M., Corominas Muntra B., Valverde S. // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. P. 026102.
9. Rosas-Casals M. // *Proc. 2010 Complexity in Engineering*. February 22–24, 2010, Rome. P. 21.
10. Fioriti V., Ruzzante S., Castorini E., et al. // *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2009. V. 5508. *Critical Information Infrastructure Security. CRITIS 2008*. P. 14.
11. Dorfler F., Bullo F. // *SIAM J. Control Optim.* 2012. V. 50, No. 3. P. 1616.

12. Menck P.J., Heitzig J., Kurths J., Schellnhuber H.J. // Nature Communications. 2014. V. 5. P. 3969.
13. Witthaut D., Timme M. // New J. Physics. 2012. V. 14. P. 083036.
14. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 300 с.
15. Леонов Г. А. Теория управления. С-Пб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2006. 233 с.
16. Nekorkin V.I. Introduction to nonlinear oscillations. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2015. 250 p.

Поступила в редакцию 29 сентября 2016 г.; принята в печать 7 марта 2017 г.

## ON GLOBAL STABILITY OF SYNCHRONOUS REGIME IN THE HUB CLUSTERS OF POWER-SUPPLY NETWORKS

*A. S. Dmitrichev, D. G. Zakharov, and V. I. Nekorkin*

We study stability of synchronous regime in the hub clusters of power-supply networks, which are simulated by ensembles of the phase oscillators. An approach allowing one to estimate the regions in the parameter space, which correspond to the global asymptotic stability of this regime, is presented. The method is illustrated by an example of a hub cluster consisting of one generator and two consumers.