УДК 533.86

СМЕЩЕНИЕ СРЕДНЕЙ ЧАСТОТЫ У СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ В СРЕДАХ С КУБИЧНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. Н. Власов *

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Исследовано изменение средней частоты солитонов огибающей, распространяющихся в нелинейных средах с релаксирующей кубичной нелинейностью. Показано, что средняя частота при распространении может не только понижаться при положительном коэффициенте нелинейности, что было известно ранее, но и повышаться при отрицательном коэффициенте нелинейности, что имеет место для гравитационных волн на поверхности жидкости.

При распространении волн в нелинейных средах с кубичной нелинейностью временно́й спектр распространяющейся волны может меняться [1–6]. Частота при распространении может как понижаться, так и повышаться, как, например, в случае ионизационной нелинейности [4, 5]. Это изменение имеет место и в случае релаксирующей нелинейности у солитонов огибающей — пакетов волн, распространяющихся без изменения своей формы [7]. Условием существования солитонов является выполнение неравенства [2]

$$\frac{\partial^2 k_0}{\partial \omega^2}\, \Delta v_{\rm ph} > 0, \tag{1}$$

где k_0 — постоянная распространения волны с несущей частотой $\omega = \omega_0$, $\Delta v_{\rm ph}$ — изменение фазовой скорости вследствие нелинейности. В работе [7] на простом примере солитона огибающей, распространяющегося в волоконном световоде с $\partial^2 k_0/\partial\omega^2 < 0$ и $\Delta\varepsilon > 0$, где $\Delta\varepsilon$ — нелинейное приращение диэлектрической проницаемости, показано, что при релаксации нелинейности средняя частота уменьшается [1]. В этой работе будет показано, что при других знаках коэффициентов нелинейности и дисперсии $\partial^2 k_0/\partial\omega^2$ смещение средней частоты у солитона зависит от знака коэффициента релаксирующей кубичной нелинейности и, соответственно, знака коэффициента дисперсии. В частности, у гравитационных волн на поверхности жидкости средняя частота увеличивается.

Для описания распространения пакетов волн воспользуемся параболическим нелинейным уравнением для амплитуды огибающей $a_{\rm d}$: [2]

$$ik_0\, \frac{\partial a_{\rm d}}{\partial z} + \frac{1}{2}\, k_0\, \frac{\partial^2 k_0}{\partial \omega^2}\, \frac{\partial^2 a_{\rm d}}{\partial \xi^2} - \frac{k_0^2\, \Delta\varepsilon}{2}\, a_{\rm d} = 0, \tag{2}$$

где $\xi = t - z/v_{\rm gr}$ — время в сопровождающей системе отсчёта, t — время в лабораторной системе отсчёта, $v_{\rm gr}$ — групповая скорость на частоте ω_0. Предположим, что нелинейное приращение диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial\, \Delta\varepsilon}{\partial t} + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} = \frac{\varepsilon_2'\, |a_{\rm d}|^2}{\tau}\,, \tag{3}$$

где τ — время релаксации нелинейности, ε_2' — коэффициент кубичной нелинейности.

* vlasov@hydro.appl.sci-nnov.ru

[1] Неравенство (1) в нелинейной оптике с учётом зависимости фазовой скорости $v_{\rm ph} = \omega_0/k_0 = c/\sqrt{\varepsilon}$ от диэлектрической проницаемости ε часто представляется в виде $\Delta\varepsilon\, \partial^2 k_0/(\partial\omega^2) < 0$, где c — скорость света в вакууме.

При исследовании зависимости несущей частоты в системе уравнений (2) и (3) от продольной координаты z введём безразмерную амплитуду $a = \sqrt{|\varepsilon_2'|}\, a_{\rm d}$, проинтегрируем (3), записав его решение в виде

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_2'}{\tau\,|\varepsilon_2'|} \int\limits_0^\infty |a(t-s)|^2 \exp\Bigl(-\frac{s}{t}\Bigr)\, {\rm d}s,$$

и подставим его в (2):

$$ik_0\,\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2}\,k_0\,\frac{\partial^2 k_0}{\partial\omega^2}\,\frac{\partial^2 a}{\partial\xi^2} - \frac{\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,\frac{k_0 a}{2\tau} \int\limits_0^\infty |a(\xi-s)|^2 \exp\Bigl(-\frac{s}{\tau}\Bigr)\, {\rm d}s = 0. \qquad (4)$$

Для среды с мгновенно релаксирующей нелинейностью ($\tau\to 0$) из (4) получим уравнение

$$i\,\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 k_0}{\partial\omega^2}\,\frac{\partial^2 a}{\partial\xi^2} - \frac{\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,\frac{k_0\,|a|^2\,a}{2} = 0, \qquad (5)$$

среди решений которого при условии несовпадения знаков коэффициентов дисперсии $k_{\omega\omega} = \partial^2 k_0/(\partial\omega^2)$ и нелинейности ε_2' имеется солитон. Это решение уравнения (5) описывается выражением

$$a = \Psi \exp\Bigl(-ih\,\frac{z}{2}\Bigr),$$

где функция $\Psi = A/{\rm ch}(\xi/T)$ удовлетворяет уравнению

$$h\Psi + k_{\omega\omega}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} - \frac{\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,k_0\,|\Psi|^2\Psi = 0$$

с

$$h = -k_{\omega\omega}\,\frac{1}{T^2}\,, \qquad A = \sqrt{-\frac{2\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,\frac{k_{\omega\omega}}{k_0 T^2}}\,; \qquad (6)$$

$2T$ — длительность солитона. При изучении уравнения (4), следуя [7], перейдём к временны́м спектрам $U(\Omega,z)$ функции $a(t,z)$:

$$U(\Omega,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(t,z)\exp(-i\Omega t)\,{\rm d}t, \qquad a(t,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\Omega,z)\exp(i\Omega t)\,{\rm d}\Omega. \qquad (7)$$

Перепишем уравнение (4) в спектральной форме:

$$iU_z(\Omega,z) - \frac{1}{2}\,k_{\omega\omega}\Omega^2 U(\Omega,z) - \frac{\varepsilon_2' k_0}{2\,|\varepsilon_2'|}\,\times$$
$$\times\iint \frac{1-i\omega_3\tau}{1+(\omega_3\tau)^2}\,U(\Omega-\omega_3,z)U^*(\omega_2,z)U(\omega_3+\omega_2,z)\,{\rm d}\omega_2\,{\rm d}\omega_3 = 0, \qquad (8)$$

где индекс z и звёздочка означают производную по z и комплексное сопряжение соответственно. Найдём производную от средней частоты солитона $\bar\Omega$ по продольной координате при его распространении:

$$\bar\Omega_z = \frac{\rm d}{{\rm d}z}\,\frac{\int\Omega\,|U|^2\,{\rm d}\Omega}{\int\,|U|^2\,{\rm d}\Omega} = \frac{\int\Omega[U({\rm d}U^*/{\rm d}z) + U^*({\rm d}U/{\rm d}z)]\,{\rm d}\Omega}{\int\,|U|^2\,{\rm d}\Omega}\,. \qquad (9)$$

При записи (9) учтено, что для невозмущённого солитона, который описывается уравнением (5), выполняется условие $\int \Omega\,|U|^2\,\mathrm{d}\Omega = 0$.

Подставим в (9) спектры солитона — решения уравнения (5):

$$U(\Omega,z) = \frac{A\exp(-ihz/2)}{2\pi}\int \frac{\exp(-i\Omega\xi)}{\mathrm{ch}(\xi/T)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{AT\exp(-ihz/2)}{2\mathrm{ch}(\pi T\Omega/2)}\,, \tag{10}$$

причём интеграл от спектра мощности солитона равен

$$I = \int \mathrm{d}\Omega\,|U|^2 = \frac{A^2T}{\pi} = -2\,\frac{k_{\omega\omega}}{T^2k_0}\,\frac{\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,\frac{T}{\pi} = -2\,\frac{k_{\omega\omega}}{\pi Tk_0}\,\frac{\varepsilon_2'}{|\varepsilon_2'|}\,. \tag{11}$$

При вычислении

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int |U|^2\,\Omega\,\mathrm{d}\Omega$$

используем равенство

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x+\alpha)\mathrm{ch}(x-\alpha)} = \frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}$$

и получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int |U|^2\,\Omega\,\mathrm{d}\Omega = -\,\frac{A^4}{2\pi^4}\,\frac{\varepsilon_2'k_0}{|\varepsilon_2'|}\int \frac{\tau_0x_3^4}{1+(\tau_0x_3)^2}\,\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x^3/2)}\,\mathrm{d}x_3 = -\,\frac{A^4}{2\pi^4}\,\frac{\varepsilon_2'k_0}{|\varepsilon_2'|}\,F(\tau_0),$$

где $\tau_0 = 2\tau/(\pi T)$. График зависимости F от τ_0 приведён на рис. 1. Она имеет максимум $F_{\max} \approx \approx 12{,}31$ при $\tau_0 = 0{,}31$.

Для изменения частоты, нормированной на интеграл от спектра мощности, имеем

$$\bar\Omega_z = \frac{\mathrm{d}\int |U|^2\,\Omega\,\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}z}{\int |U|^2\,\mathrm{d}\Omega} = -\,\frac{A^2}{2\pi^3}\,\frac{\varepsilon_2'k_0}{|\varepsilon_2'|\,T}\,F(\tau_0) = \frac{k_{\omega\omega}}{\pi^3T^3}\,F(\tau_0). \tag{12}$$

Для $\tau_0 = 2\tau/(\pi T) \gg 1$ (т. е. когда длительность импульса много меньше времени релаксации), учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{q^2}{\mathrm{sh}^2(q/2)}\,\mathrm{d}q = 13{,}143,$$

для производной от средней частоты спектра по расстоянию имеем

$$\bar\Omega_z \approx \frac{2k_{\omega\omega}}{\pi^4T^4}\,\frac{\tau}{[2\tau/(\pi T)]^2}\int \frac{q^2}{\mathrm{sh}^2(q/2)}\,\mathrm{d}q = \frac{13{,}143}{2\pi^2}\,\frac{k_{\omega\omega}}{T^2\tau} = 0{,}666\,\frac{k_{\omega\omega}}{T^2\tau}\,.$$

Таким образом, из (12) следует, что в уравнении (4) при выполнении условия существования солитонов $\varepsilon_2'\partial^2k_0/(\partial\omega^2) < 0$ частота понижается, если

$$\frac{\partial^2k_0}{\partial\omega^2} < 0, \qquad \varepsilon_2' > 0, \tag{13}$$

и повышается, если

$$\frac{\partial^2k_0}{\partial\omega^2} > 0, \qquad \varepsilon_2' < 0. \tag{14}$$

Определим расстояние L, на котором спектр солитона смещается на свою ширину $\bar\Omega$: $L = \bar\Omega/\bar\Omega_z$. При усреднённой ширине спектра импульса

$$\bar\Omega = \sqrt{\frac{\int |U|^2\,\Omega^2\,\mathrm{d}\Omega}{\int |U|^2\,\mathrm{d}\Omega}} = \sqrt{\frac{\pi T\int \dfrac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2(\pi T\Omega/2)}\,\mathrm{d}\Omega}{4}} = \sqrt{\frac{2}{\pi^2T^2}\int \frac{x^2}{\mathrm{ch}^2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1{,}82}{\pi T}$$

имеем $L = 0{,}86T\tau/k_{\omega\omega}$. Это расстояние растёт с увеличением длительности импульса (т. е. уменьшением ширины его спектра).

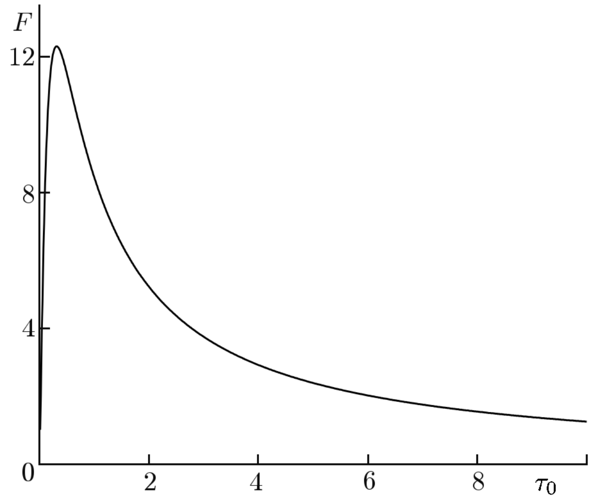

Рис. 1. Зависимость $F(\tau_0)$

Если условие (13) выполняется для солитонов света в волокнах [1–3, 7] при электронной нелинейности, то условие (14) справедливо для гравитационных волн на поверхности жидкости [8–14]. Рассмотрим изменение несущей частоты в этом случае. При распространении таких волн имеет место поверхностное попутное течение со скоростью $\mathbf{v}$, благодаря которому меняется и скорость их распространения. Связь этой скорости с амплитудой волн можно определить, сравнивая дисперсионное уравнение для волн на поверхности жидкости [15]

$$v_{\rm ph}^2 = \frac{g}{k_0}\,(1 + k_0^2\tilde{a}^2), \tag{15}$$

где $\tilde{a}$ — амплитуда волны, g — ускорение свободного падения, с дисперсионным уравнением для волн на воде с течением со скоростью $\mathbf{v}$ [16]:

$$(\omega - \mathbf{k}_0\mathbf{v})^2 = |k_0|\,g. \tag{16}$$

Переписывая равенства (15) и (16) для малых, но конечных амплитуд в виде

$$\omega = \sqrt{gk_0}\left(1 + \frac{k_0^2\tilde{a}^2}{2}\right)$$

и

$$\omega = \sqrt{k_0 g}\,(1 + v\,\sqrt{k_0/g}), \tag{17}$$

получим следующую связь между скоростью наводимого течения и амплитудой волны с учётом их малой нелинейности:

$$v = \sqrt{gk_0}\,\frac{k_0\tilde{a}^2}{2} = \omega\,\frac{k_0\tilde{a}^2}{2}\,.$$

В этом случае в качестве нелинейного параметра можно взять скорость этого течения v и параболическое уравнение для амплитуды огибающей будет иметь вид

$$i\,\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\,\frac{\partial^2 a}{\partial\xi^2} + \frac{2k_0^2 v}{\omega_0}\,a = 0. \tag{18}$$

Время установления течения может быть связано с вязкостью жидкости. Согласно [4] во́лны на поверхности затухают за характерное время

$$\tau = \frac{1}{2k_0^2 v_{\rm k}}\,, \tag{19}$$

где $v_{\rm k}$ — кинематическая вязкость. Предположим теперь, что скорость имеет время установления τ, т. е. описывается уравнением

$$\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{\omega_0 k_0}{2\tau}\,|\psi|^2. \tag{20}$$

Этому времени затухания соответствует длина затухания

$$L_{\rm d} = v_{\rm gr}\tau = \sqrt{g}\,/(2k_0^{5/2}v_{\rm k}).$$

Относительное изменение спектра $\Delta\bar{\Omega} = L_{\rm d}\bar{\Omega}_z/\bar{\Omega}$ на длине затухания $L_{\rm d}$ равно

$$\Delta\bar{\Omega} = \frac{L_{\rm d}\bar{\Omega}_z}{\bar{\Omega}} \approx \frac{2{,}30}{\omega_0 T}\,.$$

Это смещение мало даже для коротких импульсов. Эффект может быть увеличен при наличии какого-либо механизма усиления волн, например ветра [17].

Таким образом, в работе показано, что знак смещения частоты, имеющего место при распространении солитонов огибающей в среде с релаксирующей кубичной нелинейностью, определяется знаком коэффициента нелинейности. Для гравитационных волн на воде это смещение (в сторону бо́льших частот) существенно только на тех дистанциях, на которых становится значительным затухание этих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The Supercontinuum Laser Source / Ed. R. R. Alfano. New York: Springer, 2006. 537 p.
2. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.
3. Kivshar Y. S., Agraval G. P. Optical solitons: From fiber to photonic cristals. San Diego: Academic press, 2003. P. 540.
4. Gildenburg V. B., Kim A. V., Krupnov V. A., et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1993. V. 21, No. 1. P. 34.
5. Sergeev A., Vanin E., Anderson D., et al. // Opt. Commun. 1993. V. 101, No. 3–4. P. 219.
6. Ванин Е. И., Смирнов А. И. // Журн. экспер. теор. физ. 1996. Т. 110, вып. 3(9). С. 1 136.
7. Gordon J. P. // Opt. Lett. 1986. V. 11, No. 10. P. 662.
8. Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 504 p.
9. Захаров В. Е. // Прикладная механика и техн. физ. 1968. № 2. С. 86.
10. Юен Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.
11. Segur H., Henderson D., Carter J., et al. // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 229.
12. Thrulsen K., Dysthe K. B. // Wave motion. 1996. V. 24, No. 3. P. 281.
13. Lake B. M., Yuen H. C., Rundgaldier H., Ferguson W. E. // J. Fluid Mech. 1977. V. 83, No. 1. P. 49.
14. Lake B. M., Yuen H. C. // J. Fluid Mech. 1977. V. 83, No. 1. P. 75.
15. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
16. Басович А. Я., Таланов В. И. // Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13, № 7. С. 766.
17. Leblanc S. // Phys. Fluids. 2007. V. 19. Art. no. 101705.

Поступила в редакцию 30 мая 2016 г.; принята в печать 5 декабря 2016 г.

MEAN-FREQUENCY SHIFT OF THE ENVELOPE SOLITONS IN THE MEDIA WITH CUBIC RELAXING NONLINEARITIES

S. N. Vlasov

We study the mean-frequency variation of the envelope solitons propagating in nonlinear media with relaxing cubic nonlinearities. It is shown that the mean frequency during the propagation can not only decrease in the case of the positive nonlinearity coefficient, which was previously known, but also increase in the case of the negative nonlinearity coefficient, which is observed for the gravity waves on a liquid surface.