

УДК 535.36

## ЭФФЕКТЫ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В СРЕДАХ С СИЛЬНО ВЫТЯНУТЫМИ ИНДИКАТРИСАМИ

Я. А. Илюшин\*

Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассмотрены слабая локализация и гало обратного рассеяния в средах с сильно вытянутыми индикатрисами рассеяния. Ранее известная теория обобщена для случая неравномерного сечения обратного рассеяния в задней полусфере. Получены асимптотические выражения для интенсивности обратного рассеяния в малоугловом диффузионном приближении.

### ВВЕДЕНИЕ

Когерентное усиление обратного рассеяния (слабая локализация) является одним из основных когерентных волновых эффектов, характерных для случайных сред самой различной природы [1–4]. В средах, состоящих из частиц, не малых по сравнению с длиной волны, обычно преобладает рассеяние на небольшие углы. Слабая локализация в таких средах имеет специфические особенности, проявляющиеся в периферических областях (крыльях) пика обратного рассеяния [5–7].

Другим эффектом обратного рассеяния, характерным для сред с сильно вытянутыми вперёд индикатрисами рассеяния, является так называемое гало обратного рассеяния [8]. Динамическое гало обратного рассеяния регистрировалось в экспериментах по лидарному зондированию тонких облачных слоёв [9]. В геометрически и оптически толстых средах этот эффект до сих пор экспериментально не наблюдался, однако в ряде работ [10–13] теоретически предсказано его проявление при более или менее определённых условиях.

Мотивацией к данному исследованию является достижение более глубокого понимания формирования различных частей пика когерентного обратного рассеяния. Для этого анализируются и обобщаются асимптотические закономерности слабой локализации и гало обратного рассеяния, установленные ранее.

### 1. КОГЕРЕНТНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Эффект когерентного усиления обратного рассеяния (слабой локализации) в случайных средах впервые был теоретически предсказан в работах [1, 2]. В дальнейшем, в работе [4], была предложена теория этого эффекта, применимая к средам с сильно вытянутыми индикатрисами в транспортном приближении.

Систематическое исследование слабой локализации в таких средах было проведено Д. Б. Рогозиным. В работе [5] им было показано, что периферийные области (так называемые крылья) пика обратного рассеяния сформированы квазиоднократно обратно рассеянной компонентой излучения [3, 14, 15]. В работах [5–7] были получены различные асимптотические выражения для когерентно обратного рассеянного излучения при различных индикатрисах рассеяния. В работе [16] некоторые из этих приближённых решений проверены непосредственным численным расчётом. В работе [17] аналогичные приближённые решения получены для сред с систематическим градиентом коэффициента преломления.

\* ilyushin@phys.msu.ru

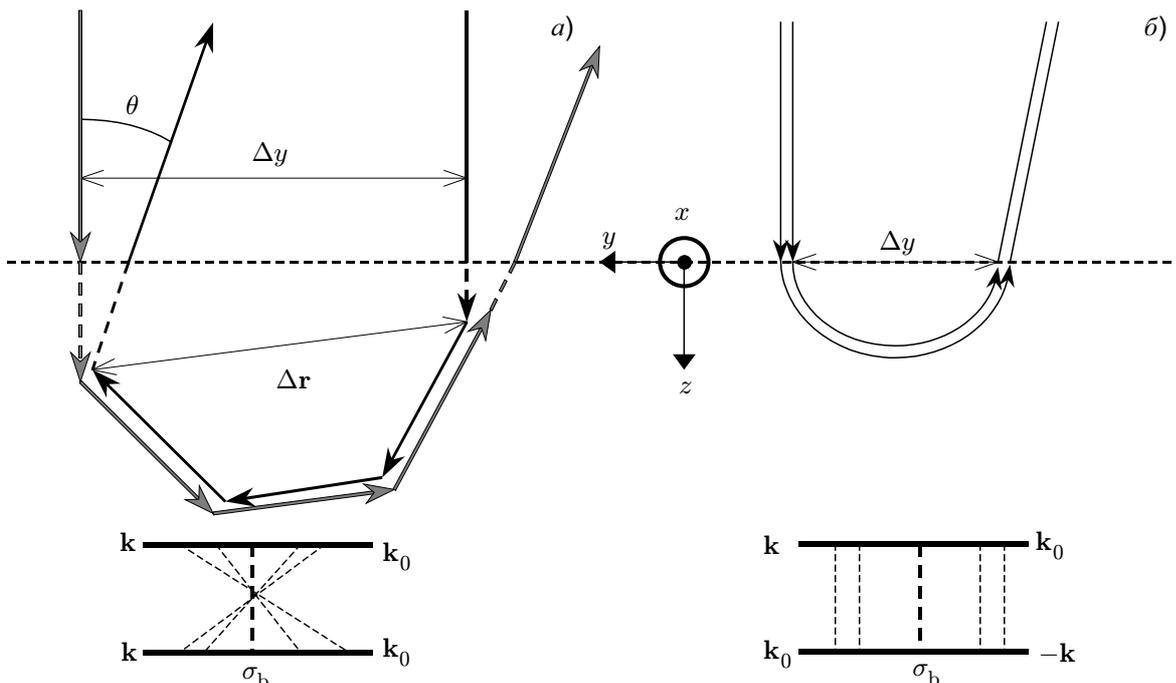


Рис. 1. Сведение задачи о слабой локализации к эквивалентной задаче теории переноса излучения. Эквивалентность циклической (а) и лестничной (б) диаграмм рассеяния

В приближении Тверского задача о слабой локализации может быть сведена к задаче для уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным источником (см. рис. 1). Без учёта поляризации излучения в силу принципа взаимности амплитуды рассеянного излучения, прошедшего по встречным траекториям циклической диаграммы (см. рис. 1а), равны друг другу. Таким образом, интенсивности рассеяния для циклической и лестничной диаграмм оказываются равны друг другу с точностью до фазового множителя, зависящего лишь от фазового угла рассеяния. Тем самым расчёт циклических диаграмм рассеяния сводится к расчёту эквивалентных им лестничных диаграмм, что в ряде случаев оказывается значительно проще на практике. В работе [18] получены аналогичные соотношения между циклическими и лестничными диаграммами рассеяния с учётом поляризации излучения.

Этот приближённый подход широко распространён и неоднократно обсуждался во многих работах (см., например, [4, 16] и цитированную там литературу). Полученное в его рамках асимптотическое выражение для интенсивности когерентно рассеянной компоненты в крыльях пика обратного рассеяния [5–7, 19] является отправной точкой данного исследования. В наших обозначениях это выражение записывается в виде

$$J_c = I_0 \int G(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{r}', \mathbf{n}') \frac{\partial \sigma(n', n'')}{\partial \Omega} G(\mathbf{r}', \mathbf{n}'', \mathbf{r}, \mathbf{n}) \exp(ik\mathbf{n}_\perp \mathbf{r}) d^2r d^3r' d^2n'_\perp d^2n''_\perp, \tag{1}$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего излучения,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' = (x', y', z')$  — координаты точки сильного (обратного) рассеяния,  $\mathbf{r}'_\perp = (x', y', 0)$  — тангенциальная компонента соответствующего радиус-вектора,  $\sigma$  — сечение рассеяния единицы объёма среды (объёмный коэффициент рассеяния),  $\partial \sigma(n', n'') / \partial \Omega$  — дифференциальное сечение рассеяния единицы объёма среды,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$  и  $\mathbf{n}_0 = (n_{0x}, n_{0y}, n_{0z}) = (0, 0, 1)$  — координаты и направление входа излучения в среду через граничную поверхность среды соответственно,  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  — координаты точки выхода излучения через поверхность среды,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \approx (\theta \cos \phi, \theta \sin \phi, -1)$  — направление регистрации рассе-

янного излучения,  $\theta$  – малый фазовый угол (угол между направлениями наблюдения и обратного рассеяния),  $\mathbf{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z)$  – направление падения излучения на рассеивающий объём при однократном обратном (сильном) рассеянии,  $\mathbf{n}'' = (n''_x, n''_y, n''_z)$  – направление однократного обратного рассеяния,  $\mathbf{n}'_{\perp} = (n'_x, n'_y, 0)$  и  $\mathbf{n}''_{\perp} = (n''_x, n''_y, 0)$  – тангенциальные компоненты единичных векторов  $\mathbf{n}'$  и  $\mathbf{n}''$  соответственно,  $\mathbf{n}_{\perp} = (n_x, n_y, 0)$ ,  $k$  – волновое число в вакууме,  $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{r}', \mathbf{n}')$  – функция Грина многократного малоуглового рассеяния (см. рис. 2). Здесь и далее полное ( $\sigma$ ) и дифференциальное ( $\partial\sigma/\partial\Omega$ ) сечения рассеяния и относятся к единице объёма среды.

Используя приближённые аналитические выражения для функции Грина  $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{r}', \mathbf{n}')$ , можно оценить интенсивность излучения в крыльях пика когерентного обратного рассеяния. В цитированных выше работах использовались асимптотические решения уравнения переноса излучения, найденные методом характеристик в малоугловом приближении [20], и интенсивность обратного рассеяния оценивалась для постоянно дифференциального сечения обратного рассеяния

$$\partial\sigma(\mathbf{n}', \mathbf{n}'')/\partial\Omega \approx \partial\sigma(\mathbf{n}', -\mathbf{n}')/\partial\Omega \equiv \sigma_b = \text{const.}$$

Однако в формуле (1) для интенсивности обратного рассеяния учтена зависимость дифференциального сечения обратного рассеяния от угла рассеяния. При этом в реальных средах приближение  $\sigma_b = \text{const}$  не всегда справедливо. В качестве примера неоднородного сечения обратного рассеяния  $\sigma_b$  на рис. 3 показаны индикатрисы рассеяния сферических латексных частиц (показатель преломления  $m = 1,59$ ) в воде ( $m = 1,33$ ). В работах [6, 7] из эвристических соображений за эффективное значение  $\sigma_b$  принималось дифференциальное сечение обратного рассеяния, усреднённое по углам рассеяния  $\theta_s$  в области  $\pi - \theta_s \leq \leq \lambda/a$ , где  $\lambda$  и  $a$  – длина волны и типичный размер рассеивателя соответственно.

Целью данной работы является расчёт интенсивности обратно рассеянного излучения при рассмотрении эффектов слабой локализации и гало обратного рассеяния с учётом неоднородности дифференциального сечения обратного рассеяния при малых фазовых углах и, в частности, уточнение формул усреднения для эффективного сечения  $\sigma_b$ .

Одним из наиболее известных приближённых выражений для функции Грина уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным источником в малоугловом приближении является распределение Ферми–Эйджеса, полученное в диффузионном приближении для интеграла рассеяния [21–24]. Это распределение является распределением Гаусса по многим координатам и

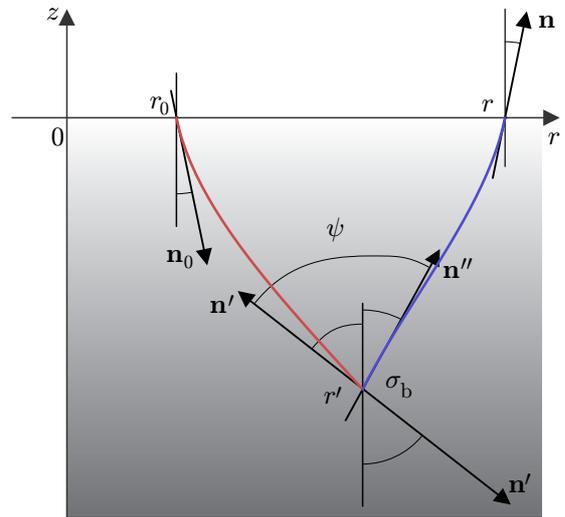


Рис. 2. Схематическая диаграмма квазиоднократного обратного рассеяния (1)

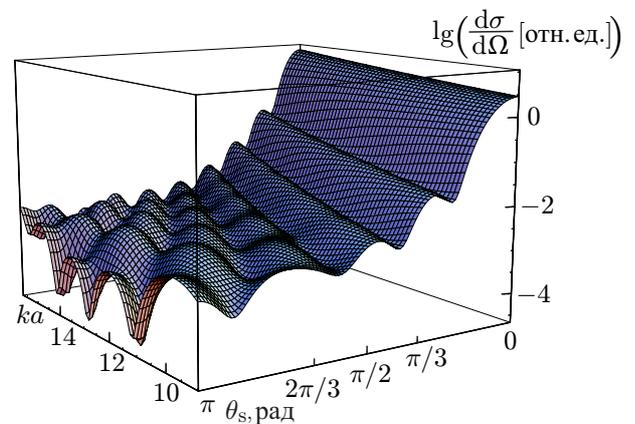


Рис. 3. Нормированные индикатрисы рассеяния латексных частиц ( $m = 1,59$ ) в воде ( $m = 1,33$ ) в зависимости от угла рассеяния  $\theta_s$  и размерного параметра частиц  $ka$

углам. Некоторые другие решения уравнения переноса излучения в малоугловом приближении также были сведены к гауссовым распределениям [25–27].

Функция Грина уравнения переноса излучения при многократном малоугловом рассеянии  $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{r}', \mathbf{n}')$  для консервативной среды в форме распределения Ферми–Эйджеса записывается в виде [21]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{r}', \mathbf{n}') = \frac{1}{\pi^2 D^2(|z - z'|)} \times \exp \left[ - \frac{(\mathbf{n}'_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp})^2 A_3 - 2(\mathbf{n}'_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp})(\mathbf{r}'_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp} - |z - z'| \mathbf{n}_{\perp}) A_2 + (\mathbf{r}'_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp} |z - z'|)^2 A_1}{D^2(|z - z'|)} \right], \quad (2)$$

$$D^2(z) = A_3(z)A_1(z) - A_2^2(z), \quad (3)$$

$$A_i(z) = \int_0^z (z - \zeta)^{i-1} \sigma \langle \theta_s^2 \rangle d\zeta, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

В этой работе всюду будем считать рассеивающую среду однородной:  $\sigma(\mathbf{r}') = \text{const}$ . Следуя работам [7, 28, 29], будем также полагать, что в малоугловом приближении средний квадрат  $\langle \theta_s^2 \rangle$  угла рассеяния ограничен. Для этого требуется, чтобы дифференциальное сечение рассеяния убывало с ростом угла рассеяния быстрее его четвёртой степени:

$$\partial \sigma(\mathbf{n}', \mathbf{n}'') / \partial \Omega = o(\theta_s^{-4}), \quad (5)$$

где  $\cos \theta_s = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}''$ . Введём фазовый угол однократного рассеяния  $\psi$  по формуле  $\cos \psi = -\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}''$ . Подынтегральное выражение в (1) на самом деле является распределением Гаусса по всем переменным интегрирования, кроме глубины (однократного) обратного рассеяния  $z'$  и фазового угла однократного рассеяния  $\psi$ . Интеграл от распределения Гаусса по всему пространству переменных интегрирования выражается с помощью известной формулы

$$\int \exp(-A_{ij} x_i x_j + B_i x_i) d^n x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A_{ij}}} \exp \left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{A}_{ij}^{-1} \mathbf{B}}{4} \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрица и вектор коэффициентов квадратичной и линейной форм в показателе экспоненты соответственно, индекс T означает транспонирование,  $\det A_{ij}$  — определитель матрицы  $\mathbf{A}$ . Применим формулу (6) к интегрированию выражения (1) по всем переменным, кроме  $z'$  и  $\psi$ . Для изотропного по азимуту обратного рассеяния  $\sigma_b(n', n'') = \sigma_b(|\psi|)$  это приводит к выражению

$$J_c(\theta) = \frac{I_0}{14\pi\sigma} \int \sigma_b(\Psi) \exp \left[ - \frac{1}{24} Q^2 \xi^3 + \frac{1}{2} i Q \Psi \cos(\phi) \xi - \frac{13\Psi^2}{14\xi} \right] \frac{d\xi}{\xi} \Psi d\Psi d\phi = \frac{I_0}{7\sigma} \int \sigma_b(\Psi) \exp \left( - \frac{1}{24} Q^2 \xi^3 - \frac{13\Psi^2}{14\xi} \right) J_0 \left( \frac{Q\xi\Psi}{2} \right) \frac{d\xi}{\xi} \Psi d\Psi, \quad (7)$$

где введены безразмерные нормированные переменные  $\Psi = |\psi| / \sqrt{\langle \theta_s^2 \rangle}$ ,  $\xi = z'/l$ ,  $Q = k\theta l \sqrt{\langle \theta_s^2 \rangle}$ ,  $\sigma_b(\Psi) = \partial \sigma(\Psi) / \partial \Omega$ ,  $l = 1/\sigma$  — длина свободного пробега в рассеивающей среде,  $J_0(Q\xi\Psi/2)$  — функция Бесселя I-го рода 0-го порядка.

В частности, считая в формуле (1) сечение обратного рассеяния постоянным ( $\sigma_b(n', n'') =$

= const), применим формулу (6) для интегрирования по всем переменным, кроме глубины  $z$ , и получим известный результат [8]

$$J_c(q) = \frac{I_0 \sigma_b}{13\sigma} \int \exp\left(-\frac{17}{156} Q^2 \xi^3\right) d\xi =$$

$$= I_0 \frac{3 \sqrt[3]{3/34} \sigma_b \Gamma(7/3)}{2 \cdot 13^{2/3} Q^{2/3} \sigma} = 0,1438 I_0 \frac{\sigma_b}{\sigma} Q^{-2/3}, \quad (8)$$

где  $\Gamma(p)$  — гамма-функция,  $q = k\theta$ .

Графики весовых функций для  $\sigma_b(|\psi|)$  в интеграле (7) показаны на рис. 4. Эти функции значительно отличны от нуля при  $\Psi \leq 1$ , что в основном согласуется с эвристической оценкой существенной области углов рассеяния [6, 7].

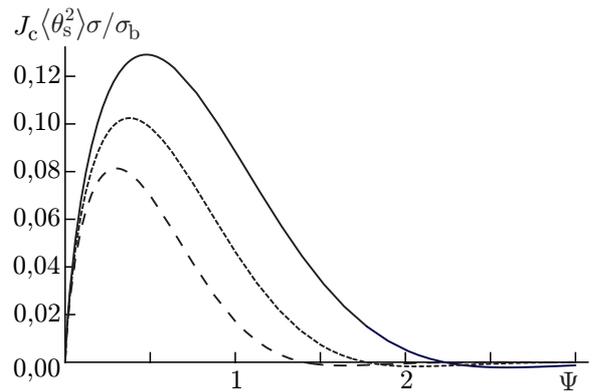


Рис. 4. Весовые функции для сечения обратного рассеяния в эффекте слабой локализации. Сплошная, пунктирная и штриховая кривые соответствуют значениям  $Q = 1; 2$  и  $4$

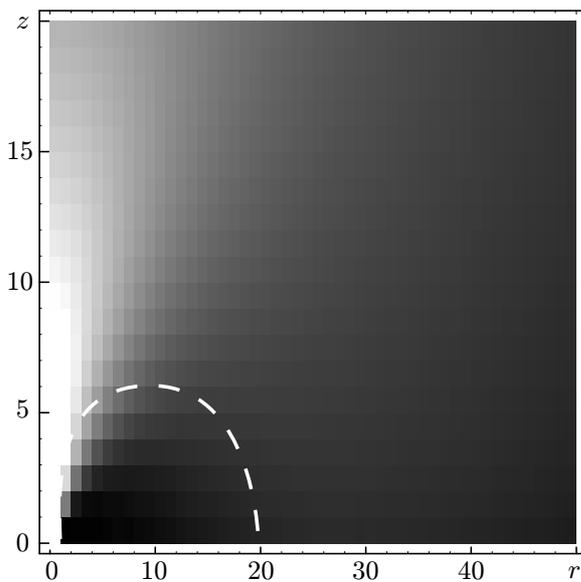


Рис. 5. Распределение актинического потока излучения  $\Phi$  узкого пучка в рассеивающей среде в плоскости оси пучка (гауссова индикатриса рассеяния  $g \approx 0,975$ ). Расчёт проводился путём статистического моделирования. Гало обратного рассеяния проявляется в виде кольцевого максимума на расстоянии порядка транспортной длины  $r \approx l_{tr}$  от оси пучка. Штриховая кривая показывает типичную траекторию рассеянных фотонов, формирующих гало. Чёрный цвет отвечает нулевому значению, белый — максимальному (в логарифмическом масштабе). Величины  $r$  и  $z$  измеряются в безразмерных единицах оптической толщины

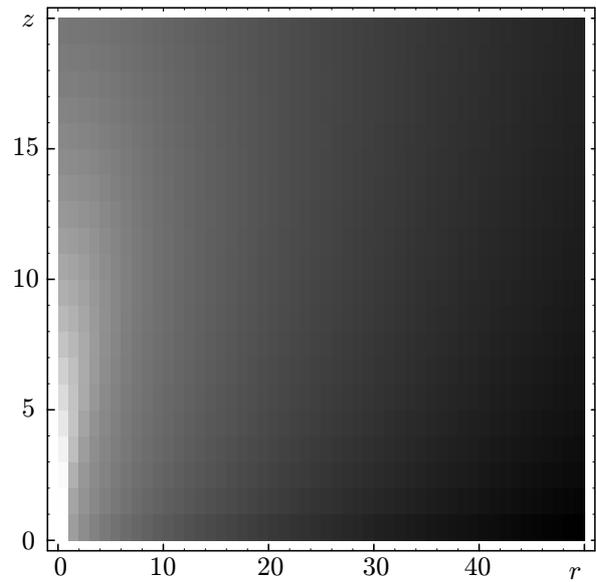


Рис. 6. Распределение актинического потока излучения  $\Phi$  узкого пучка в рассеивающей среде в плоскости оси пучка. Расчёт проводился путём статистического моделирования (индикатриса Хензи—Гринштейна). Эффект гало обратного рассеяния отсутствует. Чёрный цвет отвечает нулевому значению, белый — максимальному (в логарифмическом масштабе). Величины  $r$  и  $z$  измеряются в безразмерных единицах оптической толщины

## 2. ГАЛО ОБРАТНОГО РАССЕЙЯНИЯ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Так называемое гало обратного рассеяния, возникающее в результате многих последовательных рассеяний на малые углы (см. рис. 5 и 6), многократно обсуждалось ранее в работах [8, 10–13]. Количественный критерий проявления этого эффекта для постоянного сечения обратного рассеяния  $\sigma_b = \text{const}$  был получен в работе [8]. Здесь будут проведены оценки характеристик гало обратного рассеяния для неравномерного сечения рассеяния в задней полусфере углов.

Пусть коллимированный пучок излучения с гауссовым распределением интенсивности по его поперечному сечению  $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0) = I_0 \delta(\mathbf{n}_0 - \hat{\mathbf{z}}) \exp[-r_0^2/(2\rho^2)]$ , где  $\delta(\mathbf{n}_0 - \hat{\mathbf{z}})$  — дельта-функция,  $\hat{\mathbf{z}}$  — орт оси  $z$ ,  $\rho$  — эффективный радиус сечения светового пучка, падает на плоскую поверхность границы полубесконечной рассеивающей среды. Интенсивность обратного рассеянного излучения вдоль оси пучка даётся формулой

$$J(0, -\hat{\mathbf{z}}) = I_0 \int \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\rho_0^2}\right) G(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{r}', \mathbf{n}') \frac{\partial \sigma(n', n'')}{\partial \Omega} G(\mathbf{r}', \mathbf{n}'', \mathbf{0}, -\hat{\mathbf{z}}) d^2\mathbf{r}_0 d^3\mathbf{r}' d^2\mathbf{n}'_⊥ d^2\mathbf{n}''_⊥. \quad (9)$$

Применяя (6) к интегрированию по всем переменным, кроме  $z'$  и фазового угла  $\psi$ , получим выражение для интенсивности обратного рассеяния:

$$J(0, -\hat{\mathbf{z}}) = I_0 \int \frac{12\rho_0^2 \sigma_b(\Psi)}{7 \sqrt[3]{\langle \theta_s^2 \rangle} \xi (\xi^3 + 12\rho_0^2) \sigma} \exp\left(-\frac{17\xi^3 + 78\rho_0^2}{7\xi^4 + 84\rho_0^2 \xi} \Psi^2\right) \Psi d\Psi d\xi, \quad (10)$$

где  $\Psi = \psi / \sqrt[3]{\langle \theta_s^2 \rangle}$ ,  $\xi = z' \sqrt[3]{\langle \theta_s^2 \rangle} / l$  — безразмерные переменные интегрирования,  $\rho_0 = \rho / l$  — нормированный радиус (полуширина) поперечного сечения падающего пучка. Сравнивая интенсивность обратного рассеяния на оси пучка (10) с интенсивностью обратного рассеяния на его периферии [8],

$$J(l_{tr}, -\hat{\mathbf{z}}) = 2\pi\rho^2 I_0 \frac{3}{4\pi l_{tr}^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\right), \quad (11)$$

где  $\alpha \approx 3,4$ ,  $l_{tr} = l / (1 - g)$  — транспортная длина,  $g = \langle \cos \theta_s \rangle$  — параметр асимметрии рассеяния (средний косинус угла рассеяния) [30], получаем обобщённый количественный критерий проявления эффекта гало обратного рассеяния при неравномерном сечении обратного рассеяния ( $\sigma_b \neq \text{const}$ ):

$$J(0, -\hat{\mathbf{z}}) \leq J(l_{tr}, -\hat{\mathbf{z}}). \quad (12)$$

Весовые функции для  $\sigma_b(|\psi|)$  в интеграле (10) показаны на рис. 7. Обратим внимание, что закон подобия отличен от закона подобия, характерного для эффекта слабой локализации.

Для равномерного сечения обратного рассеяния  $\sigma_b = \text{const}$  интегрирование (10) по формуле (6) по всем переменным, кроме  $z'$ , приводит к следующему выражению для интенсивности:

$$J(0, -\hat{\mathbf{z}}) = \frac{I_0 \sigma_b}{\sigma} \int_0^\infty \frac{6r_0^2 dz'}{17 \langle \theta_s^2 \rangle z'^3 + 78l\rho^2} = \frac{2 \sqrt[3]{2} \pi I_0 \sigma_b}{3 \sqrt[3]{3} 13^{2/3} \sqrt[3]{17} \sigma} \sqrt[3]{\frac{\rho^2}{l^2 \langle \theta_s^2 \rangle}} \approx \frac{0,15456 I_0 \sigma_b}{\sigma} \sqrt[3]{\frac{\rho^2}{l^2 \langle \theta_s^2 \rangle}}. \quad (13)$$

Учитывая, что  $g \approx 1 - \langle \theta_s^2 \rangle / 2$ , сравнение (13) с (11) для случая  $\sigma_b = \text{const}$  приводит к ранее известному результату, установленному в работе [8]:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} < \frac{(1 - g)^{7/3} (\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)}{\sqrt[3]{3} \pi (q_0 l)^{4/3} \sqrt{\alpha^2 + 1} \Gamma(4/3)} \propto (1 - g)^{7/3}, \quad (14)$$

где  $q_0 \approx 2\pi\rho^{-1}$ ,  $q_0 l \approx 1$  — безразмерное произведение, характеризующее соотношение ширины пучка с длиной свободного пробега излучения в среде.

Для качественного исследования влияния неоднородности дифференциального сечения обратного рассеяния в задней полусфере направлений рассеяния достаточно воспользоваться формулой (14) с усреднённым в соответствии с (10) значением  $\sigma_b$ . На рис. 8 приведены зависимости от длины волны нормированных дифференциальных сечений рассеяния латексных сфер ( $m = 1,59$ ) в воде ( $m = 1,33$ ) [8]. Критическое значение нормированного дифференциального сечения (правая часть (14)) показано на графике штриховой кривой. Оценка с использованием неусреднённого значения  $\sigma_b$  может привести к ошибочному выводу о возможности проявления эффекта гало обратного рассеяния в монодисперсной суспензии латексных сфер в воде для определённых значений длины волны. Усреднённое значение (сплошная кривая на рис. 8), однако, оказывается выше критического. Это указывает на невозможность проявления эффекта гало обратного рассеяния, что находится в хорошем согласии с опытными данными. В полидисперсных средах [31] резкие минимумы сечения обратного рассеяния отсутствуют, и проявление данного эффекта в этих средах оказывается ещё менее вероятным. В средах пылевых агрегатов [32, 33] сечение обратного рассеяния также оказывается недостаточно малым для проявления эффекта гало обратного рассеяния. Возможно, экспериментального наблюдения гало обратного рассеяния следует ожидать в искусственных средах со специально малыми сечениями обратного рассеяния [34, 35].

### 3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ВЫВОДЫ

В данной работе проанализированы эффекты обратного рассеяния в средах с сильно вытянутыми вперёд индикатрисами рассеяния. Исследовано влияние неравномерности сечения однократного рассеяния вблизи обратного направления. Получены асимптотические выражения для интенсивности обратного рассеянного излучения для быстро убывающих (как  $o(\theta_s^{-4})$ ) малугловых индикатрис.

Недостаточно быстро убывающие в указанном смысле индикатрисы требуют дополнительного

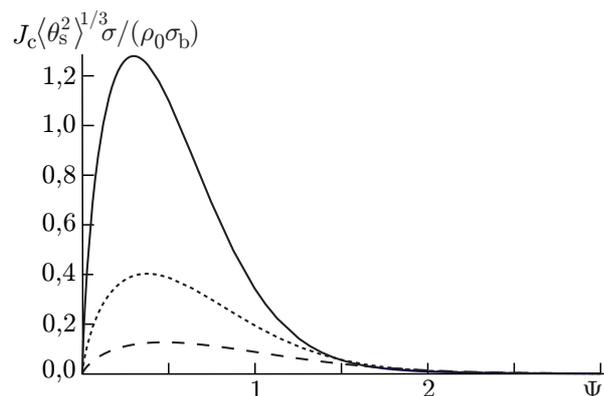
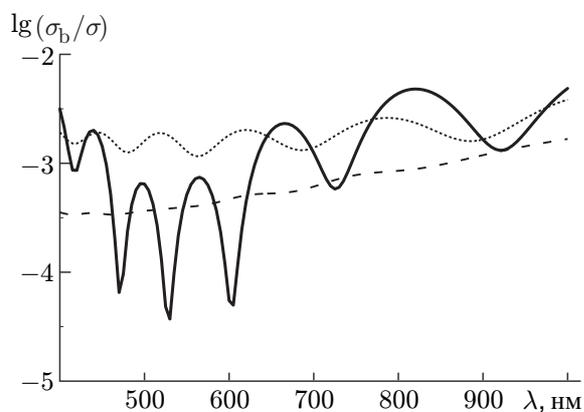


Рис. 7. Весовые функции сечения обратного рассеяния при рассмотрении эффекта гало обратного рассеяния. Сплошная, пунктирная и штриховая кривая соответствуют значениям  $\rho_0 = 0,25$ ;  $0,5$  и  $1,0$

Рис. 8. Нормированные дифференциальные сечения  $\sigma_b/\sigma$  обратного рассеяния суспензии латексных сфер (диаметр  $d = 1000$  нм,  $m = 1,59$ ) в воде ( $m = 1,33$ ) в зависимости от длины волны  $\lambda$ . Сплошная жирная кривая соответствует неусреднённому сечению обратного рассеяния  $\sigma_b$ , пунктирная кривая — усреднению с нормированной весовой функцией интеграла (10),  $\rho = 2\pi l$ , штриховая — критическим значениям  $\sigma_b/\sigma$  согласно формуле (8)

исследования. В работах [5, 6] получена следующая оценка когерентно рассеянной компоненты интенсивности обратного рассеяния:

$$J_c(q) = \frac{I_0 \sigma_b}{l \sigma} \int_0^\infty dz \exp(-2z/l) \left\{ \exp \left[ 2 \int_0^z d(z'/l) \chi(qz') \right] - 1 \right\}, \quad (15)$$

где

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty 2\pi\theta d\theta J_0(\omega\theta) \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta). \quad (16)$$

В работе [19] этот результат обобщён для сред с регулярными градиентами коэффициента преломления и получены соответствующие асимптотические выражения для когерентно рассеянной компоненты интенсивности. Подстановкой

$$\chi(\omega) \approx 1 - \omega^2 \langle \theta_s^2 \rangle / 4 \quad (17)$$

формула (15) сводится к малоугловому диффузионному приближению (8). Когда средний квадрат угла рассеяния в малоугловом приближении конечен ( $\langle \theta_s^2 \rangle < \infty$ ), квадратичное приближение характеристической функции  $\chi(\omega)$  (17) соответствует её дифференциальной (тейлоровской) аппроксимации при  $\omega = 0$ . Дифференциальные свойства характеристической функции  $\chi(\omega)$  в нуле определяются поведением сечения рассеяния при больших углах рассеяния  $\theta_s$ , при которых малоугловое приближение нарушается. Тем не менее в работе [7] получены асимптотические выражения для нескольких индикатрис рассеяния, в том числе для убывающих медленнее четвертой степени угла  $\theta_s$ . В рамках малоуглового приближения средний квадрат угла рассеяния оказывается бесконечным ( $\langle \theta_s^2 \rangle = \infty$ ). Однако в реальности угол рассеяния вместе с его средним квадратом ограничен на сфере направлений рассеяния  $0 \leq \theta_s \leq \pi$ , и для больших (близких к единице) значений параметра асимметрии рассеяния  $g$  средний квадрат угла рассеяния может быть эффективно определён по формуле

$$\langle \theta_s^2 \rangle \approx 2(1 - g). \quad (18)$$

По этой причине асимптотические решения, полученные с помощью тейлоровских аппроксимаций характеристических функций, требуют тщательной проверки. Исследование этого вопроса является темой отдельной работы.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-02-05476 и 15-45-03266).

Автор благодарит администрацию Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ за предоставленный доступ к вычислительным ресурсам параллельных суперкомпьютерных кластерных систем «Чебышев» и «Ломоносов» [36]. Автор признателен рецензенту статьи за конструктивные замечания и предложения по доработке материала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Watson K. M. // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 688.
2. Барабаненков Ю. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 1 С. 88.
3. Tsang L., Ishimaru A. // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. V. 1, No. 8. P. 836.
4. Akkermans E., Wolf P. E., Maynard R. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56, No. 14. P. 1471.

5. Rogozkin D. B. // *Laser Physics*. 1995. V. 5, No. 4. P. 787.
6. Marinyuk V. V., Rogozkin D. B. // *Laser Physics*. 2009. V. 19, No. 2. P. 176.
7. Marinyuk V. V., Rogozkin D. B. // *Phys. Rev. E*. 2011. V. 83. Art. no. 066604.
8. Pyushin Ya. A. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2012. V. 29, No. 9. P. 1986.
9. Prigarin S. M., Aleshina T. V. // *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015. V. 30, No. 4. P. 251.
10. Lewis A. F., Bell M. S., Wagner R. E., et al. // *Laser Physics*. 2003. V. 13, No. 2. P. 207.
11. Campbell S. D., O'Connell A. K., Rutherford G. H., Grobe R. // *Opt. Lett.* 2007. V. 32, No. 5. P. 560.
12. Kim A. D., Moscoso M. // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, No. 1. P. 74.
13. Phillips K., Xu M., Gayen S., Alfano R. // *Opt. Express*. 2005. V. 13, No. 20. P. 7954.
14. Pyushin Y. A., Budak V. P. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2011. V. 28, No. 2. P. 76.
15. Pyushin Y. A., Budak V. P. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2011. V. 28, No. 7. P. 1358.
16. Pyushin Ya. A. // *J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2012. V. 113, No. 5. P. 348.
17. Pyushin Ya. A. // *J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2013. V. 117. P. 133.
18. Mishchenko M. I. // *Phys. Rev. B*. 1991. V. 44, 22. P. 12597.
19. Pyushin Ya. A. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2013. V. 30, No. 7. P. 1305.
20. Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. // *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*. 1969. Т. 5, № 7. С. 672.
21. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И. *Флуктуации пробегов заряженных частиц*. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
22. Euges L. // *Phys. Rev.* 1948. V. 74. P. 1534.
23. Brahme A., Lax I., Andreo P. // *Acta Radiologica. Oncology Radiation Therapy Physics and Biology*. 1981. V. 20, No. 2. P. 147.
24. Bruinvis I. A. D., Mathol W. A. F., Andreo P. // *Physics in Medicine and Biology*. 1989. V. 34, No. 4. P. 491.
25. Arnush D. // *J. Opt. Soc. Am.* 1972. V. 62, No. 9. P. 1109.
26. Ito S. // *Appl. Opt.* 1981. V. 20, No. 15. P. 2706.
27. Stotts L. B. // *J. Opt. Soc. Am.* 1977. V. 67, No. 6. P. 815.
28. Alexandrov M. D., Remizovich V. S., Rogozkin D. B. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 1993. V. 10. P. 2602.
29. van de Hulst H. C., Kattawar G. W. // *Appl. Opt.* 1994. V. 33. P. 5820.
30. Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*. Т. 2. М.: Мир, 1981. 280 с.
31. Дейрменджан Д. *Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами*. М.: Мир, 1971. 300 с.
32. Skorov Yu. V., Keller H. U., Rodin A. V. // *Planetary and Space Science*. 2010. V. 58, No. 14–15. P. 1802.
33. Skorov Yu. V., Keller H. U., Rodin A. V. // *Planetary and Space Science*. 2008. V. 56., No. 5. P. 660.
34. Alu A., Engheta N. // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 72. Art. no. 016623.
35. Naghparast M., Abrishamian M. S. // *Appl. Phys. A*. 2011. V. 103, No. 3. P. 587.
36. Воеводин Вл. В., Жуматий С. А., Соболев С. И. и др. // *Открытые системы*. 2012. № 7. С. 36.

Поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.; принята в печать 25 августа 2016 г.

**BACKSCATTERING EFFECTS IN MEDIA WITH STRONGLY STRETCHED  
SCATTERING PATTERNS***Ya. A. Pyushin*

We consider weak localization and the backscattering halo in media with strongly stretched scattering patterns. The earlier theory is generalized to the case of inhomogeneous backscattering cross section in the rear hemisphere. Asymptotic formulas for the backscattering intensities are obtained within the low-angle diffusion approximation.