

УДК 535.361

О МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОФИЛЯ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*В. Л. Вебер**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрен вопрос о моделировании поля уклонов случайного профиля поверхности, представленного в виде суммы конечного числа синусоид со случайными фазами. Исследовано поведение функции корреляции уклонов при эквидистантном и неэквидистантном расположении узлов спектра модельного поля на оси частот. Предложен новый способ размещения узлов, основанный на выравнивании амплитуд спектральных компонент реального поля уклонов и обеспечивающий наибольшую близость корреляционных функций модельного и реального полей во всей области их определения. Использование этого способа позволяет существенно уменьшить число суммируемых гармоник при моделировании морского ветрового волнения. Исследована задача о флуктуациях надводной освещённости с использованием предложенного метода моделирования уклонов и в результате доказана эффективность его применения.

ВВЕДЕНИЕ

Статистическая оптика морской поверхности в настоящее время представляет собой самостоятельную и бурно развивающуюся область оптики моря. Она включает в себя ряд важных и интересных проблем, основной из которых является изучение статистических характеристик над- и подводных световых полей, созданных как естественными (Солнце, небосвод), так и искусственными (непрерывными и импульсными) источниками при наличии случайно-неровной границы раздела воздух—вода. С этой проблемой в непосредственной и тесной связи находится всегда актуальная задача диагностики параметров морского ветрового волнения оптическими методами, которая представляет собой совокупность обратных задач оптики морской поверхности. И, наконец, весьма важной и интересной научно-прикладной областью исследований в оптике моря является разработка методов оптического зондирования толщи моря и наблюдения подводных объектов через взволнованную границу раздела воздух—вода.

Разработанные к настоящему времени теоретические методы расчёта световых полей в море при наличии ветрового волнения на его поверхности в основном строятся на геометрооптическом описании распространения световых лучей и использовании результатов решения уравнения переноса излучения в рассеивающих средах. Эти методы, как правило, позволяют исследовать статистические моменты лишь первого и второго порядков, причём вычисление последних часто наталкивается, особенно при учёте эффектов двукратного прохождения излучения через морскую поверхность, на существенные и даже порой непреодолимые трудности. Это заставляет исследователей идти по пути упрощения или идеализации как моделей формирования световых полей (примером может служить известное линейное приближение), так и модели волнения на поверхности раздела (например, однолинзовая модель). Очевидно, однако, что результаты, полученные в рамках приближённых моделей, могут оказаться не вполне адекватными действительности и поэтому нуждаться в проверке.

В тех случаях, когда теоретическим путём не удаётся найти аналитические выражения для статистических характеристик в конкретной оптической задаче, результаты можно получить

* w.weber@ipfran.ru

многократным численным решением этой задачи для независимых реализаций воздействующих случайных процессов, построенных в соответствии с подходящей вероятностной моделью. При этом анализ задачи проводится с использованием корреляционных методов, которые применимы в тех моделях, в которых достаточно обеспечить лишь заданную корреляционную функцию случайного процесса, т. к. нормальные случайные векторы и процессы, играющие важную роль в приложениях, однозначно задаются матрицей корреляционных моментов.

Методы статистического моделирования (методы Монте-Карло) нашли широкое применение при решении теоретических и прикладных задач статистической оптики моря и отражены в серии монографий и статей [1–5]. В них разработана концепция описания влияния морского ветрового волнения на формирование оптических полей, и исследованы различные методы моделирования скалярных и векторных полей и процессов. Наиболее полно развит аппарат моделирования стационарных гауссовых процессов и однородных скалярных и векторных гауссовых полей на основе спектрального представления [3–5]. В основе этого метода лежит случайный розыгрыш реализаций границы раздела воздух–вода (возвышений, уклонов или кривизн), в котором используется представление морской поверхности в виде суммы конечного числа синусоид с различными пространственными частотами и амплитудами (детерминированными или случайными), и со случайными фазами. Именно такое представление (с детерминированными амплитудами спектральных составляющих) использовано, в частности, в работах [6, 7] при исследовании статистических характеристик (в том числе и моментов выше второго порядка) подводной освещённости, а также сигнала оптического лидара при зондировании верхнего слоя океана через взволнованную поверхность.

При моделировании одномерной морской поверхности, как правило, используется сумма большого числа гармоник (порядка 1 000 и более), что приводит к значительным затратам машинного времени при вычислении статистических моментов лидарного сигнала высокого порядка, необходимых, например, при анализе функции распределения вероятностей мощности сигнала.

В связи с этим возникает настоятельная необходимость в минимизации числа гармоник в спектре моделируемой морской поверхности при сохранении, разумеется, необходимой точности при решении различных задач оптики морской поверхности. Особо подчеркнём, что здесь возникает ряд важных и нетривиальных вопросов об оптимальном (в некотором смысле) разбиении частотной плоскости на участки и выборе оптимального (также в некотором смысле) положения дискретных спектральных компонент в пределах этих участков. Поиску ответов на эти вопросы и посвящена данная работа.

1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРОВ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЛНЕНИЯ

Рассмотрим ряд общих понятий, описывающих возвышения и уклоны взволнованной морской поверхности в рамках теории случайных пространственно-временных полей. Представим возвышения поверхности в виде суммы гармонических бегущих волн с независимыми фазами:

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \int \int_{\infty} d\dot{\zeta}(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)], \quad (1)$$

где $d\dot{\zeta}$ — комплексная амплитуда гармоники с волновым числом $\mathbf{k}$ и временной частотой ω_k , связанной с $\mathbf{k}$ дисперсионным соотношением $\omega_k = \sqrt{gk}$, $\mathbf{k} = \mathbf{x}_0 k_x + \mathbf{y}_0 k_y$, $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 x + \mathbf{y}_0 y$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ — орты декартовой системы координат (x, y) , $k = |\mathbf{k}|$ — пространственная частота, t — время, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения.

Пространственно-временная корреляционная функция возвышений определяется выражением

$$M_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1, t_1) \zeta(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \langle d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_1) d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_2) \rangle \times \right. \\ \left. \times \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \omega_1 t_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \omega_2 t_2)] + \langle d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_1) d\dot{\zeta}^*(\mathbf{k}_2) \rangle \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \omega_1 t_1 - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 + \omega_2 t_2)] \right\}, \quad (2)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение, а угловые скобки — усреднение. Для статистически однородного и стационарного поля выполняется соотношение

$$M_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tau = t_2 - t_1).$$

Чтобы это соотношение было справедливым в нашей задаче, необходимо потребовать выполнения условий

$$\frac{1}{2} \langle d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_1) d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_2) \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} \langle d\dot{\zeta}(\mathbf{k}_1) d\dot{\zeta}^*(\mathbf{k}_2) \rangle = \tilde{S}(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

где $\tilde{S}(\mathbf{k})$ — волновой спектр морской поверхности (так мы назовём энергетический спектр бегущих волн (1)), $\delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$ — дельта-функция. Подставляя эти условия в (2), получим

$$M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \int \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} - \omega_k \tau) d\mathbf{k}. \quad (3)$$

Винеровский энергетический спектр определяется преобразованием Винера—Хинчина функции корреляции, описываемой (3):

$$\Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) \exp[-i(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} + \omega \tau)] d\boldsymbol{\rho} d\tau = 4\pi^3 [\tilde{S}(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_k) + \tilde{S}(-\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_k)]. \quad (4)$$

Из (4) следуют, как частные случаи, выражения для пространственного,

$$\Phi_{\zeta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega) d\omega = 2\pi^2 [\tilde{S}(\mathbf{k}) + \tilde{S}(-\mathbf{k})], \quad (5)$$

и временного,

$$\Phi_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} = \pi \int \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{S}(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega_k) + \tilde{S}(-\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_k)] d\mathbf{k}, \quad (6)$$

спектров Винера.

Как видно из выражения (4), связь спектра Винера с исходным волновым спектром не проста. Из (5) следует, что информация об угловой структуре волнового спектра в пространственном спектре Винера искажена, хотя свойства её отчасти сохранены. В силу этого можно сказать, что восстановление спектра $\tilde{S}(\mathbf{k})$ из $\Phi_{\zeta}(\mathbf{k})$ проблематично. В свою очередь, из (6) видно, что угловая зависимость волнового спектра не может быть определена из временного спектра Винера, в силу чего восстановление $\tilde{S}(\mathbf{k})$ из $\Phi_{\zeta}(\omega)$ невозможно.

Выразим волновой спектр через пространственно-временную корреляционную функцию поля возвышений морской поверхности. Из теоремы Винера—Хинчина следует, что

$$M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} + \omega \tau)] d\mathbf{k} d\omega. \quad (7)$$

Отсюда с учётом (6) получим

$$M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \frac{1}{2} \iint_{\infty} [\tilde{S}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k \tau) + \tilde{S}(-\mathbf{k}) \exp(i\omega_k \tau)] \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) d\mathbf{k}. \quad (8)$$

Введём в рассмотрение формальный спектр вида

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tau) = \iint_{\infty} M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}.$$

Подставляя в него выражение (8), получим

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tau) = 2\pi^2 [\tilde{S}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k \tau) + \tilde{S}(-\mathbf{k}) \exp(i\omega_k \tau)].$$

Продифференцируем это выражение по временной переменной:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tau) = -2\pi^2 i\omega_k [\tilde{S}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_k \tau) - \tilde{S}(-\mathbf{k}) \exp(i\omega_k \tau)].$$

Из двух последних уравнений найдём волновой спектр:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{i}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \tau) \right]; \\ S(\mathbf{k}) &= \frac{\exp(i\omega_k \tau)}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} \left[M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) + \frac{i}{\omega_k} \frac{\partial}{\partial \tau} M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}, \tau) \right] \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выведем ещё одну полезную формулу, связывающую $\tilde{S}(\mathbf{k})$ с $\Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega)$. Подставляя (7) в выражение (9), получим

$$\tilde{S}(\mathbf{k}) = \frac{\exp(i\omega_k \tau)}{(2\pi)^3} \int_{\infty} \Phi_{\zeta}(\mathbf{k}, \omega) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k} \right) \exp(i\omega \tau) d\omega.$$

Всё сказанное относится к общим вопросам статистики случайных полей. Далее мы сузим и конкретизируем задачу, обратившись к так называемым замороженным полям, т. е. к полям, не изменяющимся во времени. Из выражения (3) при этом следует, что

$$M_{\zeta}(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\infty} \tilde{S}(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}) d\mathbf{k}. \quad (10)$$

Будем полагать, что волновой спектр имеет вид функции с разделяющимися переменными:

$$\tilde{S}(\mathbf{k}) = S(k) \phi(\theta), \quad (11)$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\theta = \arctg(k_y/k_x)$, причём $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) d\theta = 1$.

В качестве спектра $S(k)$ используем модифицированный спектр возвышений взволнованной поверхности моря Пирсона—Московица [8]:

$$S(k) = \frac{\beta}{2k^4} \exp\left(-\frac{\alpha}{k^2} - \gamma k^2\right),$$

где $\beta = 11,5 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 0,74g^2/v^4$, v — скорость ветра, $\gamma = (3/32)(\beta/\sigma_p^2)$, $\sigma_p^2[\text{м}^{-2}] = (-4,13 + 1,23v[\text{м/с}])^2$ — дисперсия кривизны морской поверхности [9].

2. РЕАЛЬНОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ПОЛЯ УКЛОНОВ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНЕНИЯ

Обратимся сначала к задаче моделирования случайного одномерного поля уклонов взволнованной морской поверхности. Мы будем моделировать уклоны, т. к. именно они играют главную роль в большинстве оптических задач, где поверхность раздела воздух—вода является «фазовым экраном».

Пусть реальное случайное поле уклонов $q(r)$ имеет корреляционную функцию $M_q(\rho) = \langle q(r) \times q(r+\rho) \rangle$, связанную с энергетическим спектром уклонов $S_q(k)$ соотношением, следующим из (10) и (11) при $\phi(\theta) = \delta(\theta)$: $M_q(\rho) = \int_0^\infty S_q(k) \cos(k\rho) k dk$, где спектр уклонов одномерного морского волнения $S_q(k)$ связан со спектром возвышений Пирсона—Московица $S(k)$ соотношением $S_q(k) = k^2 S(k)$, $r = |r|$, $\rho = |\rho|$.

Представим модельное поле уклонов в виде суммы N синусоид с детерминированными амплитудами a_i и случайными фазами φ_i :

$$\tilde{q}(r) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(k_i r + \varphi_i),$$

где фаза φ_i равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi]$. Соответствующая этому полю корреляционная функция имеет вид

$$\tilde{M}_q(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i \cos(k_i \rho),$$

где $b_i = a_i^2/2$.

Энергетический спектр модельного поля уклонов представляет собой набор дельта-функций, отличных от нуля в узлах k_i . Огибающей спектра является кривая, проходящая через точки с абсциссами k_i и ординатами b_i . Вопросам определения величин b_i и k_i посвящены следующие разделы работы.

Самым естественным и традиционным способом размещения узлов на оси частот является следующий: область частот от 0 до k_m (k_m — максимальная частота спектра, которую можно выбрать, например, из условия $k_m = 3/\sqrt{\gamma}$) разбивается на N одинаковых участков с шириной $\Delta k = k_m/N$, узлы располагаются в точках $k_i = i \Delta k$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а амплитуды спектральных составляющих определяются соотношением

$$b_i = \int_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S_q(k) k dk.$$

При этом, очевидно, сумма всех коэффициентов b_i равна дисперсии реального поля уклонов $\sigma_q^2 = \int_0^\infty S_q(k) k dk$.

Очевидно, однако, что при таком способе моделирования (далее именуемом моделью 1) корреляционная функция $\tilde{M}_q(\rho)$ является периодической. Для иллюстрации на рис. 1 приведены примеры расчёта этой функции для скорости ветра $v = 4$ м/с и $N = 200$. Разумеется, период этой функции может быть удлинён, но это достигается лишь путём увеличения числа гармоник, что нежелательно.

Чтобы функция $\tilde{M}_q(\rho)$ не была периодичной, необходимо лишь неэквидистантно расположить узлы k_i на оси частот. Из литературы [10, 11] известен способ моделирования случайного поля, в

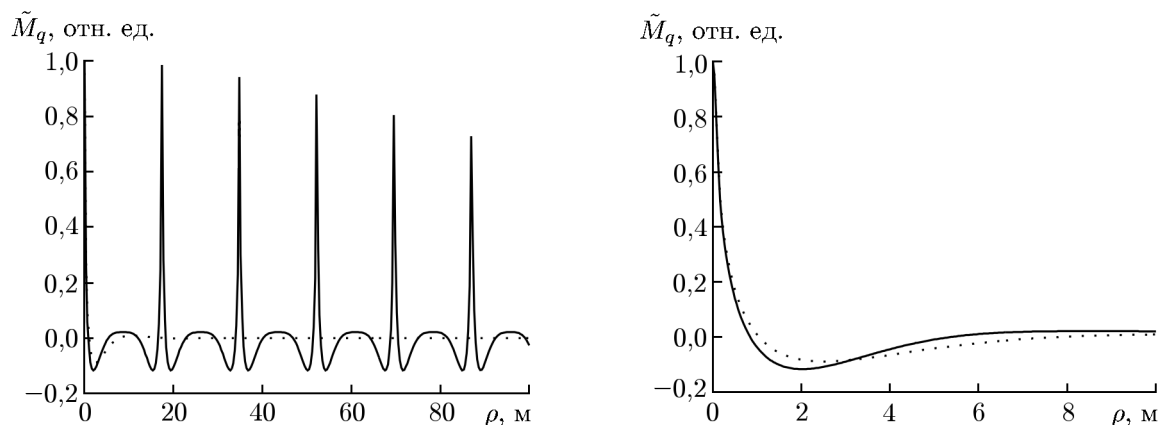


Рис. 1. Корреляционные функции уклонов при эквидистантном методе расположения узлов (сплошная линия — модельное поле, пунктирная — реальное поле)

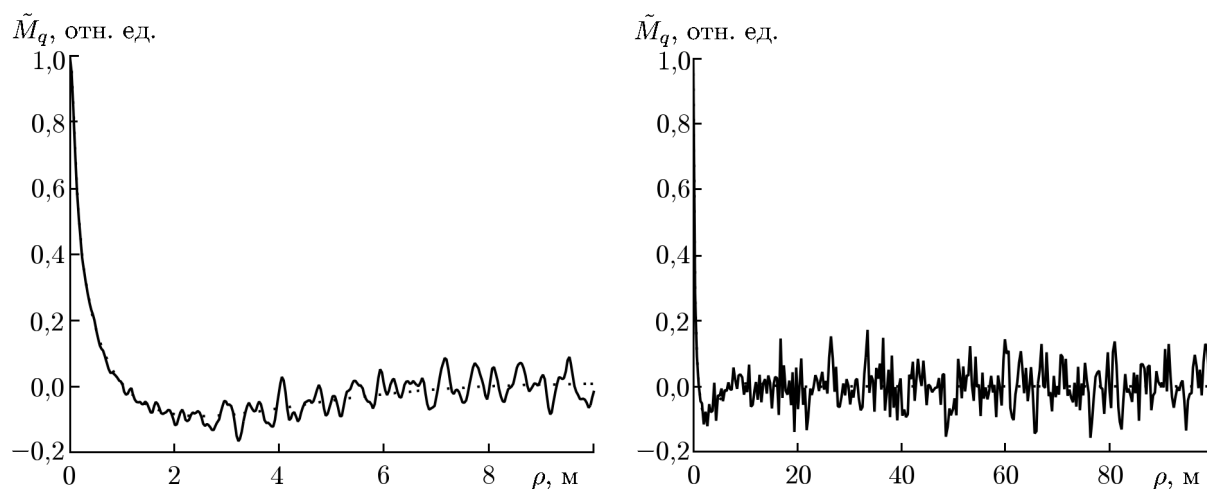


Рис. 2. Корреляционные функции уклонов при случайном методе расположения узлов (сплошная линия — модельное поле, пунктирная — реальное поле)

котором узлы спектра модельного поля разыгрываются случайно в соответствии с функцией распределения вероятностей, пропорциональной спектру уклонов реального поля $S_q(k)$. Далее такая модель называется моделью 2. На рис. 2 приведена корреляционная функция смоделированного этим способом поля уклонов (параметры модели те же, что и на рис. 1).

Из полученных данных следует, что в «случайной» модели функция корреляции при больших ρ имеет не периодический, а шумовой характер. Анализ показывает, что дисперсия этого «шума» уменьшается при увеличении числа гармоник N .

Несомненно, такой способ вполне пригоден для моделирования, но при его использовании имеется неопределённость, ибо фактор случайности при выборе узлов заставляет опасаться получения неудачного набора k_i , например близкого к эквидистантному.

Чтобы функция корреляции модельного поля уклонов не была периодичной, можно использовать и различные детерминированные способы расположения узлов на оси частот. Одним из возможных, в частности, является способ расположения узлов по кубическому закону: $k_i = (i/N)^3 k_m$. Далее такая модель называется моделью 3. Корреляционная функция смоделированного таким способом поля уклонов приведена на рис. 3 (параметры модели: $v = 4$ м/с, $N = 200$). Она также имеет шумовой характер при больших ρ , и дисперсия этого «шума» так же, как и в способе со

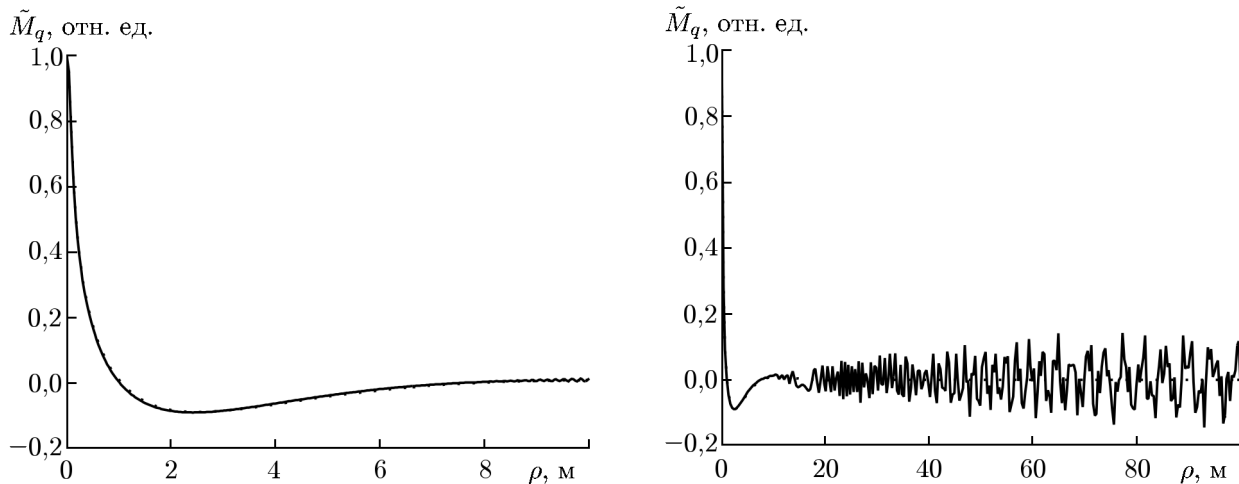


Рис. 3. Корреляционные функции уклонов при расположении узлов по кубическому закону (сплошная линия — модельное поле, пунктирная — реальное поле)

случайным выбором узлов, уменьшается с увеличением числа гармоник.

Очевидно, что способов выбора узлов по детерминированному закону существует бесконечно много, но лучшими среди них будем считать те способы, которые обеспечивают наименьший уровень «шума» на «хвосте» корреляционной функции $\tilde{M}_q(\rho)$.

Допустим, что величины k_i не находятся в дробно-рациональных отношениях друг к другу. В этом случае можно полагать, что сложение гармонических составляющих с частотами k_i и амплитудами b_i при больших ρ происходит «некогерентным» образом. При этом мощность «шума» функции $\tilde{M}_q(\rho)$ определяется выражением $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 / 2$. В области малых ρ , напротив, гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая «мощность» равна $\tilde{M}_q^2(0) = (\sum_{i=1}^N b_i)^2$. Образум величину $Q = \sigma^2 / \tilde{M}_q^2(0)$, которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений $\partial Q / \partial b_i = 0$ для $i = 1, 2, \dots, N$. Результатом её решения является $b_1 = b_2 = \dots = b_N$. Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому шуму («квазибелый») вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент («отбеливание» спектра) реального поля S_q сводится к разбиению области определения спектра $[0, k_m]$ на участки Δk_i , интегралы по которым от функции $S_q(k)$ имеют одно и то же значение $b_i = b_0 = \sigma_q^2 / N$.

Заметим теперь, что, рассуждая о способах разбиения интервала частот $[0, k_m]$ на участки Δk_i , мы, оставляли нерешённым вопрос о выборе собственно узлов спектра k_i внутри этих участков. Обычно узел k_i ставится у правой границы ячейки Δk_i . При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо согласуется с реальной корреляционной функцией в области малых ρ . Для достижения такого согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до N -го порядка) функций $\tilde{M}_q(\rho)$ и $M_q(\rho)$ при $\rho = 0$. Это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей уклонов, которое записывается в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i k_i^{2p} = \int_0^\infty k^{2p} S_q(k) k dk$$

для $p = 1, 2, \dots, N$.

Полученная система N уравнений для N неизвестных k_i не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно, что тоже связано со значительными сложностями.

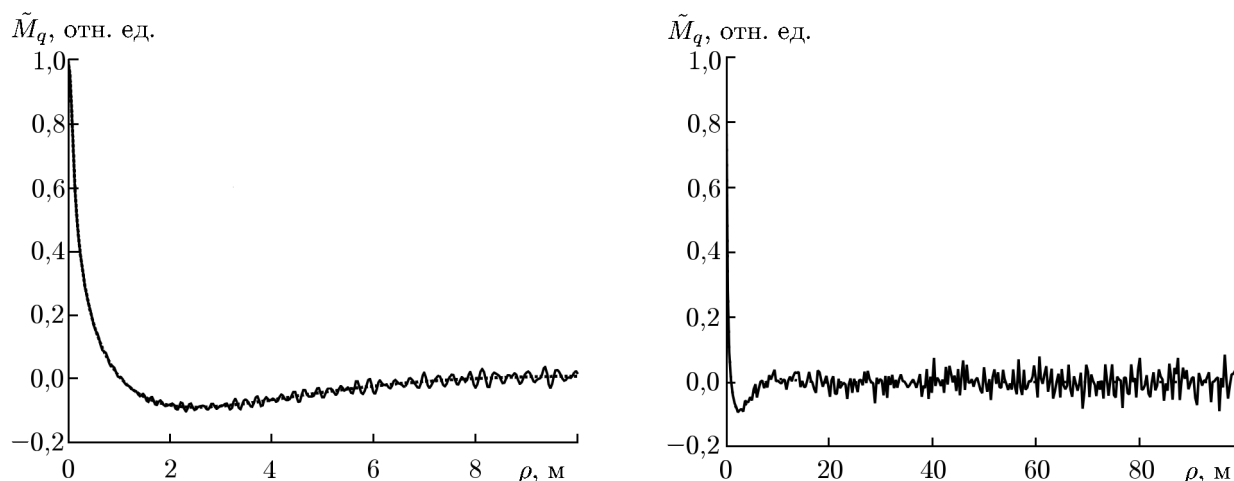


Рис. 4. Корреляционные функции уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания спектра» (сплошная линия — модельное поле, пунктирная — реальное поле)

Оставим пока эту задачу за рамками данной работы.

Наиболее простое решение вопроса о выборе узлов заключается в том, чтобы потребовать выполнения облегчённого, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров уклонов:

$$b_i k_i^2 = \int_{\Delta k_i} k^2 S_q(k) k dk.$$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов k_i . В частности, для модели с «отбелённым» спектром получаем

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{b_0} \int_{\Delta k_i} k^2 S_q(k) k dk}.$$

Такой способ выбора узлов, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжение корреляционных функций реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей, что весьма важно при решении многих задач оптики морской поверхности. Эта модель далее называется моделью 4. Корреляционная функция поля уклонов, смоделированного по этому методу, приведена на рис. 4 (параметры модели те же, что и на предыдущих рисунках). Обращает на себя внимание то, что мощность «шума» здесь существенно меньше, чем в описанных выше методах моделирования.

Определим мощность «шума» для различных методов моделирования по формуле

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{\Delta \rho} \int_{\rho_m}^{\rho_m + \Delta \rho} \frac{\tilde{M}_q^2(\rho) d\rho}{\tilde{M}_q^2(0)}$$

при достаточно больших ρ_m и $\Delta \rho$. Рассчитанные по этой формуле значения дисперсии «шума» приведены на рис. 5 в виде зависимостей от дистанции ρ_m (длина отрезка интегрирования составляла 300 м). Полученные данные со всей очевидностью свидетельствуют в пользу модели 4 — для неё мощность «шума» корреляционной функции имеет существенно меньшее, по сравнению с другими моделями, значение.

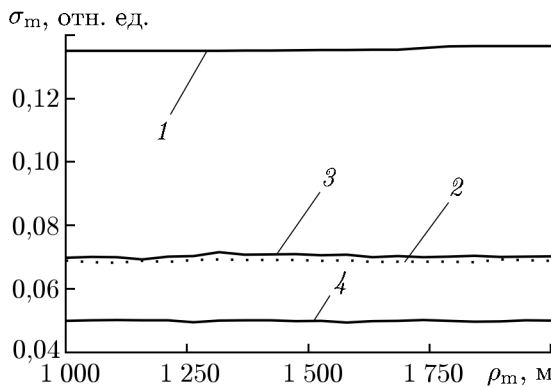


Рис. 5. Среднеквадратические значения «шума» модельных корреляционных функций. Номера кривых отвечают номерам моделей

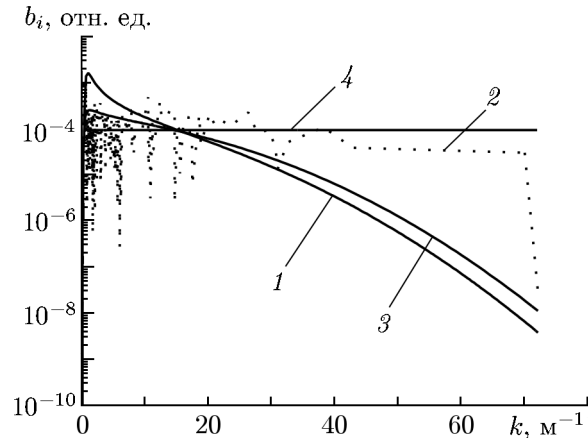


Рис. 6. Огибающие модельных спектров уклонов. Номера кривых отвечают номерам моделей

На рис. 6 приведены для полноты картины огибающие спектров уклонов $b_i(k)$ в различных моделях.

Вопрос о числе гармоник N модельного поля уклонов должен, по-видимому, решаться отдельно для каждой конкретной оптической задачи исходя из требования необходимой точности её решения. Отметим здесь лишь одно общее требование к разыгрываемому полю уклонов: оно должно быть гауссовым. Ясно, что чем больше N , тем легче удовлетворяется это условие. Здесь, в частности, полезно ориентироваться на выражение, описывающее одномерную характеристическую функцию распределения вероятностей суммы независимых синусоид: $\theta(k) = \prod_{i=1}^N J_0(b_i k)$, где $J_0(b_i k)$ — функция Бесселя I-го рода нулевого порядка. Очевидно, что с увеличением N форма этой функции довольно быстро приближается к гауссовой и, подчеркнём, особенно быстро, если выполняется условие $b_i = \text{const}$ (модель с «отбелённым» спектром).

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФЛУКТУАЦИЯХ НАДВОДНОЙ ОСВЕЩЁННОСТИ

Одной из самых сложных в вычислительном отношении задач в статистической оптике морской поверхности является задача исследования характеристик надводного светового поля, формируемого при отражении солнечного излучения от случайно-неровной границы раздела воздух—вода. В этой задаче необходим учёт сильных флуктуаций, и нелинейной связи светового поля с полем уклонов, и вследствие него она трудно поддаётся анализу с помощью статистических моментов высоких порядков.

В работе [12] приведена формула для расчёта коэффициента вариации флуктуаций солнечного излучения, отражённого одномерной взволнованной морской поверхностью:

$$V_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\exp(-\pi \rho^2 / \Sigma)}{\sqrt{\Sigma}} - \frac{\exp(-\pi \rho^2 / \Sigma_\infty)}{\sqrt{\Sigma_\infty}} \right] d\rho,$$

где $\Sigma = S_f + \Sigma_q[1 - R_q(\rho)]$, $R_q(\rho) = M_q(\rho)/\sigma_q^2$, $\Sigma_\infty = S_f + \Sigma_q$, $S_f = 2\Delta_0 H^2$, $\Sigma_q = 16\pi H^2 \sigma_q^2$, Δ_0 — телесный угол излучения Солнца, H — высота размещения приёмника (измерителя освещённости). Данную формулу можно использовать для проверки пригодности различных моделей корреляционных функций уклонов при анализе первого и второго моментов флуктуаций освещённости.

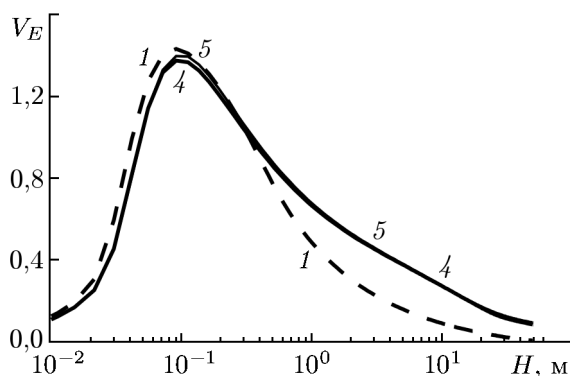


Рис. 7. Коэффициенты вариации освещённости при $v = 6$ м/с и $N = 25$ в зависимости от H . Номера кривых отвечают номерам моделей

На рис. 7 приведены зависимости коэффициентов вариации освещённости, рассчитанные по формуле для V_E при подстановке в неё функций корреляции уклонов моделей 1 и 4 (см. раздел 2), а также модели с расчётом по строгой формуле с использованием сплайн-модели корреляционной функции уклонов [3] (модель 5). В расчётах использовались следующие значения параметров: скорость ветра $v = 6$ м/с, число гармоник $N = 25$. Из приведённых зависимостей следует, что наилучшее совпадение результатов точного и модельного расчётов даёт использование модели 4, а наихудшее, как и следовало ожидать, — модели 1.

Моделирование реализаций освещённости (эксперимент Монте-Карло) проводилось на основе модели с «отбелённым» спектром. Расчёт освещённости выполнялся с помощью формулы [12]

$$E = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{-\pi [r - 2Hq(r)]^2}{\Delta_0 H^2} \right\} dr.$$

На базе полученных результатов были построены зависимости среднего значения и коэффициента вариации освещённости от высоты расположения приёмника ($v = 4$ м/с, $N = 25$, число реализаций 10 000), которые весьма удовлетворительно согласуются с результатами аналитических расчётов для реального поля уклонов (см. рис. 8).

На рис. 9 приведены оценки коэффициентов асимметрии (A) и эксцесса (W) функции распределения вероятностей освещённости, рассчитанные для того же набора параметров по формулам

$$A = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad W = \frac{M_4}{M_2^2} - 3,$$

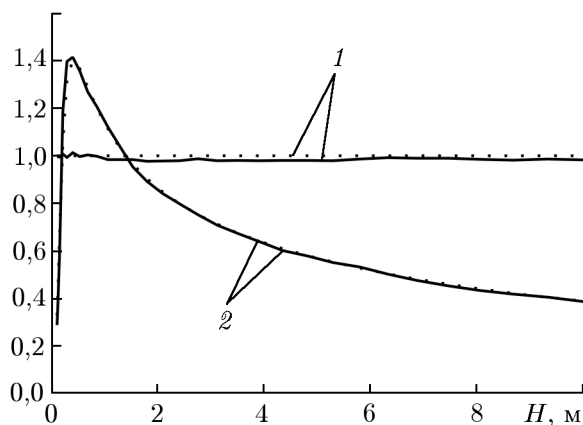


Рис. 8. Среднее значение (кривые 1) и коэффициент вариации (2) освещённости (сплошные линии — эксперимент Монте-Карло, пунктирные — теория)

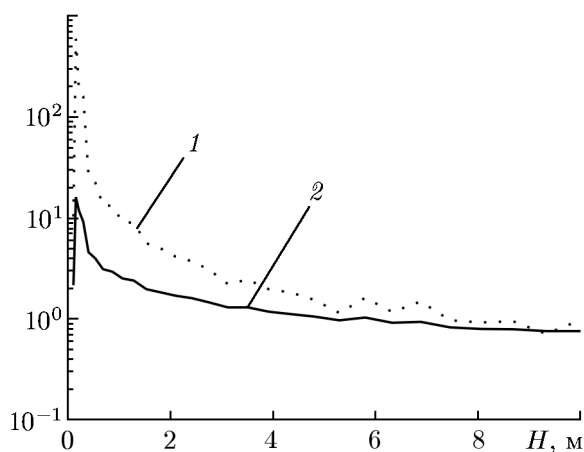


Рис. 9. Коэффициенты асимметрии (кривая 1) и эксцесса (2) освещённости

где

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_i - m_1)^k, \quad m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i,$$

n — число реализаций, E_i — освещённость в i -й реализации. Из приведённых зависимостей следует, что с увеличением высоты расположения приёмника излучения функция распределения вероятностей освещённости довольно быстро приобретает гауссов вид.

Кроме того, нами проведён статистический анализ бликовых точек морской поверхности, число которых в каждой реализации соответствует числу решений уравнения $r - 2Hq(r) = 0$. Оказалось, что с высокой степенью точности среднестатистические значения числа бликовых точек, определённые в эксперименте Монте-Карло, совпадают со значениями, полученными по известной теоретической формуле для числа отражающих точек гауссовой поверхности:

$$\bar{n}_{gl} = 2H \sqrt{2\sigma_{\text{curv}}^2/\pi},$$

где $\sigma_{\text{curv}}^2 = \int_0^\infty k^2 S_q(k) k dk$ — дисперсия кривизн одномерной поверхности.

Полученные в данном разделе результаты подтверждают высокую работоспособность и эффективность предложенного нами метода моделирования случайного профиля одномерной поверхности, основанного на принципе «отбеливания» спектра реального поля уклонов.

4. РЕАЛЬНОЕ И МОДЕЛЬНОЕ ПОЛЯ УКЛОНОВ ИЗОТРОПНОГО ВОЛНЕНИЯ

Рассмотрим случай статистически изотропного морского волнения. При этом угловая часть волнового спектра может быть представлена в виде полуцилиндра (винеровский спектр при этом, как видно из (5), представляется полным цилиндром): $\phi(\theta) = 1/\pi$ при $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Выражение (10) для пространственной корреляционной функции возвышений принимает вид

$$M_\zeta(\boldsymbol{\rho}) \equiv M_\zeta(\rho, \theta_\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty S(k) \cos[k\rho \cos(\theta - \theta_\rho)] k dk,$$

где θ_ρ — полярный угол вектора $\boldsymbol{\rho}$. Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[z \cos(t - a)] dt = J_0(z),$$

то

$$M_\zeta(\boldsymbol{\rho}) \rightarrow M_\zeta(\rho) = \int_0^\infty S(k) J_0(k\rho) k dk. \quad (12)$$

Моделирование изотропной морской поверхности с заданными энергетическими и корреляционными свойствами мы опять будем осуществлять на основе её представления в виде суммы синусоид со случайными фазами.

Выше исследован случай одномерной поверхности, в котором, чтобы функция корреляции модельного поля уклонов не была периодичной, использован метод «отбеливания» спектра. С некоторой модификацией этот метод можно применять и при решении задачи моделирования двумерной поверхности.

Представим возвышения в модели двумерной поверхности в виде ряда

$$\zeta(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} a_{ij} \cos(\mathbf{k}_{ij} \mathbf{r} + \varphi_{ij}), \quad (13)$$

где $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{x}_0 k_{ix} + \mathbf{y}_0 k_{iy}$, φ_{ij} — случайная фаза на интервале $[0, 2\pi]$. Корреляционная функция возвышений модельного поля записывается в виде

$$\tilde{M}_\zeta(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{a_{ij}^2}{2} \cos(\mathbf{k}_{ij} \boldsymbol{\rho}). \quad (14)$$

В полярной системе координат выражения (13) и (14) соответственно имеют вид

$$\zeta(r, \theta_r) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} a_{ij} \cos[k_i r \cos(\theta_j - \theta_r)], \quad \tilde{M}_\zeta(\rho, \theta_\rho) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{a_{ij}^2}{2} \cos[k_i r \cos(\theta_j - \theta_\rho)].$$

Поскольку вектор уклонов двумерной морской поверхности имеет две составляющие ($\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \nabla \zeta(\mathbf{r}) = \mathbf{x}_0 q_x(\mathbf{r}) + \mathbf{y}_0 q_y(\mathbf{r})$), то имеются соответствующие три корреляционные функции уклонов

$$M_{xx}(\boldsymbol{\rho}) = \langle q_x(\mathbf{r}) q_x(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \rangle, \quad M_{yy}(\boldsymbol{\rho}) = \langle q_y(\mathbf{r}) q_y(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \rangle, \quad M_{xy}(\boldsymbol{\rho}) = \langle q_x(\mathbf{r}) q_y(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \rangle,$$

которые выражаются через волновой спектр следующим образом:

$$M_{xx}(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\infty} k_x^2 \tilde{S}(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{k}, \quad M_{yy}(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\infty} k_y^2 \tilde{S}(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{k},$$

$$M_{xy}(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\infty} k_x k_y \tilde{S}(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{k}.$$

Выражения для корреляционных функций уклонов модельного поля следуют из (14):

$$\tilde{M}_{xx}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{a_{ij}^2}{2} k_{ix}^2 \cos(\mathbf{k}_{ij} \boldsymbol{\rho}), \quad \tilde{M}_{yy}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{a_{ij}^2}{2} k_{iy}^2 \cos(\mathbf{k}_{ij} \boldsymbol{\rho}),$$

$$\tilde{M}_{xy}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{a_{ij}^2}{2} k_{ix} k_{iy} \cos(\mathbf{k}_{ij} \boldsymbol{\rho}).$$

Очевидно, что одним набором параметров a_{ij} и $\mathbf{k}_{ij}$ невозможно удовлетворить какому-либо условию оптимальности для всех трёх корреляционных функций уклонов. Компромиссным решением здесь является выбор в качестве моделируемой функции векторной функции уклонов $\mathbf{q}(\mathbf{r})$, корреляционная функция которой для статистически изотропного волнения имеет вид

$$M_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho}) \rightarrow M_{\mathbf{q}}(\rho) = \int_0^{\infty} S_q(k) J_0(k\rho) k dk,$$

где $S_q(k) = k^2 S(k)$ — спектр уклонов (дисперсия уклонов равна $\sigma_{\mathbf{q}}^2 = \int_0^{\infty} S_q(k) k dk$).

Корреляционная функция вектора уклонов модельного поля имеет вид

$$\tilde{M}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} b_{ij} \cos(\mathbf{k}_{ij} \boldsymbol{\rho}),$$

где $b_{ij} = a_{ij}^2(k_{ix}^2 + k_{iy}^2)/2$ (дисперсия уклонов равна $\tilde{\sigma}_{\mathbf{q}}^2 = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} b_{ij}$). В полярных координатах это выражение представляется в виде

$$\tilde{M}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \tilde{M}_{\mathbf{q}}(\rho, \theta_{\rho}) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} b_{ij} \cos[k_i \rho \cos(\theta_j - \theta_{\rho})].$$

Следующей задачей является разработка правила оптимального расположения узлов $\mathbf{k}_{ij}$ спектра уклонов $S_q(k)$ и определения соответствующих им коэффициентов b_{ij} , которые обеспечили бы максимальное приближение модельной функции $\tilde{M}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho})$ к теоретической функции $M_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho})$ при минимальном числе узлов $N_i N_j$.

Эта задача решается следующим образом: плоскость частот $\mathbf{k}$, заданная в полярных координатах, разбивается на участки, интегралы по которым от спектра уклонов $\tilde{S}_q(\mathbf{k}) = S_q(k)\phi(\theta)$ имеют постоянную величину, равную $b_0 = \sigma_{\mathbf{q}}^2/(N_k N_{\theta})$, где N_k — число узлов по k , N_{θ} — число узлов по θ . Поскольку спектр уклонов изотропен, то выбор размера секторного участка по углу осуществляется достаточно просто: $\Delta\theta = \pi/N_{\theta}$, при этом $\theta_j = -\pi/2 + j \Delta\theta$, $j = 1, \dots, N_{\theta}$. Что же касается размера участка по k ($\Delta k_i = k_i - k_{i-1}$), то он может быть найден из уравнения $F(k_i) = i \Delta F$ (или из рекуррентного соотношения $F(k_i) = F(k_{i-1}) + \Delta F$), где $F(x) = \int_0^x S_q(k)k dk$, $\Delta F = \sigma_{\mathbf{q}}^2/N_k$, $i = 1, \dots, N_k$, $k_0 = 0$.

Следует заметить, что с помощью этой процедуры мы находим лишь границы ячеек, в которых $b_{ij} = b_0 = \text{const}$. Положение же самих узлов k_i , θ_j внутри каждой ячейки может быть произвольным и варьироваться так, чтобы удовлетворить каким-то другим условиям, например условию равенства дисперсий кривизны реальной и модельной поверхностей моря, как это было сделано в одномерном случае. Самым простым вариантом является постановка узла в центре ячейки.

В дальнейшем по заданным величинам $\mathbf{k}_{ij}$ и b_{ij} можно моделировать случайные реализации поля уклонов изотропного морского волнения по формулам

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (r, \theta_r) = -\sqrt{2b_0} \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_{\theta}} \begin{pmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{pmatrix} \sin[k_i r \cos(\theta_j - \theta_r) + \varphi_{ij}].$$

На рис. 10 приведены теоретическая функция корреляции $M_{\mathbf{q}}(\rho)$ и усреднённая по углу функция корреляции модельного поля $1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{M}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho}) d\theta_{\rho}$. На рис. 10а показаны результаты, полученные для модели с эквидистантными узлами, на рис. 10б — для модели с «отбелённым» спектром. Во всех вариантах использовались следующие параметры: скорость ветра $v = 4$ м/с, число гармоник $N_k = 120$.

Нетрудно убедиться в том, что при одинаковом числе узлов модель, основанная на методе «отбеливания» спектра, больше соответствует теоретической модели, чем традиционная модель в виде ряда Фурье с эквидистантным расположением узлов.

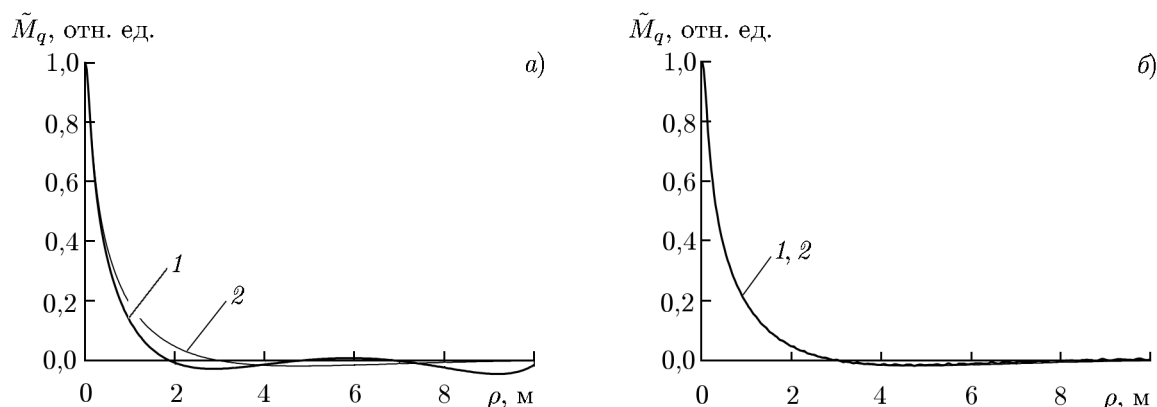


Рис. 10. Нормированные корреляционные функции уклонов: 1 — модель, 2 — теория. Панели а и б соответствуют моделям 1 и 4

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) В работе представлен обзор современного состояния проблемы моделирования случайного профиля морской поверхности, изложены существующие в литературе методы такого моделирования и даны ссылки на соответствующие публикации.

2) Предложен метод моделирования поверхности суммой синусоидальных составляющих с детерминированными амплитудами, случайными фазами и частотами, расположенными внутри участков, имеющих одно и то же (постоянное) значение интеграла от спектра волнения. Этот метод — метод «отбеливания» спектра — является новым. Наиболее идеологически близкими к нему являются рандомизированные методы [2–5, 10, 11], которые, однако, уступают ему по критерию минимума «шума» корреляционной функции модельного процесса при больших значениях аргумента.

3) Предложенный метод является исключительно простым и физически наглядным. Он гарантирует отсутствие нежелательной периодичности корреляционной функции моделируемого волнения и обеспечивает при сохранении точности расчётов минимальное требуемое для моделирования число гармоник по сравнению с другими способами моделирования. Наконец, в нём используется минимальное число случайных параметров, что делает его привлекательным с точки зрения практического применения.

4) Эффективность предложенного метода подтверждается многочисленными примерами его использования в решении целого ряда оптических задач [13–17].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–45–02610р_повожье_a) и CRDF (проект RUG1-1675_NN-07).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
2. Шалыгин А. С, Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986. 320 с.
3. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. 259 с.
4. Каргин Б. А., Пригарин С. М. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5, № 3. С. 285.

5. Анваров С. Р., Пригарин С. М. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7, № 5. С. 685.
6. Вебер В. Л. О моделировании одномерной случайной поверхности: Препринт № 603 ИПФ РАН. Нижний Новгород, 2002. 16 с.
7. Абросимов Д. И., Лучинин А. Г. Статистическое моделирование лидарных сигналов при зондировании верхнего слоя океана через взволнованную поверхность: Препринт № 438 ИПФ РАН. Нижний Новгород, 1997. 20 с.
8. Вебер В. Л. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8, № 9. С. 1394.
9. Бурцев Е. Г., Пелевин В. Н. // Световые поля в океане. 1979. С. 231.
10. Михайлов Г. А. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 4. С. 793.
11. Каргин Б. А. // Моделирование волновых полей. 1983. С. 25.
12. Вебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 1. С. 14.
13. Weber V. L. // Proc. II Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". St. Petersburg, 8–13 Sept. 2003. P. 201.
14. Weber V. L. // Proc. III Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". St. Petersburg, 12–16 Sept. 2005. P. 345.
15. Abrosimov D. I., Weber V. L. // Proc. IV Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". N. Novgorod, 11–15 Sept. 2007. P. 238.
16. Weber V. L. // Proc. VII Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". St. Petersburg, 10–14 Sept. 2013. P. 239.
17. Weber V. L. // Proc. VII Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". St. Petersburg, 10–14 Sept. 2013. P. 234.

Поступила в редакцию 17 февраля 2016 г.; принята в печать 3 ноября 2016 г.

SIMULATION OF A RANDOM PROFILE OF THE SEA SURFACE

V. L. Weber

We consider the problem of simulation of the slope field of a random surface profile, which is represented as a sum of a finite number of the sinusoids with the random phases. The behavior of the correlation function of the slopes is studied for the case of equidistant and nonequidistant locations of the node spectra of the model field on the frequency axis. A new node-location method, which is based on the equalization of the amplitudes of the spectral components of the actual slope field and ensures maximum proximity of the correlation functions of the model and actual fields over the entire region of their definition, is proposed. Using this method, one can significantly reduce the number of the summable harmonics during the simulation of the sea wind waves. The problem of fluctuations of the above-water irradiance using the proposed slope-simulation method is studied and, as a result, its application efficiency is proved.