УДК 537.531.2.098+537.531.2:524.31.084-337

ВЕРОЯТНОСТИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ФОТОНОВ ПРИ НИЗКОЭНЕРГИЧНЫХ ЭЛЕКТРОН-ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. А. Корягин[1,2] *, *И. А. Баландин*[1]

[1] Институт прикладной физики РАН;
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрены квантово-механические вероятности тормозного излучения фотонов при низкоэнергичных кулоновских столкновениях в магнитном поле, когда рассеивающий центр настолько возмущает состояние налетающего электрона, что движение последнего становится квазисвязанным. Квантовые выражения для спектральной мощности тормозного излучения получаются из классических формул заменой фурье-амплитуд скорости частицы на матричные элементы оператора скорости для волновых функций, нормированных условием единичного набегающего на ядро (или равного ему уходящего) потока, с суммированием по конечным уровням Ландау и квантованным значениям прицельного параметра. Приведены эквивалентные формы указанных матричных элементов, выраженные через напряжённость кулоновского поля и операторы уничтожения и рождения для собственных функций оператора квадрата прицельного параметра. Полученные представления для спектральной мощности тормозного излучения при квазисвязанном движении электрона позволяют перенести результаты расчётов данной величины, выведенные в классическом пределе, на квантовый случай, характерный для белых карликов с наиболее сильным магнитным полем.

1. ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ПРОСВЕТЛЕНИЕ ФОТОСФЕРЫ МАГНИТНОГО БЕЛОГО КАРЛИКА

В условиях фотосферы одиночного белого карлика с температурой порядка электрон-вольта сильное магнитное поле $B > 10^7$ Гс существенно возмущает движение электрона как в атоме водорода [1–3], так и при кулоновских столкновениях [4, § 13.1], [5]. Перестройка атомарных энергетических уровней проявляется в значительном перемещении линий в спектре излучения звезды, а оптический и инфракрасный континуумы приобретают высокую степень круговой и линейной поляризации [6].

Среди спектральных линий в оптике выделяют так называемые «стационарные» линии, длина волны которых принимает максимальные (или минимальные) значения при соответствующей индукции магнитного поля. Такие линии позволяют определять магнитную индукцию на белом карлике [3]. Несмотря на детальное решение проблемы линейчатого спектра излучения атома водорода, остаётся актуальной сопутствующая задача о непрозрачности замагниченной фотосферной плазмы за счёт свободно-связанных переходов [2]. Исследования [7–13] выявили осциллирующую зависимость сечений фотоионизации от энергии фотона по типу резонансов Брейта—Вигнера—Фано [14, § 147], что свидетельствует о наличии многочисленных автоионизационных состояний (см. также работы [15, 16]).

Энергия инфракрасных фотонов ниже тепловой энергии частиц порядка электрон-вольта. Как следствие, перенос инфракрасного излучения определяется свободно-свободными переходами — тормозным излучением и столкновительным поглощением при электрон-протонных со-

* koryagin@appl.sci-nnov.ru

ударениях [1]. Магнитное поле ограничивает смещение электрона поперёк своих силовых линий. Поэтому движение частицы выглядит как одномерное на временны́х интервалах более длительных, чем период циклотронного вращения $2\pi/\omega_B$. Одномерность движения порождает высокую степень линейной поляризации тормозного излучения на частотах

$$\omega \ll \omega_B, \tag{1}$$

а следовательно, и дихроизм плазмы по столкновительному поглощению. При этом дихроизм, строго говоря, не требует качественного изменения соударений [19, ф. (11.31), (11.35)].

Однако в случае фотосферы магнитного белого карлика (где тепловая энергия частиц ниже энергии ионизации атома водорода) дихроизм дополняется минимумом в диапазоне (1) эффективной частоты столкновений, определяющей спектральную мощность тормозного излучения и коэффициент столкновительного поглощения [20, 21]. Минимум обусловлен тем, что магнитное поле и притягивающий кулоновский центр формируют удерживающую систему для электрона по типу ловушки Пеннинга. В такой системе существуют не только квазисвязанные траектории свободных частиц в ближних столкновениях, но и полностью связанные классические орбиты с положительной механической энергией [22] — долгоживущие автоионизационные состояния в квантовом случае. Они уменьшают объём фазового пространства вблизи ядра, доступного свободным частицам для излучения в континууме.

Дихроизм и минимум эффективной частоты соударений приводят к тому, что коэффициент поглощения не увеличивается, а уменьшается при понижении частоты в диапазоне (1) для необыкновенной волны, поляризованной поперёк внешнего магнитного поля [21]. Просветление плазмы для одной из нормальных волн обеспечивает выход излучения с соответствующей поляризацией из более глубоких, а следовательно, и более горячих слоёв атмосферы звезды, что может быть причиной высокой степени линейной поляризации наблюдаемого излучения в континууме.

Согласно расчётам [23] для горячей атмосферы с температурой выше энергии ионизации атома водорода (при которой квазисвязанное движение электрона около ядра не настолько существенно [9, 24]) выходящее тормозное излучение приобретает высокую степень линейной поляризации в частотном интервале (1), если циклотронная частота становится больше частоты максимума чернотельного спектра. Поляризационное просветление существенно более холодной фотосферы белого карлика, по-видимому, проявится с максимальной силой при том же соотношении между частотами. Указанное требование совпадает с условием квантованной плазмы, в которой энергетический зазор между уровнями Ландау превышает тепловую энергию частиц.

Однако квантование поперечного движения электрона в плазме фотосферы магнитного белого карлика проявляет себя в столкновениях с квазисвязанным движением лишь вдали от рассеивающего центра, где волновая функция частицы дифрагирует на суперпозицию волн, часть которых уходит, а другая возвращается к ядру [15, 16]. Около ядра кинетическая энергия электрона возрастает до значения порядка кулоновской потенциальной энергии, которая превышает зазор между уровнями Ландау, так что квантование поперечного движения нивелируется.

Квазиклассическое движение электрона около ядра позволяет предположить, что основные результаты расчётов спектральной мощности тормозного излучения в приближении ньютоновой динамики частицы [20, 21] сохранятся и в квантовом пределе — для фотосфер белых карликов с наиболее сильным магнитным полем. Чтобы обосновать такое заключение, необходимо отыскать единообразное представление вероятности тормозного излучения фотона как в случае одного

[1] При температуре ниже примерно 10 000 K число нейтральных атомов на высоте водородной фотосферы белого карлика возрастает настолько, что могут стать существенными излучение и поглощение при электрон-атомных столкновениях — свободно-свободных переходах отрицательного иона водорода [17, 18].

канала упругого рассеяния на ядре (когда электрон может занимать только основной уровень Ландау до и после столкновения), так и в случае многоканального рассеяния (классический предел многих уровней).

Таким образом, данная работа имеет цель получить такое квантовое представление спектральной мощности тормозного излучения в магнитном поле для условий квазисвязанного движения свободного электрона вблизи ядра, которое позволит в дальнейшем распространить результаты расчётов [20, 21] на квантовый случай.

Далее изложение построено следующим образом. В разделе 2, следуя работе [25], введены операторы уничтожения и рождения для собственных состояний операторов кинетической энергии поперечного движения электрона и квадрата прицельного параметра. В итоге искомое представление вероятностей радиационных переходов будет сведено к матричным элементам указанных операторов.

В разделе 3 проанализирован часто используемый ансамбль некоррелированных начальных состояний с определёнными значениями механической энергии, кинетической энергии поперечного движения и обобщённого момента импульса. Показано, что такой «универсальный» ансамбль формируется как некоррелированная суперпозиция произвольного начального состояния со всеми его возможными смещениями и вращениями в поперечной плоскости.

В разделе 4 проанализированы стационарные состояния электрона в магнитном поле при наличии сильно возмущающего движение частицы рассеивающего центра — в частности их ортогональность и нормировка. Рассмотрен унитарный переход между различными базисами состояний. Свобода выбора базиса позволяет указать систему состояний, которая обеспечивает наиболее наглядный перенос результатов расчётов спектральной мощности в классическом пределе на квантовый случай.

В разделе 5 получено выражение для амплитуды спонтанного радиационного перехода при столкновении с помощью соотношения взаимности для решений волновых уравнений. Такой подход оказывается более наглядным в случае сильно возмущённого движения частицы, чем сингулярное представление состояния электрона после излучения фотона по волновым функциям «безызлучательной» задачи.

В разделе 6 приведено квантовое выражение для спектральной мощности тормозного излучения, которое получается из классической формулы заменой фурье-амплитуды скорости на матричные элементы оператора скорости для начальных и конечных состояний, нормированных условием единичного набегающего на ядро (или равного ему уходящего) электронного потока. Продемонстрирован переход от матричных элементов скорости к матричным элементам напряжённости кулоновского поля и матричным элементам операторов уничтожения и рождения для собственных состояний оператора квадрата прицельного параметра. Такие преобразования позволяют выявить сохранение в квантовом пределе результатов «классического» расчёта спектральной мощности тормозного излучения для условий фотосферы магнитного белого карлика.

В разделе 7 обсуждено используемое приближение неподвижного рассеивающего центра для условий, при которых квазисвязанное движение в замагниченной кулоновской системе оказывается определяющим для тормозного излучения.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

2. ОПЕРАТОРЫ УНИЧТОЖЕНИЯ И РОЖДЕНИЯ ДЛЯ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При гамильтоновом описании классического движения электрона в однородном магнитном поле канонически сопряжёнными переменными оказываются не только декартовые координаты x, y

и обобщённые импульсы, но и декартовые компоненты скорости v_x, v_y и радиус-вектора оси циклотронного вращения $p_{\mathrm{h}x}, p_{\mathrm{h}y}$. При квантовом подходе [25, 26] указанное свойство переходит на эрмитовые операторы

$$\hat v_x = (\hat p_x + eA_x/c)/m_{\mathrm{e}}, \qquad \hat v_y = (\hat p_y + eA_y/c)/m_{\mathrm{e}}, \qquad \hat p_{\mathrm{h}x} = x - \hat v_y/\omega_B, \qquad \hat p_{\mathrm{h}y} = y + \hat v_x/\omega_B.$$

Здесь $\hat p_x = -i\hbar\,\partial/\partial x$ и $\hat p_y = -i\hbar\,\partial/\partial y$ — операторы импульсов, $\hbar$ — постоянная Планка, вектор-потенциал $A_x\mathbf{x}^0 + A_y\mathbf{y}^0$ определяет магнитное поле $B = \mathbf{z}^0 \operatorname{rot}\mathbf{A} > 0$, $e > 0$ — элементарный заряд, m_{e} — масса электрона, c — скорость света, $\omega_B = eB/(m_{\mathrm{e}}c)$ — циклотронная частота; $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$ и $\mathbf{z}^0$ — орты осей x, y и z соответственно, ось z направлена вдоль магнитного поля. Действительно, коммутаторы

$$\{\hat v_x, \hat v_y\} = -ie\hbar\,(\mathbf{z}^0 \operatorname{rot}\mathbf{A})/(m_{\mathrm{e}}^2 c) = -i\omega_B^2\rho_0^2, \qquad \{\hat p_{\mathrm{h}x}, \hat p_{\mathrm{h}y}\} = i\rho_0^2$$

равны чисто мнимым значениям, тогда как остальные коммутаторы нулевые:

$$\{\hat p_{\mathrm{h}x}, \hat v_x\} = \{\hat p_{\mathrm{h}x}, \hat v_y\} = \{\hat p_{\mathrm{h}y}, \hat v_x\} = \{\hat p_{\mathrm{h}y}, \hat v_y\} = 0. \tag{2}$$

Точность одновременного измерения канонически сопряжённых величин определяется характерным ларморовским радиусом на основном уровне Ландау $\rho_0 = \sqrt{\hbar c/(eB)}$.

Операторы кинетической энергии поперечного движения $\hat K_\perp = m_{\mathrm{e}}\,(\hat v_x^2 + \hat v_y^2)/2$ и квадрата прицельного параметра $\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{h}}^2 = \hat p_{\mathrm{h}x}^2 + \hat p_{\mathrm{h}y}^2$ зависят квадратично от канонически сопряжённых переменных, что позволяет сформировать операторы уничтожения $\hat n_\downarrow$, $\hat l_\downarrow$ и рождения $\hat n_\uparrow$, $\hat l_\uparrow$ [25] для их собственных функций по аналогии с задачей об одномерном гармоническом осцилляторе [27, гл. 12]:

$$\hat n_\downarrow = \frac{\hat v_y + i\hat v_x}{\sqrt2\,\omega_B\rho_0} = \frac{w_2}{2} + \frac{\partial}{\partial w_1} = \exp\Bigl(-\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\frac{\partial}{\partial w_1}\Bigl[\exp\Bigl(\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\ldots\Bigr], \tag{3}$$

$$\hat n_\uparrow = \frac{\hat v_y - i\hat v_x}{\sqrt2\,\omega_B\rho_0} = \frac{w_1}{2} - \frac{\partial}{\partial w_2} = -\exp\Bigl(\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\frac{\partial}{\partial w_2}\Bigl[\exp\Bigl(-\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\ldots\Bigr], \tag{4}$$

$$\hat l_\downarrow = \frac{\hat p_{\mathrm{h}x} + i\hat p_{\mathrm{h}y}}{\sqrt2\,\rho_0} = \frac{w_1}{2} + \frac{\partial}{\partial w_2} = \exp\Bigl(-\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\frac{\partial}{\partial w_2}\Bigl[\exp\Bigl(\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\ldots\Bigr], \tag{5}$$

$$\hat l_\uparrow = \frac{\hat p_{\mathrm{h}x} - i\hat p_{\mathrm{h}y}}{\sqrt2\,\rho_0} = \frac{w_2}{2} - \frac{\partial}{\partial w_1} = -\exp\Bigl(\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\frac{\partial}{\partial w_1}\Bigl[\exp\Bigl(-\frac{w_1w_2}{2}\Bigr)\ldots\Bigr]. \tag{6}$$

Здесь выражения через комплексные переменные

$$w_1 = (x + iy)/(\sqrt2\,\rho_0), \qquad w_2 = (x - iy)/(\sqrt2\,\rho_0) \tag{7}$$

предполагают, что вектор-потенциал выбран в аксиально-симметричном виде $\mathbf{A} = (\mathbf{B}\times\mathbf{r})/2 = B\,(-y\mathbf{x}^0 + x\mathbf{y}^0)/2$. Координаты x и y рассматриваются как два комплексных аргумента, от которых зависят волновые функции. Многоточие в формулах (3)–(6) обозначает место подстановки таких функций.

Операторы (3)–(6) и переменные (7) удобно интерпретировать как проекции комплексных величин $\hat{\mathbf{v}}_\perp = \hat v_x\mathbf{x}^0 + \hat v_y\mathbf{y}^0$, $\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{h}} = \hat p_{\mathrm{h}x}\mathbf{x}^0 + \hat p_{\mathrm{h}y}\mathbf{y}^0$ и $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{x}^0 + y\mathbf{y}^0$ на орты

$$\mathbf{e}_{\mathrm{L}} = (\mathbf{x}^0 - i\mathbf{y}^0)/\sqrt2, \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{R}} = (\mathbf{x}^0 + i\mathbf{y}^0)/\sqrt2, \tag{8}$$

которые являются собственными векторами операции поворота вокруг оси z.

Операторы рождения $\hat{n}_\uparrow$ и $\hat{l}_\uparrow$ последовательно формируют состояния

$$\psi_{\perp nl} = \frac{(\hat{n}_\uparrow)^n\,(\hat{l}_\uparrow)^l\,\psi_{\perp 00}}{\sqrt{n!\,l!}} = \frac{(-1)^{n+l}\exp(w_1w_2/2)}{\sqrt{2\pi\,n!\,l!}\,\rho_0}\,\frac{\partial^{n+l}\exp(-w_1w_2)}{\partial w_2^n\,\partial w_1^l} =$$
$$= \frac{(w_1/w_2)^{(n-l)/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(-1)^{\min(n,l)}\sqrt{\min(n!,l!)}}{\sqrt{\max(n!,l!)}\,\rho_0}\,(w_1w_2)^{|n-l|/2}\exp(-w_1w_2/2)L^{(|n-l|)}_{\min(n,l)}(w_1w_2), \quad (9)$$

для которых одновременно определены кинетическая энергия и квадрат прицельного параметра:

$$K_{\perp n} = \hbar\omega_B\,(2n+1)/2, \qquad n = 0,1,2\ldots; \quad (10)$$

$$p_{\mathrm{hl}}^2 = \rho_0^2\,(2l+1), \qquad l = 0,1,2\ldots \quad (11)$$

В формуле (9) основное состояние

$$\psi_{\perp 00} = \frac{\exp(-w_1w_2/2)}{\sqrt{2\pi}\,\rho_0} = \frac{\exp[-(x^2+y^2)/(4\rho_0^2)]}{\sqrt{2\pi}\,\rho_0}$$

является собственным для обоих операторов уничтожения $\hat{n}_\downarrow$ и $\hat{l}_\downarrow$ с нулевым собственным числом: $\hat{n}_\downarrow\psi_{\perp 00} = \hat{l}_\downarrow\psi_{\perp 00} = 0$. Функции $\psi_{\perp nl}$ характеризуются единичной вероятностью в плоскости действительных значений x и y: $\iint_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\perp nl}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Представление состояний (9) в цилиндрических координатах ρ и ϕ выделяет азимутальный множитель

$$\frac{(w_1/w_2)^{(n-l)/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp[i\,(n-l)\,\phi]}{\sqrt{2\pi}}$$

с магнитным числом

$$m = n - l \quad (12)$$

и чисто действительную радиальную часть [14, § 112, з. 1], [25], [28, §§ 19, 20б], зависящую от произведения $w_1w_2 = \rho^2/(2\rho_0^2)$. Выражение для радиальной части через обобщённые полиномы Лагерра $L_N^{(|m|)}(w_1w_2)$ получается дифференцированием экспоненты $\exp(-w_1w_2)$ в формуле (9) сначала по переменной, по которой производная старше. Тогда последующее дифференцирование приобретает вид формулы Родригеса [29, § 22.11]

$$L_N^{(|m|)}(\zeta) = \frac{\exp(\zeta)}{N!\,\zeta^{|m|}}\,\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}\zeta^N}\left[\zeta^{N+|m|}\exp(-\zeta)\right].$$

3. АНСАМБЛЬ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Пусть состояние электрона до столкновения описывается некоторой матрицей плотности $\varrho(p_z,n,l;p_z',n',l')$ [14, § 14] в представлении по продольным импульсам p_z и числам n и l, которая нормирована условием единичной вероятности обнаружения частицы во всём объёме:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varrho(p_z,n,l;p_z,n,l)\,\mathrm{d}p_z = 1. \quad (13)$$

Переход к координатному представлению состоит в свёртке матрицы ϱ с собственными функциями $\psi_{\perp nl}\exp(ip_zz/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}$, нормированными на дельта-функцию по продольному импульсу:

$$\varrho(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \sum_{n,l,n',l'=0}^{\infty}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varrho(p_z,n,l;p_z',n',l')\psi_{\perp nl}(\mathbf{r}_\perp)\psi^*_{\perp n'l'}(\mathbf{r}'_\perp)\,\frac{\exp[i\,(p_zz-p_z'z')/\hbar]}{2\pi\hbar}\,\mathrm{d}p_z\,\mathrm{d}p_z'$$

(индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение).

Аксиальная и трансляционная симметрия в области до столкновения позволяет реализоваться также начальным состояниям, получаемым поворотом распределения ϱ вокруг оси z и последующим переносом на некоторый вектор $\mathbf{r}_0$. Все возможные трансляции и повороты формируют ансамбль с матрицей плотности

$$\overline{\varrho}(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\chi_B(\mathbf{r},\mathbf{r}';\mathbf{r}_0)]\varrho[\hat{O}_{\phi_0}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0);\hat{O}_{\phi_0}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)]\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}_0\,\mathrm{d}\phi_0. \tag{14}$$

Оператор $\hat{O}_{\phi_0}(\mathbf{r}'')$ поворачивает вектор $\mathbf{r}''$ вокруг оси z на угол $-\phi_0$. Фаза

$$\chi_B(\mathbf{r},\mathbf{r}';\mathbf{r}_0) = \frac{e}{\hbar c}\int\limits_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}}[\mathbf{A}(\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0)-\mathbf{A}(\mathbf{r}'')]\,\mathrm{d}\mathbf{r}'' = \frac{e}{\hbar c}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)\,(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \tag{15}$$

учитывает преобразование [14, § 111] волновой функции при её переносе в магнитном поле и соответствует переходу от векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ (как если бы начало отсчёта находилось в точке $\mathbf{r}_0$) к действующей величине $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Матрица (14) имеет диагональный вид в представлении по переменным p_z, n и l при однородном распределении по числу l:

$$\overline{\varrho}(p_z,n,l;p_z',n',l') = 4\pi^2\hbar\rho_0^2\,\delta(p_z-p_z')\delta_{nn'}\delta_{ll'}f_\mathrm{e}(p_z,n), \tag{16}$$

где $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера, $\delta(p_z-p_z')$ — дельта-функция. Формула (16) получается в результате несколько громоздких расчётов с использованием дифференциального представления (9) для функций $\psi_{\perp nl}$. Здесь функция

$$f_\mathrm{e}(p_z,n) = \sum_{l=0}^{\infty}\varrho(p_z,n,l;p_z,n,l)$$

описывает распределение электронов по импульсу p_z и уровням Ландау n и нормирована на единицу: $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\mathrm{e}(p_z,n)\,\mathrm{d}p_z = 1$, см. условие (13). Способ построения матрицы плотности (16) при условии (13) обеспечивает пространственно однородную концентрацию частиц $\overline{\varrho}(\mathbf{r};\mathbf{r}) = 1$.

Для электрона с определённой кинетической энергией $K_{\perp n}$ поперечная структура матрицы плотности (16)

$$\begin{aligned}\overline{\varrho}(\mathbf{r}_\perp,\mathbf{r}_\perp';z'=z) &= 2\pi\rho_0^2\sum_{l=0}^{\infty}\psi_{\perp nl}(\mathbf{r}_\perp)\psi_{\perp nl}^*(\mathbf{r}_\perp') = \\ &= \frac{\exp(w_1w_2/2+w_1'^*w_2'^*/2)}{n!}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial w_2^n\,\partial w_2'^{*n}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial^{2l}}{\partial w_1^l\,\partial w_1'^{*l}}\,\frac{\exp(-w_1w_2-w_1'^*w_2'^*)}{l!} = \\ &= \frac{\exp(w_1w_2/2+w_1'^*w_2'^*/2)}{n!}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial w_2^n\,\partial w_2'^{*n}}\exp(w_2w_2'^*-w_1w_2-w_1'^*w_2'^*) = \\ &= 2\pi\rho_0^2\psi_{\perp n0}(|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\perp'|)\psi_{\perp n0}^*(0)\exp[i\chi_B(\mathbf{r}_\perp,0;\mathbf{r}_\perp')]\end{aligned}$$

по сути зависит только от расстояния $|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\perp'|$ и повторяет волновую функцию $\psi_{\perp n0}$ с минимальным разбросом осей вращения ($l=0$) при заданной энергии (10). Фазовый множитель χ_B

определён формулой (15) и соответствует переносу центра симметрии волновой функции (по аргументу $\mathbf{r}_\perp$) из начала координат в точку $\mathbf{r}'_\perp$.

Таким образом, усреднение вероятностей радиационных переходов по возможным начальным «положениям» произвольного, в том числе чистого, состояния электрона эквивалентно использованию «универсальной» матрицы плотности (16) с однородным распределением по квадрату прицельного параметра (11).

4. СВОБОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАССЕИВАЮЩЕГО ЦЕНТРА

В соответствии с изложенным статистическим усреднением будем рассматривать чистые электронные состояния $\Psi^{(\varsigma)}_{Emn}$ с определённой механической энергией E, в которых на неподвижный притягивающий кулоновский центр с потенциалом

$$V(\rho,z)=\frac{-Ze^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \tag{17}$$

падает единственная волна с заданной поперечной структурой $\psi_{\perp n\,n-m}$; $Z>0$ — зарядовое число ядра. В пренебрежении тормозным излучением от ядра убегают волны только с теми же энергией E и азимутальным числом (12):

$$\begin{aligned}\Psi^{(\varsigma)}_{Emn}\Big|_{z\to-\infty}&=\delta_{\varsigma\mathrm{f}}\,\frac{\exp[iS_n(z)/\hbar]}{\sqrt{p_{\|n}/m_\mathrm{e}}}\,\psi_{\perp n\,n-m}+\sum_{n'=\max(0,m)}^{n_\mathrm{f}(E)}\frac{T^{(\mathrm{b})}_{n'}\exp[-iS_{n'}(z)/\hbar]}{\sqrt{p_{\|n'}/m_\mathrm{e}}}\,\psi_{\perp n'\,n'-m},\\ \Psi^{(\varsigma)}_{Emn}\Big|_{z\to+\infty}&=\delta_{\varsigma\mathrm{b}}\,\frac{\exp[-iS_n(z)/\hbar]}{\sqrt{p_{\|n}/m_\mathrm{e}}}\,\psi_{\perp n\,n-m}+\sum_{n'=\max(0,m)}^{n_\mathrm{f}(E)}\frac{T^{(\mathrm{f})}_{n'}\exp[iS_{n'}(z)/\hbar]}{\sqrt{p_{\|n'}/m_\mathrm{e}}}\,\psi_{\perp n'\,n'-m}.\end{aligned} \tag{18}$$

Индекс $\varsigma=\mathrm{f}$ маркирует состояния $\Psi^{(\varsigma)}_{Emn}$, в которых падающая на ядро волна распространяется в положительном направлении оси z, а $\varsigma=\mathrm{b}$ — в отрицательном. Символ Кронекера $\delta_{\varsigma\varsigma'}$ равен единице, если $\varsigma=\varsigma'$, и нулю в противоположном случае. Импульсы $p_{\|n}(E)=|p_z|=\sqrt{2m_\mathrm{e}\,(E-K_{\perp n})}$ положительны. Число

$$n_\mathrm{f}(E)=\mathrm{int}[E/(\hbar\omega_B)-1/2] \tag{19}$$

ограничивает суммирование уровнями Ландау с энергией $K_{\perp n}\le E$, которые разрешено занимать электрону после столкновения; функция $\mathrm{int}(\eta)$ — целая часть числа η. Нижний предел суммирования $\max(0,m)$ обусловлен тем, что существуют состояния $\psi_{\perp n'l'}$ только с неотрицательным квантовым числом l'. Укороченные действия

$$S_n(z;m,E)=\int\limits_0^z\sqrt{2m_\mathrm{e}\,[E-K_{\perp n}-V_{nn}(z';m)]}\,\mathrm{d}z'$$

учитывают медленный набег эйконала сверх величины $p_{\|n}z/\hbar$ [14, § 135]; здесь матричные элементы $V_{nn}(z;m)=\iint_{-\infty}^{+\infty}V(\rho,z)\,|\psi_{\perp n\,n-m}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ отрицательны.

В состояниях $\Psi^{(\varsigma)}_{Emn}$ падающий на ядро поток равен единице, а убегающие потоки электронов в состояниях ς', n' равны величинам $|T^{(\varsigma')}_{n'}|^2$. Амплитуды уходящих волн $T^{(\varsigma')}_{n'}(\varsigma,n;m,E)$ образуют унитарную матрицу упругого рассеяния (S-матрицу):

$$\sum_{\varsigma'=\mathrm{f,b}} \sum_{n'=\max(0,m)}^{n_{\mathrm{f}}(E)} T_{n'}^{(\varsigma')*}(\varsigma_1, n_1; m, E) T_{n'}^{(\varsigma')}(\varsigma_2, n_2; m, E) = \delta_{\varsigma_1\varsigma_2}\delta_{n_1n_2}, \tag{20}$$

где номера уровней Ландау n_1 и n_2 изменяются в пределах от $\max(0, m)$ до $n_{\mathrm{f}}(E)$. Унитарность следует из сохранения суммарного уходящего потока равным единице как для каждого состояния $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$, так и для суперпозиции состояний $[\Psi_{Emn_1}^{(\varsigma_1)} + \Psi_{Emn_2}^{(\varsigma_2)} \exp(i\,\Delta\phi_{21})]/\sqrt{2}$ с произвольным фазовым сдвигом $\Delta\phi_{21}$, где интерферирующие состояния отличаются хотя бы по одному из индексов ς или n.

Вблизи рассеивающего центра поперечная структура состояния $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ складывается не только из функций $\psi_{\perp n'\,n'-m}$ с энергиями $K_{\perp n'} \le E$, но и функций с бóльшими значениями $K_{\perp n'}$. В случае ближних столкновений в условиях фотосферы магнитного белого карлика многочисленные составляющие $\psi_{\perp n'\,n'-m}$ с числами $n' \gg n_{\mathrm{f}}(E)$ описывают квазисвязанное движение электрона вблизи ядра.

Состояния $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ взаимно-ортогональны и нормированы на дельта-функцию по энергии с коэффициентом $2\pi\hbar$ [12]:

$$\langle \Psi_{E_1m_1n_1}^{(\varsigma_1)} \mid \Psi_{E_2m_2n_2}^{(\varsigma_2)} \rangle = 2\pi\hbar\, \delta(E_1 - E_2) \delta_{m_1m_2} \delta_{\varsigma_1\varsigma_2} \delta_{n_1n_2}, \tag{21}$$

что доказывается с помощью подхода [30, гл. 2, § 8], в котором функции $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ рассматриваются как предел волновых пакетов с узким энергетическим спектром.

Состояние частицы после излучения фотона (без рекомбинации) может быть представлено во всём пространстве как суперпозиция функций $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ (с добавлением состояний дискретного спектра). При этом спектр амплитуд в суперпозиции сингулярный по типу фурье-спектра степфункции [14, § 43], что обеспечивает, в частности, наличие только убегающих от ядра потоков при $|z| \to \infty$. Для расчёта потока электронов на конкретном уровне Ландау после излучения фотона функции $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ не так удобны, как собственные функции $\check{\Psi}_{Emn}^{(\varsigma)}$ «безызлучательной» задачи, в которых суперпозиция волн падает на ядро и после рассеяния складывается в единственную уходящую волну [14, § 136], [30, гл. 6, § 4; гл. 7, § 2], [31, §§ 56, 92]. Состояния $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ и $\check{\Psi}_{Emn}^{(\varsigma)}$ связаны унитарным преобразованием, порождаемым матрицей рассеяния:

$$\Psi_{Emn}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma'=\mathrm{f,b}} \sum_{n'=\max(0,m)}^{n_{\mathrm{f}}(E)} T_{n'}^{(\varsigma')}(\varsigma, n; m, E) \check{\Psi}_{Emn'}^{(\varsigma')}, \tag{22}$$

$$\check{\Psi}_{Emn}^{(\varsigma)} = \sum_{\varsigma'=\mathrm{f,b}} \sum_{n'=\max(0,m)}^{n_{\mathrm{f}}(E)} T_{n}^{(\varsigma)*}(\varsigma', n'; m, E) \Psi_{Emn'}^{(\varsigma')}. \tag{23}$$

5. ВЕРОЯТНОСТЬ РАДИАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

5.1. Уравнение Шрёдингера для электрона при тормозном излучении

Эволюцию частицы и электромагнитных волн описываем уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} = (\hat{H}_{\mathrm{e}} + \hat{H}_{\mathrm{ph}} + \hat{H}_{\mathrm{int}})\, \mathbf{\Psi} \tag{24}$$

с гамильтонианами: для электрона

$$\hat{H}_{\rm e} = \frac{\hat{p}_z^2}{2m_{\rm e}} + \hbar\omega_B\,(\hat{n}_\uparrow \hat{n}_\downarrow + 1/2) + V, \tag{25}$$

для фотонов $\hat{H}_{\rm ph} = \sum_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}} \hbar\omega \hat{n}_{\rm ph\uparrow}\hat{n}_{\rm ph\downarrow}$ (без энергии нулевых колебаний [31, § 3]) и для взаимодействия подсистем в дипольном приближении [28, § 18], [32, гл. 21, § 30]

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{e\hat{\mathbf{A}}_{\rm ph}\hat{\mathbf{v}}}{c} = \sqrt{\frac{2\pi e^2\hbar}{\omega\mathcal{V}_0}} \sum_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}} (\hat{n}_{\rm ph\downarrow}\mathbf{e}_{\rm ph} + \hat{n}_{\rm ph\uparrow}\mathbf{e}_{\rm ph}^*) \left[\frac{\mathbf{z}^0\hat{p}_z}{m_{\rm e}} + i\omega_B\rho_0\,(\mathbf{e}_{\rm L}\hat{n}_\uparrow - \mathbf{e}_{\rm R}\hat{n}_\downarrow)\right]. \tag{26}$$

Здесь поперечная скорость электрона $\hat{\mathbf{v}}_\perp = \hat{v}_x\mathbf{x}^0 + \hat{v}_y\mathbf{y}^0$ выражена через её проекции на орты (8), которые пропорциональны операторам (3) и (4); $\hat{p}_z = -i\hbar\,\partial/\partial z$. Фотоны во вспомогательном объёме $\mathcal{V}_0$ характеризуются волновыми векторами $\mathbf{k}_{\rm ph}$, векторами поляризации $\mathbf{e}_{\rm ph}$ и собственными частотами $\omega(\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph})$; $\hat{n}_{\rm ph\downarrow}(\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph})$ и $\hat{n}_{\rm ph\uparrow}(\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph})$ — операторы уничтожения и рождения фотонов.

Задачу о спонтанном тормозном излучении сформулируем так, что в удалённом прошлом система находилась в состоянии $|0\rangle$ с нулевым числом фотонов во всех волнах. Взаимодействие «включается» в момент $t = -T$, где интервал T длиннее времени возбуждения/жизни автоионизационных состояний. Необходимо определить состояние системы при $t = 0$.

Последнее приближённо представляет собой суперпозицию базисных векторов $|1_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}}\rangle$, в которых только одна из электромагнитных волн находится в состоянии с одним фотоном. Нормы волновых функций при векторах поля $|1_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}}\rangle$ увеличиваются пропорционально длительности взаимодействия T и характеризуют вероятности спонтанного излучения. В случае тормозного излучения в окрестности ядра устанавливается стационарная электронная амплитуда, так что норма последней возрастает за счёт удалённой от ядра области, в которую оттекают частицы в конечном состоянии. Соответственно, искомая вероятность P_σ испускания фотона определяется суммарным потоком уходящих от ядра электронов при соответствующем состоянии поля $|1_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}}\rangle$.

Проекция уравнения Шрёдингера (24) на вектор $|1_{\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph}}\rangle$ определяет эволюцию электронной амплитуды $\Psi_{1t}(\mathbf{r},t;\mathbf{k}_{\rm ph},\mathbf{e}_{\rm ph})$ при данном состоянии поля:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{1t}}{\partial t} = (\hat{H}_{\rm e} + \hbar\omega)\,\Psi_{1t} + \mathbf{e}_{\rm ph}^* \sum_{\sigma=z,{\rm R},{\rm L}} \mathbf{e}_\sigma\,\hat{W}_\sigma\Psi_{0t}, \tag{27}$$

где операторы

$$\hat{W}_z = \sqrt{\frac{2\pi e^2\hbar}{\omega\mathcal{V}_0}}\,\frac{\hat{p}_z}{m_{\rm e}}, \qquad \hat{W}_{\rm R} = -i\omega_B\rho_0\sqrt{\frac{2\pi e^2\hbar}{\omega\mathcal{V}_0}}\,n_\downarrow, \qquad \hat{W}_{\rm L} = i\omega_B\rho_0\sqrt{\frac{2\pi e^2\hbar}{\omega\mathcal{V}_0}}\,n_\uparrow \tag{28}$$

описывают спонтанное излучение волн с «эталонными» векторами поляризации $\mathbf{e}_{\rm R}$, $\mathbf{e}_{\rm L}$ и $\mathbf{e}_z = \mathbf{z}^0$. (В волне с круговой поляризацией $\sigma = {\rm R}$ электрическое поле вращается в ту же сторону, что и электрон в магнитном поле.)

В качестве волновой функции Ψ_{0t} при начальном векторе поля $|0\rangle$ рассматриваем состояния (18) — с временны́ми факторами $\exp(-iEt/\hbar)$. В соответствии со своими амплитудами $\mathbf{e}_{\rm ph}^*\mathbf{e}_\sigma$ «источники» $\mathbf{e}_{\rm ph}^*\mathbf{e}_\sigma\,\hat{W}_\sigma\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}\exp(-iEt/\hbar)$ в уравнении (27) порождают в волновой функции Ψ_{1t} взаимно-ортогональные компоненты $\mathbf{e}_{\rm ph}^*\mathbf{e}_\sigma\,\Psi_{1\sigma t}$ с азимутальными числами $m + \Delta m_\sigma$. Изменения азимутального числа

$$\Delta m_z = 0, \qquad \Delta m_{\rm R} = -1, \qquad \Delta m_{\rm L} = 1 \tag{29}$$

соответствуют правилам отбора при дипольном излучении системы с аксиальной симметрией [31, § 46]. Так, операторы уничтожения (3) и рождения (4) в операторах $\hat{W}_{\rm R}$ и $\hat{W}_{\rm L}$ «синхронно» изменяют номер уровня Ландау и число $m = n - l$.

«Эталонные» амплитуды $\Psi_{1\sigma}$ в установившемся около ядра стационарном распределении $\Psi_{1t} = \exp(-iEt/\hbar)\,\mathbf{e}_{\rm ph}^{*}\sum_{\sigma=z,{\rm R},{\rm L}}\mathbf{e}_{\sigma}\Psi_{1\sigma}$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$(E - \hbar\omega)\,\Psi_{1\sigma} = \hat{H}_{\rm e}\Psi_{1\sigma} + \hat{W}_{\sigma}\Psi_{Emn}^{(\varsigma)} \tag{30}$$

с условием отсутствия набегающих из бесконечности к ядру потоков. Уходящие потоки в состоянии $\Psi_{1\sigma}$ характеризуем амплитудами $\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}(\omega; E, m, n, \varsigma)$, определёнными аналогично выражению (18). Величина $|\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}|^2$ равна отношению соответствующего потока к единичному набегающему потоку в начальном состоянии $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$ и есть не что иное, как парциальная вероятность спонтанного излучения фотона с вектором поляризации $\mathbf{e}_{\sigma}$ (с уходом электрона на бесконечность в состоянии с энергией $E - \hbar\omega$ и остальными квантовыми числами $m' = m + \Delta m_{\sigma}$, n' и ς'). Доступные в результате излучения уровни Ландау занимают интервал $\max(0, m + \Delta m_{\sigma}) \le n' \le$ $\le n_{\rm f}(E - \hbar\omega)$.

5.2. Соотношение взаимности

Для расчёта амплитуд $\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}$ воспользуемся соотношением взаимности между решениями волновых уравнений с разными источниками [32, гл. 19, § 19], [33, гл. 14]. Возьмём разность неоднородного уравнения (30) для состояния $\Psi_{1\sigma}$ и однородного уравнения $(E - \hbar\omega)\,\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*} =$ $= \hat{H}_{\rm e}^{*}\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*}$ для одной из комплексно-сопряжённых функций (23) с весовыми множителями в виде противоположной функции в паре, $\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*}$ и $\Psi_{1\sigma}$ соответственно. «Взвешенная» разность левых частей уравнений равна нулю. Интегрируем аналогичную разность правых частей уравнений по цилиндрическому объёму $\mathcal{V}'$ со стационарной частью распределения Ψ_{1t} (т. е. не доходящему до удалённых передних фронтов убегающих течений). Часть интеграла с разностью $\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*}\hat{H}_{\rm e}\Psi_{1\sigma} - \Psi_{1\sigma}\hat{H}_{\rm e}^{*}\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*}$ приводится к потоку комплексного вектора через поверхность объёма $\mathcal{V}'$. Вектор подобен интерференционной части плотности потока в магнитном поле [14, § 115] для суперпозиции состояний $\Psi_{1\sigma} + \check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')}$.

Поток сквозь удалённую боковую поверхность цилиндра нулевой. Интеграл по торцам цилиндра равен величине $-i\hbar\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}$ и определяется произведением единичной амплитуды единственного направленного от ядра течения во вспомогательном состоянии $\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')}$ и соответствующего потока с амплитудой $\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}$ в состоянии $\Psi_{1\sigma}$. Направленные к ядру течения в волновой функции $\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')}$ дают нулевой вклад в силу отсутствия аналогичных движений в состоянии $\Psi_{1\sigma}$. Таким образом, «взаимный» поток $-i\hbar\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}$ в сумме с объёмной свёрткой «источника» в уравнении (30) с функцией $\check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')*}$ равны нулю, что определяет искомую амплитуду

$$\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}(\omega; E, m, n, \varsigma) = \big\langle \check{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_{\sigma}\, n'}^{(\varsigma')}\big|\, \hat{W}_{\sigma}\, \big|\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}\big\rangle \big/ (i\hbar). \tag{31}$$

5.3. Инвариантность вероятности перехода к смене базиса конечных состояний

Сумма парциальных вероятностей $|\mathcal{T}_{\sigma n'}^{(\varsigma')}|^2$ по всем возможным каналам n' и ς' выхода частицы определяет полную вероятность тормозного излучения фотона с поляризацией σ из начального электронного состояния $\Psi_{Emn}^{(\varsigma)}$:

$$P_\sigma(\omega; E, m, n, \varsigma) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\varsigma'=\mathrm{f,b}} \sum_{n'=\max(0, m+\Delta m_\sigma)}^{n_\mathrm{f}(E-\hbar\omega)} \left| \left\langle \widetilde{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_\sigma\, n'}^{(\varsigma')} \right| \hat{W}_\sigma \left| \Psi_{Emn}^{(\varsigma)} \right\rangle \right|^2, \tag{32}$$

где $\widetilde{\Psi} = \check{\Psi}$. Двойная сумма (32) представляет собой след матрицы $Q_{\varsigma'\, n';\varsigma''\, n''}$, составленной из произведений матричных элементов $\langle \widetilde{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_\sigma\, n'}^{(\varsigma')} | \hat{W}_\sigma | \Psi_{Emn}^{(\varsigma)} \rangle$ и $(\langle \widetilde{\Psi}_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_\sigma\, n''}^{(\varsigma'')} | \hat{W}_\sigma | \Psi_{Emn}^{(\varsigma)} \rangle)^*$. Унитарное преобразование функций $\widetilde{\Psi}$ сохраняет след матрицы $\mathbf{Q}$, а следовательно, и вероятность P_σ. Поэтому в качестве базиса $\widetilde{\Psi}$ можно использовать и «начальные» состояния $\Psi_{E-\hbar\omega\, m+\Delta m_\sigma\, n'}^{(\varsigma')}$, которые связаны с функциями $\check{\Psi}$ унитарным преобразованием (22), (23).

Без доказательства укажем, что в условиях фотосферы магнитного белого карлика, где продольное движение электрона сохраняется квазиклассическим даже при существенном зазоре между уровнями Ландау, подстановка $\widetilde{\Psi} = \Psi$ упрощает расчёт вероятности излучения фотона с частотой (1) при дальних столкновениях: сумма (32) определяется единственным слагаемым с одинаковыми «начальными» уровнями $n' = n$ для любой поляризации σ. В ближних столкновениях однонаправленное движение электрона сменяется квазисвязанным. В этом случае следует совершить унитарный переход к чётным и нечётным функциям продольной координаты z.

6. СПЕКТРАЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Сечение излучения $\Sigma_\sigma(\omega; E, n, \varsigma)$ по числу испускаемых фотонов в волну с поляризацией σ равно сумме вероятностей (32) по квантовому числу $l = n - m$ прицельного параметра с весовым множителем $2\pi\rho_0^2$ — шагом квантования площадей окружностей с квадратами радиусов (11). Сечение излучения в единичные интервал частот ω и телесный угол Ω получается умножением величины $\Sigma_\sigma(\omega; E, n, \varsigma)$ на соответствующую плотность числа электромагнитных волн $\mathrm{d}N_{\mathbf{e}_\mathrm{ph}}/(\mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\Omega) = \mathcal{V}_0\omega^2/(2\pi c)^3$, а спектральная мощность излучения — последующим умножением на квант энергии $\hbar\omega$, концентрацию ядер n_i и начальную продольную скорость частицы $p_{\|n}/m_\mathrm{e}$:

$$I_{\sigma 0}(\omega; E, n, \varsigma) = \\ = \frac{n_\mathrm{i}\, (p_{\|n}/m_\mathrm{e})\, e^2\omega^2\rho_0^2}{2\pi c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\varsigma'=\mathrm{f,b}} \sum_{n'=\max(0, n-l+\Delta m_\sigma)}^{n_\mathrm{f}(E-\hbar\omega)} \left| \left\langle \widetilde{\Psi}_{E-\hbar\omega\, n-l+\Delta m_\sigma\, n'}^{(\varsigma')} \right| \hat{v}_\sigma \left| \Psi_{E\, n-l\, n}^{(\varsigma)} \right\rangle \right|^2, \tag{33}$$

где компоненты скорости $\hat{v}_z = \hat{p}_z/m_\mathrm{e}$, $\hat{v}_\mathrm{R} = (\hat{v}_x - i\hat{v}_y)/\sqrt{2} = -i\omega_B\rho_0 n_\downarrow$, $\hat{v}_\mathrm{L} = (\hat{v}_x + i\hat{v}_y)/\sqrt{2} = = i\omega_B\rho_0 n_\uparrow$, средние нижние индексы $n - l + \Delta m_\sigma$ и $n - l$ у функций $\widetilde{\Psi}$ и Ψ равны азимутальным числам этих состояний. Функциями $\widetilde{\Psi}$ могут быть как функции $\check{\Psi}$, так и Ψ с теми же индексами, которые указаны в сумме (33).

Для волн с произвольным вектором поляризации $\mathbf{e}_\mathrm{ph}$ спектральная мощность излучения $I_{\mathbf{e}_\mathrm{ph}}$ определяется взвешенной суммой интенсивностей (33) в соответствии с амплитудами $\mathbf{e}_\mathrm{ph}^*\mathbf{e}_\sigma$ «базисных источников» в уравнении (27):

$$I_{\mathbf{e}_\mathrm{ph}}(\omega; E, n, \varsigma) = \sum_{\sigma=z,\mathrm{R,L}} |\mathbf{e}_\mathrm{ph}^*\mathbf{e}_\sigma|^2\, I_{\sigma 0}. \tag{34}$$

Сумма (34) соответствует излучению трёх некогерентных диполей, моменты которых пропорциональны векторам $\mathbf{z}^0$, $\mathbf{e}_\mathrm{R}$ и $\mathbf{e}_\mathrm{L}$. Мощности излучения диполей во все направления равны $8\pi I_{\sigma 0}/3$.

Квантовое выражение (33) для спектральной мощности получается из классической формулы [34, ф. (3.17)] заменой фурье-амплитуды скорости на сумму матричных элементов оператора скорости по всем возможным «каналам» выхода частицы при заданном начальном состоянии. В матричных элементах бра- и кет-векторы нормированы условием единичного набегающего на ядро (или равного ему уходящего) потока частиц; см. разделы [14, § 48], [31, § 45] о соответствии фурье-амплитуд и матричных элементов при нормировке (21). Интегрирование по прицельному параметру трансформируется в суммирование по квантовому числу l с весовым множителем $2\pi\rho_0^2$.

При классическом описании движения электрона в условиях фотосферы магнитного белого карлика вклад дальних столкновений в спектральную мощность тормозного излучения удобнее рассчитывать с использованием фурье-амплитуды ускорения, а не скорости [20, 21]. При квантовом рассмотрении аналогичный переход осуществляется с помощью коммутатора

$$\{\hat{\mathbf{v}}, \hat{H}_{\rm e}\} = \hbar\omega_B \left(\mathbf{e}_{\rm R}\hat{v}_{\rm R} - \mathbf{e}_{\rm L}\hat{v}_{\rm L}\right) - i\hbar\,\nabla V/m_{\rm e}, \qquad (35)$$

матричные элементы которого для собственных состояний гамильтониана (25) с энергиями $E-\hbar\omega$ и E равны матричным элементам оператора $\hbar\omega\hat{\mathbf{v}}$. Согласно равенству (35) матричные элементы скорости в выражении (33) для спектральной мощности излучения могут быть заменены матричными элементами кулоновской «силы» с соответствующими коэффициентами:

$$\hat{v}_z \leftrightarrow \frac{-i\mathbf{z}^0\,\nabla V}{\omega m_{\rm e}}\,, \qquad \hat{v}_{\rm R} \leftrightarrow \frac{-i\mathbf{e}_{\rm R}^*\,\nabla V}{(\omega-\omega_B)\,m_{\rm e}}\,, \qquad \hat{v}_{\rm L} \leftrightarrow \frac{-i\mathbf{e}_{\rm L}^*\,\nabla V}{(\omega+\omega_B)\,m_{\rm e}}\,. \qquad (36)$$

Операторы рождения (6) и уничтожения (5) для собственных функций квадрата прицельного параметра коммутируют с кинетической энергией поперечного движения в силу соотношений (2), поэтому их коммутаторы с гамильтонианом $\hat{H}_{\rm e}$ пропорциональны градиенту кулоновского потенциала:

$$\{\hat{l}_\uparrow, \hat{H}_{\rm e}\} = \frac{-\hbar\mathbf{e}_{\rm R}^*\nabla V}{\omega_B\rho_0 m_{\rm e}}\,, \qquad \{\hat{l}_\downarrow, \hat{H}_{\rm e}\} = \frac{\hbar\mathbf{e}_{\rm L}^*\nabla V}{\omega_B\rho_0 m_{\rm e}}\,. \qquad (37)$$

Равенства (37) и подстановка (36) позволяют использовать в выражении (33) вместо поперечных компонент скорости также операторы $l_\uparrow$ и $l_\downarrow$:

$$\hat{v}_{\rm R} \leftrightarrow \frac{i\omega\omega_B\rho_0}{\omega-\omega_B}\,\hat{l}_\uparrow, \qquad \hat{v}_{\rm L} \leftrightarrow \frac{-i\omega\omega_B\rho_0}{\omega+\omega_B}\,\hat{l}_\downarrow. \qquad (38)$$

При классическом рассмотрении тормозного излучения на частотах (1) квантовая замена (38) соответствует переходу от фурье-амплитуды скорости электрического дрейфа в кулоновском и магнитном полях к фурье-амплитуде положения оси циклотронного вращения. В случае столкновений с квазисвязанным движением в условиях фотосферы магнитного белого карлика матричные элементы операторов $l_\uparrow$ и $l_\downarrow$ определяются разностью набега эйконалов компонент волновых функций на трассе между ядром и классическими точками смены направления продольного движения. Поэтому квантовая подстановка (38) помогает подтвердить вывод классического рассмотрения [21], что основной вклад в излучение на частоте (1) даёт квазисвязанное движение на таких уровнях Ландау, для которых время классического пробега между точками разворота порядка ω^{-1}.

7. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПОДВИЖНОГО РАССЕИВАЮЩЕГО ЦЕНТРА

Как отмечалось во введении, просветление фотосферы магнитного белого карлика по столкновительному поглощению для одной из нормальных волн обусловлено наличием полностью связанных классических траекторий с положительной энергией в системе «электрон—неподвижное ядро» — долгоживущих автоионизационных состояний в квантовом описании. При классическом подходе указанные траектории существенно уменьшают объём фазового пространства, доступного свободным частицам с низкой механической энергией

$$E \ll E_{\mathrm{u}} = \frac{Ze^2}{2L_{\mathrm{u}}} = 13{,}6Z^2 \left(\frac{B}{B_{\mathrm{c}}}\right)^{2/3} \ \text{эВ} \tag{39}$$

для тормозного излучения около ядра (по сравнению со случаем отсутствия магнитного поля). В формуле (39) расстояние

$$L_{\mathrm{u}} = \left(\frac{Zm_{\mathrm{e}}c^2}{B^2}\right)^{1/3} = 0{,}53Z^{-1} \left(\frac{B}{B_{\mathrm{c}}}\right)^{-2/3} \ \text{Å} \tag{40}$$

— радиус круговой «кеплеровой» орбиты, период обращения по которой в отсутствие магнитного поля совпадает с заданным циклотронным периодом $2\pi/\omega_B$; магнитное поле нормировано на индукцию

$$B_{\mathrm{c}} = \frac{Z^2e^3m_{\mathrm{e}}^2c}{\hbar^3} = 2{,}35Z^2 \ \text{ГГс},$$

при которой кинетическая энергия $\hbar\omega_B/2$ на основном уровне Ландау равна энергии ионизации $13{,}6Z^2$ эВ водородоподобного иона (атома) с зарядовым числом ядра Z.

Для медленных частиц (39) реализуется интервал прицельных параметров

$$L_{\mathrm{u}} \ll p_{\mathrm{h}} \ll Ze^2/(2E), \tag{41}$$

в котором энергия кулоновского взаимодействия Ze^2/p_{h} превышает величину E, а электрон совершает много циклотронных оборотов за характерное классическое время пролёта около ядра. Частицы с энергией (39) существуют в магнитном поле

$$B < B_{\mathrm{c}}.$$

В более сильном магнитном поле минимальная возможная кинетическая энергия электрона $\hbar\omega_B/2$ превосходит верхний предел E_{u} в неравенстве (39) и одновременно квантовый радиус ρ_0 поперечной локализации электрона оказывается больше расстояния $Ze^2/(2E)|_{E=\hbar\omega_B/2}$, лишь до которого кулоновская потенциальная энергия $|V|$ превышает квант $\hbar\omega_B$.

При классическом рассмотрении в одном пролёте около ядра спектр излучения электрона (для заданной поляризации) одинаков на свободной и связанной траекториях с равными прицельными параметрами. Однако периодическое движение по связанной орбите группирует спектр в линии. В квантовом подходе долгоживущие квазисвязанные состояния возбуждаются в узких полосах энергии, а спектральные линии соответствуют радиационным переходам между этими состояниями. Согласно квазиклассической оценке [35] указанные спектральные линии не перекрываются между собой из-за теплового движения рассеивающих центров, что является необходимым условием для просветления плазмы в континууме.

Связанные орбиты с положительной энергией порождены сохранением обобщённого момента импульса (в проекции на направление магнитного поля) и наличием адиабатического инварианта в виде энергии циклотронного вращения в интервале прицельных параметров $p_{\mathrm{h}} \gg L_{\mathrm{u}}$. Движение рассеивающего центра нарушает аксиальную симметрию задачи в одночастичной постановке.

Тем не менее обобщённый момент импульса электрона (в системе отсчёта ядра) остаётся адиабатическим инвариантом, если лёгкая частица обращается по азимуту вокруг тяжёлой быстрее, чем последняя успевала бы покинуть область взаимодействия при своём поперечном движении. Такое условие означает высокую дрейфовую скорость электрона $v_{\mathrm{dr}} = cZe/(Bp_{\mathrm{h}}^2)$ в скрещённых кулоновском и магнитном полях по сравнению со скоростью центра масс системы. Данное требование эквивалентно высокой напряжённости поля кулоновского взаимодействия по сравнению с дополнительным однородным электрическим полем, которое возникает при переходе в систему отсчёта ядра. Последняя формулировка критерия малой скорости центра масс одинакова как при классическом, так и квантовом рассмотрении двухчастичной задачи [36, 37].

Вышеизложенное общее условие налагает частное ограничение, что электрон должен совершать оборот вокруг ядра в поперечной плоскости быстрее, чем за ядерный циклотронный период. При более медленном обращении ядро вовлекается в электрический дрейф, так что дополнительное электрическое поле в системе центра масс достигает напряжённости кулоновского поля электрона e/p_{h}^2.

Таким образом, приближение неподвижного рассеивающего центра выполняется для связанных траекторий (долгоживущих автоионизационных состояний) с прицельными параметрами (41) в случае тепловых энергий частиц

$$\left(\frac{Zm_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}\right)^{1/3} E_{\mathrm{u}} \ll E \ll E_{\mathrm{u}}, \tag{42}$$

где m_{i} — масса ядра. В таких состояниях электрон и ядро с энергиями (42) совершают совместное циклотронное вращение как ион с зарядовым числом $Z-1$ (прямолинейное движение при $Z=1$).

При меньшей энергии, $E \ll (Zm_{\mathrm{e}}/m_{\mathrm{i}})^{1/3}\, E_{\mathrm{u}}$, однородное по азимуту относительное движение в долгоживущем квазисвязанном состоянии сохраняется для прицельных параметров

$$L_{\mathrm{u}} \ll p_{\mathrm{h}} \ll \left(\frac{Zm_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}\right)^{-1/3} L_{\mathrm{u}}, \tag{43}$$

при которых не только дрейфовая скорость электрона выше тепловой скорости ядра, но и период дрейфового обращения $2\pi p_{\mathrm{h}}/v_{\mathrm{dr}}$ вокруг рассеивающего центра короче ядерного циклотронного периода. Эти траектории полностью замещаются «децентрированными» орбитами при бóльших прицельных параметрах, когда лёгкая и тяжёлая частицы совершают циклотронное вращение раздельно по малым (по сравнению с расстоянием между ними) окружностям. В свою очередь, óси циклотронного вращения дрейфуют под действием кулоновского поля вокруг общего центра по окружностям с радиусами $Zp_{\mathrm{h}}/(Z-1)$ и $p_{\mathrm{h}}/(Z-1)$ для электрона и ядра соответственно (в случае $Z=1$ окружности вырождаются в прямые). Такое движение подобно «децентрированному» иону (или атому) в более сильном магнитном поле $B \gg B_{\mathrm{c}}$ [38].

Только модификация, а не разрушение долгоживущих автоионизационных состояний сохраняет необходимое условие для поляризационного просветления фотосферы магнитного белого карлика по столкновительному поглощению в континууме, которое состоит в группировке спектра излучения за счёт переходов между связанными орбитами в неперекрывающиеся линии. Для белых карликов с наиболее сильным магнитным полем порядка B_{c} нижняя граница в неравенстве (42) достигает тепловой энергии частиц в фотосфере порядка электрон-вольта. Поэтому в атмосферах таких звёзд возможно формирование не только аксиально-симметричных по относительному движению, но и «децентрированных» автоионизационных состояний.

В классической «децентрированной» системе суммарный дрейфовый ток электрона и ядра равен нулю, что могло бы способствовать дополнительному просветлению плазмы по столкновительному поглощению на частотах ниже ядерной циклотронной частоты. Однако в случае магнитных белых карликов длина волны протонного циклотронного резонанса попадает в дальний инфракрасный диапазон, где излучение звёзд данного класса слишком слабо для регистрации. Последнее обстоятельство указывает также на малый шаг квантования энергии протонных уровней Ландау по сравнению с тепловой энергией частиц порядка электрон-вольта. В свою очередь, тормозное излучение в диапазоне частот ядерного циклотронного резонанса для нейтронных звёзд с существенно более сильным магнитным полем $B \gg B_{\text{c}}$ (когда автоионизационные состояния несущественны) исследовалось в работах [39, 40].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены вероятности радиационных переходов при низкоэнергичных электрон-ядерных столкновениях в сильном магнитном поле с целью дальнейшего расчёта спектральной мощности тормозного излучения и столкновительного поглощения в условиях фотосферы магнитного белого карлика, где движение свободного электрона становится квазисвязанным при пролёте около ядра. Показано, что усреднение вероятностей испускания фотона по возможным положениям относительно ядра произвольного начального электронного волнового пакета достигается использованием ансамбля взаимно-некоррелированных собственных состояний операторов кинетической энергии и квадрата прицельного параметра. Если до столкновения частица сосредоточена только на одном уровне Ландау, матрица плотности указанного ансамбля эквивалентна пространственно однородному некоррелированному распределению осей симметрии (циклотронного вращения) для наиболее локализованного в поперечной плоскости состояния электрона с данной энергией.

Проанализированы свойства стационарных электронных волновых функций в поле неподвижного замагниченного кулоновского центра в условиях, когда заданным энергии и азимутальному числу соответствуют несколько каналов рассеяния.

С помощью соотношения взаимности, аналогичного используемому при решении задачи о возбуждении волновода заданными источниками [33, гл. 14], получено выражение для вероятности свободно-свободного радиационного перехода через матричные элементы скорости. Квантовое выражение для спектральной мощности тормозного излучения получается из формул для ньютонова движения электрона заменой фурье-амплитуд скорости на матричные элементы оператора скорости для состояний, нормированных условием единичного набегающего (или равного ему уходящего) потоков.

Сделан переход от матричных элементов скорости к матричным элементам градиента кулоновского потенциала и положения оси циклотронного вращения. Такая замена позволяет перенести результаты расчётов спектральной мощности тормозного излучения и столкновительного поглощения в приближении классического движения электрона [20, 21] на квантовый случай, когда электрон может занимать только основной уровень Ландау до и после столкновения. Указанный квантовый предел должен соответствовать наиболее сильному проявлению поляризационного просветления фотосферы одиночного магнитного белого карлика в наблюдаемом континуальном излучении на частотах (1).

Обсуждено сохранение долгоживущих квазисвязанных состояний с положительной энергией в замагниченной кулоновской системе при учёте движения ядра — необходимого условия для рассматриваемого просветления плазмы по столкновительному поглощению в континууме.

Исследования по разделу «Ансамбль начальных состояний» выполнены при поддержке Минобрнауки РФ (договор 14.Z50.31.0007), «Свободные состояния электрона в магнитном поле при наличии рассеивающего центра» — РФФИ (проект 14–02–00766-а), «Вероятность радиационного перехода» — Президиума РАН (программа фундаментальных исследований П-7, подпрограмма «Переходные и взрывные процессы в астрофизике»), «Спектральная мощность тормозного излучения» — Российского научного фонда (грант 16–12–10528), «Приближение неподвижного рассеивающего центра» — бюджетного финансирования по госзаданию для ИПФ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedrich H., Wintgen D. // Phys. Rep. 1989. V. 183. P. 37.
2. Wickramasinghe D. T., Ferrario L. // Publ. Astron. Soc. Pacific. 2000. V. 112. P. 873.
3. Ferrario L., de Martino D., Gänsicke B. T. // Space Sci. Rev. 2015. V. 191. P. 111.
4. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К, 1997. 528 с.
5. Железняков В. В., Корягин С. А., Сербер А. В. // Письма Астрон. журн. 1999. Т. 25, № 7. С. 513.
6. West S. C. // Astrophys. J. 1989. V. 345. P. 511.
7. Delande D., Bommier A., Gay J. C. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 141.
8. Merani N., Main J., Wunner G. // Astron. Astrophys. 1995. V. 298. P. 193.
9. Potekhin A. Y., Pavlov G. G., Ventura J. // Astron. Astrophys. 1997. V. 317. P. 618.
10. Zhao L. B., Stancil P. C. // Phys. Rev. C. 2006. V. 74, No. 5. Art. no. 055401.
11. Zhao L. B., Stancil P. C. // Astrophys. J. 2007. V. 667. P. 1 119.
12. Chuluunbaatar O., Gusev A. A., Derbov V. L., et al. // J. Phys. A. 2007. V. 40. P. 11 485.
13. Chuluunbaatar O., Gusev A. A., Vinitsky S. I., et al. // Phys. Rev. C. 2008. V. 77, No. 3. Art. no. 034702.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004. 800 с.
15. Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 6. С. 512.
16. Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 8. С. 682.
17. Chandrasekhar S., Breen F. H. // Astrophys. J. 1946. V. 104. P. 430.
18. Al-Hujaj O.-A., Schmelcher P. // Phys. Rev. C. 2000. V. 61, No. 6. Art. no. 063413.
19. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
20. Бубукина И. И., Корягин С. А. // Журн. эксперим. теорет. физики. 2009. Т. 135, № 6. С. 1 056.
21. Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 10. С. 739.
22. Арсеньев С. А., Корягин С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 11. С. 726.
23. Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А. // Астрон. журн. 1978. Т. 55, № 2. С. 373.
24. Павлов Г. Г., Панов А. Н. // Журн. эксперим. теорет. физики. 1976. Т. 71, № 2. С. 572.
25. Johnson M. H., Lippmann B. A. // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 828.
26. Landau L. // Z. Phys. 1930. V. 64. P. 629.
27. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1979. 480 с.
28. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с.
29. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
30. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Т. 2. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 696 с.
31. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.
32. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 2. М.: Наука, 1979. 584 с.
33. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
34. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. М.: Мир, 1971. 440 с.
35. Арсеньев С. А., Корягин С. А. // Журн. эксперим. теорет. физики. 2012. Т. 141, № 6. С. 1 049.
36. Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. // Журн. эксперим. теорет. физики. 1967. Т. 53, № 2. С. 717.
37. Schmelcher P., Cederbaum L. S. // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 287.
38. Potekhin A. Y. // J. Phys. B. 1994. V. 27. P. 1 073.
39. Potekhin A. Y., Lai D. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2007. V. 376. P. 793.

40. Potekhin A. Y. // Astron. Astrophys. 2010. V. 518. Art. no. A24.

Поступила в редакцию 16 мая 2016 г.; принята в печать 7 ноября 2016 г.

PROBABILITIES OF BREMSSTRAHLUNG EMISSION OF PHOTONS AT LOW-ENERGY ELECTRON-NUCLEAR COLLISIONS IN MAGNETIC FIELDS

S. A. Koryagin and I. A. Balandin

We consider quantum-mechanical probabilities of Bremsstrahlung of photons in the case of low-energy Coulomb collisions in a magnetic field, where the scattering center perturbs the state of the incident electron to the degree, when the motion of the latter becomes quasi-bound. Quantum formulas for the spectral power of Bremsstrahlung radiation are obtained from the classical formulas by replacing the Fourier amplitudes of the particle velocities with matrix elements of the velocity operator for wave functions, which are normalized to the condition of a unit flux being incident on the nucleus (or an equivalent outgoing flux), with summation with respect to finite Landau levels and quantized values of the impact parameter. Equivalent forms of the specified matrix elements, which are expressed in terms of the Coulomb field and annihilation/creation operators for the eigenfunctions of the operator of the squared impact parameter, are presented. The obtained presentations for the spectral power of Bremsstrahlung radiation in the case of quasi-bound electron motions allow one to translate the results of calculating this value in the classic limit to the quantum case, which is typical of white dwarfs with the strongest magnetic fields.