

УДК 621.321

ОЦЕНКА МОМЕНТОВ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДОЙ И НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

А. П. Трифонов*, Ю. Э. Корчагин, С. В. Корольков

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Синтезированы квазиправдоподобный, максимально правдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с произвольной формой огибающей функции и неизвестными амплитудой и начальной фазой. Найдены асимптотические характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки моментов появления и исчезновения сигнала, наблюдаемого на фоне шума, представляет значительный интерес для многих практических приложений статистической радиофизики, радио- и гидролокации, навигации, сейсмологии и неоднократно рассматривалась в литературе [1–5]. В [2] обсуждалась задача оценки моментов скачкообразного изменения сигнала при дискретном времени наблюдения. В работах [3, 4] исследованы алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения квазидетерминированного сигнала произвольной формы с неизвестными (или случайными) моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума при непрерывном времени наблюдения. Алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения квазидетерминированного сигнала с неизвестной амплитудой изучены в работе [5]. Данные алгоритмы целесообразно использовать для оценки моментов появления и исчезновения сигналов с неизвестной мощностью. Однако во многих практических приложениях используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), которые ввиду специфики их распространения имеют неизвестные амплитуду и начальную фазу. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой. В данной работе на основе метода максимального правдоподобия синтезированы алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с произвольной формой огибающей функции и неизвестными амплитудой и начальной фазой. Для синтезированных алгоритмов найдены асимптотические характеристики эффективности их функционирования, точность которых увеличивается с ростом отношения сигнал/шум (ОСШ).

Модель радиосигнала с неизвестными амплитудой, начальной фазой и моментами появления и исчезновения запишем в виде

$$s(t, a, \varphi, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} af(t) \cos(\omega t - \varphi), & \theta_1 \leq t \leq \theta_2; \\ 0, & t < \theta_1, \quad t > \theta_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь известная непрерывная функция $f(t)$ описывает форму огибающей радиосигнала, a — величина, характеризующая его амплитуду, $\varphi \in [0, 2\pi]$ — начальная фаза, ω — частота, θ_1 и

* trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

θ_2 — моменты появления и исчезновения радиосигнала соответственно, принимающие значения из априорных интервалов

$$\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}], \quad i = 1, 2.$$

Для того, чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем он появляется, положим, что $\theta_{1 \max} < \theta_{2 \min}$. Будем считать, что функция, описывающая форму огибающей радиосигнала, удовлетворяет условию $f(\theta_i) \neq 0$.

Наблюдаемый на интервале времени $[0, T]$ случайный процесс

$$\xi(t) = s(t, a_0, \varphi_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$$

представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $s(t, a_0, \varphi_0, \theta_{01}, \theta_{02})$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $a_0, \varphi_0, \theta_{01}, \theta_{02}$ — истинные значения амплитуды, начальной фазы и моментов появления и исчезновения радиосигнала соответственно, неизвестные на приёмной стороне. На основе наблюдаемого процесса $\xi(t)$ приёмник должен сформировать оценки моментов появления и исчезновения полезного сигнала (1).

Если амплитуда и начальная фаза полезного сигнала (1) априори известны, можно применить алгоритм оценивания на основе метода максимального правдоподобия. Согласно данному алгоритму оценки моментов появления и исчезновения совпадают с координатами положения наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия [6]

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a_0}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi_0) dt - \frac{a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi_0) dt.$$

Первое слагаемое здесь и далее представляет собой стохастический интеграл в смысле Ито. Однако при неизвестных как моментах появления и исчезновения, так и амплитуде и начальной фазе радиосигнала логарифм функционала отношения правдоподобия зависит от четырёх неизвестных параметров [6]:

$$L(a, \varphi, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi) dt. \quad (2)$$

При подстановке в выражение (2) вместо неизвестных амплитуды a и начальной фазы φ некоторых их значений можно получить ряд алгоритмов оценивания моментов появления и исчезновения (возможно, неоптимальных). Подставляемые значения амплитуды и начальной фазы могут быть фиксированными или определяться по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате алгоритмы оценивания, рассмотренные ниже, отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной или программной реализации.

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределённости относительно амплитуды и начальной фазы радиосигнала является применение квазиправдоподобного алгоритма оценки [7]. Квазиправдоподобный приёмник должен формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (2) для некоторых ожидаемых значений амплитуды a^* и начальной фазы φ^* и всех возможных значений моментов появления и исчезновения,

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi^*) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi^*) dt, \quad (3)$$

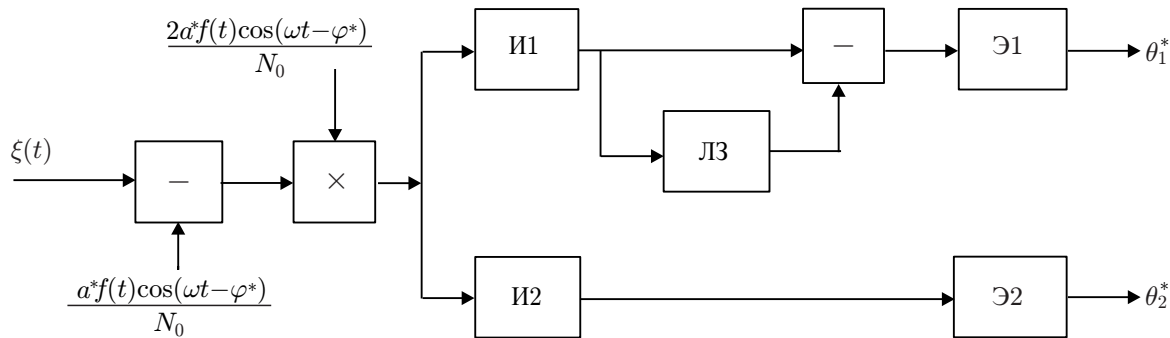


Рис. 1. Блок-схема квазиправдоподобного определителя моментов появления и исчезновения радиосигнала

и находить квазиправдоподобные оценки моментов появления и исчезновения как положения абсолютного (наибольшего) максимума решающей статистики (3)

$$(\theta_1^*, \theta_2^*) : L^*(\theta_1^*, \theta_2^*) = \sup_{\theta_1, \theta_2} L^*(\theta_1, \theta_2). \quad (4)$$

Согласно выражению (4) приёмник должен формировать двумерное случайное поле (3) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Действительно, нахождение величин (4) предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам. Однако трудностей аппаратной реализации квазиправдоподобного алгоритма оценивания (4) частично удаётся избежать, если представить, аналогично работам [3, 4], случайное поле (3) в виде суммы $L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1^*(\theta_1) + L_2^*(\theta_2)$ двух случайных процессов. Первый из них зависит только от момента появления θ_1 , а второй — только от момента исчезновения θ_2 :

$$L_1^*(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi^*) dt - \frac{(a^*)^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi^*) dt, \quad (5)$$

$$L_2^*(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi^*) dt - \frac{(a^*)^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi^*) dt, \quad (6)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно выражениям (5) и (6) случайные процессы $L_1^*(\theta_1)$ и $L_2^*(\theta_2)$ статистически независимы, т. к. представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах. Следовательно, положение максимума случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1^*(\theta_1)$, а по переменной θ_2 — с положением максимума $L_2^*(\theta_2)$. В результате для квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения можно записать

$$\theta_j^* : L_j^*(\theta_j^*) = \sup_{\theta_j} L_j^*(\theta_j), \quad \theta_j \in [\theta_{j\min}, \theta_{j\max}], \quad j = 1, 2.$$

Блок-схема квазиправдоподобного определителя моментов появления и исчезновения радиосигнала изображена на рис. 1, где И1 — интегратор на интервале $[\theta_{1\min}, t]$, где $t \in [\theta_{1\min}, \theta]$, И2 — интегратор на интервале $[\theta, t]$, где $t \in [\theta, \theta_{2\max}]$, ЛЗ — линия задержки на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, которые осуществляют поиск положений максимумов сигнала на интервалах

времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ и $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ соответственно, элементы «—» и «×» осуществляют вычитание и умножение сигналов соответственно.

Представление решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет не только предложить достаточно простую аппаратную реализацию квазиправдоподобного определителя, но и выполнить анализ квазиправдоподобного алгоритма оценивания согласно методике, изложенной в работе [4]. Для полного статистического описания решающей статистики достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции гауссовских независимых случайных процессов (5) и (6). Выполняя усреднение, получаем математические ожидания

$$S_1^*(\theta_1) = \langle L_1^*(\theta_1) \rangle = (1 + \delta_a) Q[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta] \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta_1, \theta)/2,$$

$$S_2^*(\theta_2) = \langle L_2^*(\theta_2) \rangle = (1 + \delta_a) Q[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)] \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta, \theta_2)/2,$$

используя которые представим случайные процессы (5) и (6) в виде

$$L_1^*(\theta_1) = (1 + \delta_a) Q[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta] \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta_1, \theta)/2 + N_1^*(\theta_1),$$

$$L_2^*(\theta_2) = (1 + \delta_a) Q[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)] \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta, \theta_2)/2 + N_2^*(\theta_2).$$

Здесь

$$N_1^*(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} n(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi^*) dt, \quad N_2^*(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} n(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi^*) dt$$

— гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$B_1^*(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [L_1^*(\theta_{11}) - S_1^*(\theta_{11})] [L_1^*(\theta_{21}) - S_1^*(\theta_{21})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 Q[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta],$$

$$B_2^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [L_2^*(\theta_{12}) - S_2^*(\theta_{12})] [L_2^*(\theta_{22}) - S_2^*(\theta_{22})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 Q[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})]$$

соответственно, а

$$Q(\theta_1, \theta_2) = \frac{a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt \quad (7)$$

— ОСШ на выходе приёмника максимального правдоподобия для принимаемого сигнала с моментом появления θ_1 и моментом исчезновения θ_2 , интегралы от функций, осциллирующих с удвоенной частотой, отброшены, угловые скобки обозначают усреднение. Величина $\delta_a = (a^* - a_0)/a_0$ характеризует относительное отклонение ожидаемой амплитуды a^* от её истинного значения a_0 . В дальнейшем будем называть её расстройкой квазиправдоподобного определителя по амплитуде. Величина $\Delta\varphi = \varphi^* - \varphi_0$ — расстройка квазиправдоподобного определителя по начальной фазе.

Пусть $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\theta_1, \theta)$ — монотонно убывающая функция аргумента θ_1 , а $Q(\theta, \theta_2)$ — монотонно возрастающая функция θ_2 и имеют место равенства $Q(x, \theta) = -Q(\theta, x)$,

$$Q[\max(x, y), \theta] = \min[Q(x, \theta), Q(y, \theta)], \quad Q[\theta, \min(x, y)] = \min[Q(\theta, x), Q(\theta, y)]. \quad (8)$$

Использование свойств функции (7) позволяет переписать математические ожидания и корреляционные функции процессов (5) и (6) в виде

$$S_j^*(\theta_j) = (1 + \delta_a) \min[(-1)^j Q(\theta, \theta_{0j}), (-1)^j Q(\theta, \theta_j)] \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 (-1)^j Q(\theta, \theta_j)/2, \quad (9)$$

$$B_j^*(\theta_{1j}, \theta_{2j}) = (1 + \delta_a)^2 \min[(-1)^j Q(\theta, \theta_{1j}), (-1)^j Q(\theta, \theta_{2j})].$$

Здесь и далее будем считать, что $j = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что при $|\delta_a| < 1$ и $|\Delta\varphi| < \pi/2$ математические ожидания (9) достигают максимумов в точках, которые совпадают с истинными значениями θ_{0j} неизвестных моментов появления и исчезновения радиосигнала.

Перейдём в выражениях (5) и (6) от переменных θ_1, θ_2 к новым переменным $\lambda_j = (-1)^j Q(\theta, \theta_j)$, $\lambda_j \in [\lambda_{j \min}, \lambda_{j \max}]$, $\lambda_{1 \min} = Q(\theta_{1 \max}, \theta)$, $\lambda_{1 \max} = Q(\theta_{1 \min}, \theta)$, $\lambda_{2 \min} = Q(\theta, \theta_{2 \min})$, $\lambda_{2 \max} = Q(\theta, \theta_{2 \max})$. Тогда для случайных процессов (5) и (6) можно записать соотношения

$$L_j^*(\theta_j) = L_j^*[g_j(\lambda_j)] = \mu_j^*(\lambda_j) = (1 + \delta_a) \min(\lambda_j, \lambda_{0j}) \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2 \lambda_j/2 + \nu_j(\lambda_j), \quad (10)$$

где $\lambda_{01} = Q(\theta_{01}, \theta)$, $\lambda_{02} = Q(\theta, \theta_{02})$, $\nu_j(\lambda_j) = N_j(g_j(\lambda_j))$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$B_j^*(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}) = (1 + \delta_a)^2 \min(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}), \quad (11)$$

а $g_j(\lambda_j)$ — решения уравнений $(-1)^j Q(\theta, \theta_j) = \lambda_j$ относительно θ_j . Согласно свойствам функции (7), положения максимумов случайных процессов (10),

$$\lambda_j^* : \mu_j^*(\lambda_j^*) = \sup_{\lambda_j} \mu_j^*(\lambda_j) \quad (12)$$

связаны с оценками моментов появления и исчезновения радиосигнала взаимно-однозначными преобразованиями. Следовательно, условные плотности вероятностей $W_{\theta_j}^*(\theta_j|\theta_{0j})$ квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала можно выразить через плотности вероятностей $W_{\lambda_j}^*(\lambda_j|\lambda_{0j})$ случайных величин (12):

$$W_{\theta_j}^*(\theta_j|\theta_{0j}) = W_{\lambda_j}^* \left[(-1)^j Q(\theta, \theta_j) \mid (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j}) \right] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right|. \quad (13)$$

Плотности вероятности $W_{\lambda_j}^*(\lambda_j|\lambda_{0j})$, аналогично работам [4, 8], представим в виде

$$W_{\lambda_j}^*(\lambda_j|\lambda_{0j}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial F_{2j}(u, v, \lambda_j)}{\partial u} \right]_{u=v} du, \quad (14)$$

где

$$F_{2j}(u, v, x) = P \left[\sup_{\lambda_{j \min} \leq \lambda_j < x} \mu_j^*(\lambda_j) < u, \sup_{x \leq \lambda_j \leq \lambda_{j \max}} \mu_j^*(\lambda_j) < v \right] \quad (15)$$

— двумерные функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $\mu_j^*(\lambda_j)$. Согласно выражениям (10) и (11), $\mu_j^*(\lambda_j)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими случайными процессами [9] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j}(\gamma_0) = \frac{1}{2} \begin{cases} (1 + \delta_a) [2 \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)], & \lambda_{j \min} \leq \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ -(1 + \delta_a)^2, & \lambda_{0j} < \lambda_j \leq \lambda_{j \max}, \end{cases} \quad k_{2j} = (1 + \delta_a)^2. \quad (16)$$

Поэтому, аналогично работе [8] для функции (15), можно записать соотношение

$$F_{2j}(u, v, x) = \int_{-\infty}^v W_j(y, \lambda_{j \max}) dy. \quad (17)$$

Здесь $W_j(y, \lambda_j)$ — решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) [9]

$$\frac{\partial W_j(y, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1j} W_j(y, \lambda_j)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2j} W_j(y, \lambda_j)] = 0 \quad (18)$$

с коэффициентами сноса и диффузии (16) при начальных условиях

$$W_j(y, \lambda_{j \min}) = \frac{1}{(1 + \delta_a) \sqrt{2\pi \lambda_{j \min}}} \exp \left(- \frac{\{y + \lambda_{j \min}[(1 + \delta_a) \cos \Delta\varphi - (1 + \delta_a)^2/2]\}^2}{2(1 + \delta_a)^2 \lambda_{j \min}} \right)$$

и граничных условиях $W_j(y = u, \lambda_j) = W_j(y = -\infty, \lambda_j) = 0$ при $\lambda_j \in [\lambda_{j \min}, x]$ и $W_j(y = v, \lambda_j) = W_j(y = -\infty, \lambda_j) = 0$ при $\lambda_j \in [x, \lambda_{j \max}]$.

Применяя метод отражения с переменной знака [9], находим решение уравнения (18) с коэффициентами (16) отдельно для случаев $\lambda_j \in [\lambda_{j \min}, \lambda_{0j}]$ и $\lambda_j \in [\lambda_{0j}, \lambda_{j \max}]$. Подставляя найденные решения в выражение (17), а затем (17) в (14), аналогично работе [4], получаем выражения для плотности вероятности случайной величины (12):

$$W^*_{\lambda_j}(\lambda_j | \lambda_{0j}) = \begin{cases} c_1^2 \Psi [c_1^2(\lambda_{0j} - \lambda_j), c_1^2(\lambda_{0j} - \lambda_{j \min}), c_2^2(\lambda_{j \max} - \lambda_{0j}), 1/R], & \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ c_2^2 \Psi [c_2^2(\lambda - \lambda_{0j}), c_2^2(\lambda_{j \max} - \lambda_{0j}), c_1^2(\lambda_{0j} - \lambda_{j \min}), R], & \lambda_j > \lambda_{0j}, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \left[\Phi \left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}} \right) + \exp \left(- \frac{y_1 - y}{4} \right) / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right] \frac{1}{2|y|^{3/2} \sqrt{\pi}} \times \\ \times \int_0^\infty x \exp \left[- \frac{(x + y)^2}{4y} \right] \left[\Phi \left(\frac{y_3 x + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) - \exp(-y_3 x) \Phi \left(\frac{-y_3 x + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) \right] dx, \quad (20)$$

$c_1^2 = (\Delta - \delta_a)^2/2$, $c_2^2 = (1 + \delta_a)^2/2$, $R = (\Delta - \delta_a)/(1 + \delta_a)$, $\Delta = 2 \cos \Delta\varphi - 1$. При этом плотность вероятности (19) не зависит от выбора значения θ в выражениях (5) и (6). На основе выражений (13) и (19) запишем значения условных смещений и рассеяний оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала (4):

$$B(\theta_j^* | \theta_{0j}) = \int_{\theta_{j \min}}^{\theta_{j \max}} (\theta_j - \theta_{0j}) W_{\lambda_j}^* [(-1)^j Q(\theta, \theta_j) | (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j})] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right| d\theta_j, \quad (21)$$

$$V(\theta_j^* | \theta_{0j}) = \int_{\theta_{j \min}}^{\theta_{j \max}} (\theta_j - \theta_{0j})^2 W_{\lambda_j}^* [(-1)^j Q(\theta, \theta_j) | (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j})] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right| d\theta_j. \quad (22)$$

Полагая в (19) $\delta_a = 0$, $\Delta\varphi = 0$ и, соответственно, в (20) $y_3 = 1$, получаем, что (19), (21) и (22) переходят в точные формулы для характеристик максимально правдоподобной оценки моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой, найденные в работе [4].

Асимптотическое поведение плотностей вероятностей (19), смещения (21) и рассеяния (22) с увеличением ОСШ при $\delta_a = 0$ и $\Delta\varphi = 0$ исследовано в работе [4]. Выполняя аналогичные преобразования, для нормированных переменных (или обобщённых квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала)

$$\kappa_j = \begin{cases} (\Delta - \delta_a)^2 (\lambda_j - \lambda_{0j})/2, & \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ (1 + \delta_a)^2 (\lambda_j - \lambda_{0j})/2, & \lambda_j > \lambda_{0j}, \end{cases} \quad (23)$$

получаем предельную (с ростом ОСШ) плотность вероятности в виде

$$W_j(\kappa_j) = \begin{cases} W_0(-\kappa_j, 1/R), & \kappa_j \leq 0; \\ W_0(\kappa_j, R), & \kappa_j > 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = (2y + 1) \exp[y(y + 1)|x|] \{1 - \Phi[(2y + 1)\sqrt{|x|/2}]\} + \Phi(\sqrt{|x|/2}) - 1.$$

Известно [6, 8], что по мере роста ОСШ λ_{0j} квазиправдоподобные оценки сходятся в средне-квадратическом смысле к положениям максимумов математических ожиданий решающих статистик (5) и (6), которые при $|\delta_a| < 1$ и $\Delta\varphi < \pi/2$ совпадают с истинными значениями θ_{0j} моментов появления и исчезновения радиосигнала. Разложим $(-1)^j Q(\theta, \theta_j)$ в ряд Тейлора по переменной θ_j в окрестности θ_{0j} и ограничимся в разложении членами первого порядка малости:

$$(-1)^j Q(\theta, \theta_j) \approx (-1)^j Q(\theta_j, \theta_{0j}) + (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max},$$

где $\rho_j^2 = 2a_0^2 f^2(\theta_{0j})T_{\max}/N_0$, $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ — максимально возможная длительность сигнала. Отсюда имеем

$$\lambda_j - \lambda_{0j} \approx (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23), получаем

$$\kappa_j = (-1)^j \begin{cases} (1 - \delta_a^2) \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max}, & \theta_j \leq \theta_{0j}; \\ (1 + \delta_a^2) \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max} & \theta_j > \theta_{0j}. \end{cases} \quad (26)$$

Используя выражения (24) и (26), находим асимптотические значения смещения и рассеяния квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала

$$B_a(\theta_j^*|\theta_{0j}) = (-1)^j \frac{2T_{\max}}{\rho_j^2} \frac{(\Delta + 1)(\Delta - 2\delta_a - 1)}{(1 + \delta_a)^2 (\Delta - \delta_a)^2}, \quad (27)$$

$$V_a(\theta_j^*|\theta_{0j}) = \frac{8T_{\max}^2}{\rho_j^4} \frac{P(\delta_a, \Delta)}{(1 + \delta_a)^4 (\Delta + 1)^2 (\Delta - \delta_a)^2}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} P(x, y) = & 2y^6 - 4(2x - 1)y^5 + (11x^2 - 18x + 1)y^4 - (5x^3 - 29x^2 + 7x + 1)y^3 - \\ & - (15x^3 - 21x^2 - 7x - 1)y^2 + (3x^5 + 15x^4 + 15x^3 + 29x^2 + 18x + 4)y - \\ & - x^6 - 3x^5 + 5x^3 + 11x^2 + 8x + 2. \end{aligned}$$

При $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta = 1$ величины (27) и (28) совпадают со смещением и рассеянием максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой

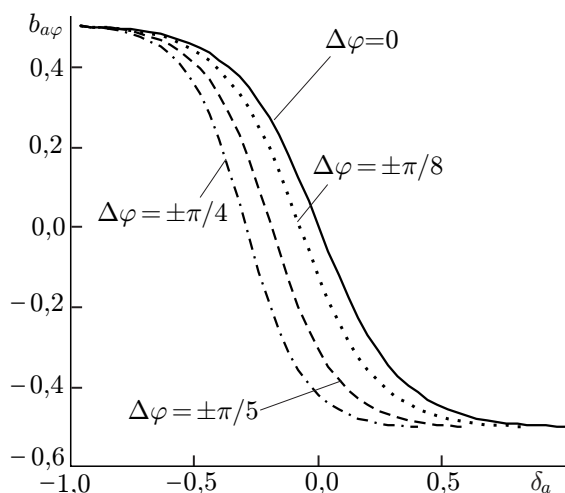


Рис. 2. Нормированное смещение оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала

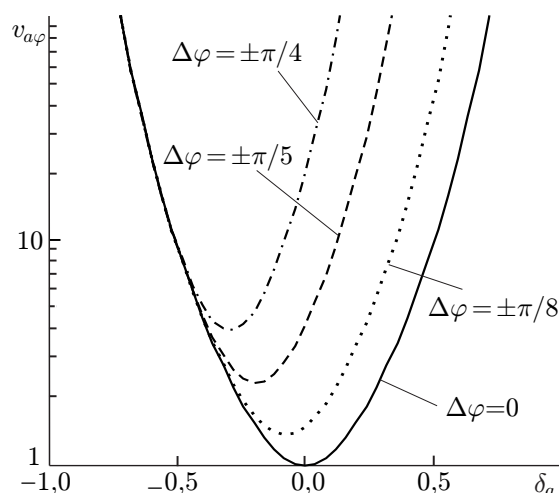


Рис. 3. Нормированное рассеяние оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала

и априори известной начальной фазой, найденными в работе [5]:

$$B_a(\theta_j^*|\theta_{0j}) = -\frac{(-1)^j 8T_{\max} \delta_a}{\rho_j^2 (\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2}, \quad (29)$$

$$V_a(\theta_j^*|\theta_{0j}) = \frac{2T_{\max}^2 (13 + 101\delta_a^2 + 15\delta_a^4 - \delta_a^6)}{\rho_j^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}. \quad (30)$$

При $\delta_a = 0$ и $\Delta\varphi = 0$ величины (27) и (28) совпадают со смещением и рассеянием максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой, найденными в работе [3], а именно

$$B_{0j} = 0, \quad V_{0j} = 26T_{\max}^2/\rho_j^4. \quad (31)$$

Влияние априорного незнания амплитуды и начальной фазы радиосигнала на точность квазиправдоподобных оценок его моментов появления и исчезновения можно охарактеризовать нормированными смещениями $b_{a\varphi}(\delta_a) = B_a(\theta_j^*|\theta_{0j})/\sqrt{V_a(\theta_j^*|\theta_{0j})}$ и рассеяниями $v_{a\varphi}(\delta_a) = V_a(\theta_j^*|\theta_{0j})/V_{0j}$ квазиправдоподобных оценок. Эти величины (с точностью до знака) одинаковы для квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала и могут служить характеристикой проигрыша в точности квазиправдоподобных оценок по сравнению с точностью максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой.

На рис. 2 представлены зависимости нормированного смещения $b_{a\varphi}(\delta_a)$, а на рис. 3 — нормированного рассеяния $v_{a\varphi}(\delta_a)$ от величины δ_a при нескольких значениях разности фаз $\Delta\varphi$ ожидаемого и принятого сигналов. Сплошные линии построены при $\Delta\varphi = 0$, пунктирные — при $\Delta\varphi = \pi/8$, штриховые — при $\Delta\varphi = \pi/5$, штрих-пунктирные — при $\Delta\varphi = \pi/4$. Как видно из рис. 2 и 3, при известной амплитуде ($\delta_a = 0$) квазиправдоподобные оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала обладают нулевым смещением, а их рассеяние совпадает с рассеянием оценок максимального правдоподобия. Наличие расстройки по амплитуде приводит к наличию смещения оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала и увеличению рассеяния в десятки раз. Так, при $|\delta_a| = 0,5$ рассеяние квазиправдоподобных оценок в 10 раз больше рассеяния максимально правдоподобной оценки при априори известных амплитуде и начальной фазе

радиосигнала. Наличие расстройки по фазе также приводит к увеличению рассеяния квазиправдоподобных оценок, особенно при $\delta_a \geq 0$. Так, даже при $\delta_a = 0$ расстройка по фазе на величину $\Delta\varphi = \pm\pi/5$ вызывает увеличение рассеяния квазиправдоподобной оценки в 4 раза.

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

С целью улучшения точности оценивания моментов появления и исчезновения радиосигнала можно применить алгоритм максимального правдоподобия, согласно которому неизвестную амплитуду и начальную фазу радиосигнала в выражении (2) необходимо заменить на их максимально правдоподобные оценки a_m и φ_m . Это равносильно максимизации логарифма функционала отношения правдоподобия (2) по амплитуде и начальной фазе радиосигнала:

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(a_m, \varphi_m, \theta_1, \theta_2) = \max_{a, \varphi} L(a, \varphi, \theta_1, \theta_2). \quad (32)$$

Максимально правдоподобные оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала определяются как положения наибольшего максимума решающей статистики (32):

$$(\theta_{m1}, \theta_{m2}) : L(\theta_{m1}, \theta_{m2}) = \sup_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \theta_2). \quad (33)$$

Максимизацию логарифма функционала отношения правдоподобия (2) по переменной φ можно выполнить аналитически. Для этого подставим сигнал (1) в выражение (2) и представим его в виде

$$L(a, \varphi, \theta_1, \theta_2) = aX(\theta_1, \theta_2) \cos \varphi + aY(\theta_1, \theta_2) \sin \varphi - \frac{a^2}{2N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (34)$$

где отброшены интегралы от членов, осциллирующих с удвоенной частотой, и

$$X(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t) dt, \quad Y(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Найдём производную функции (34) по φ , приравняем её нулю,

$$\frac{dL(a, \varphi, \theta_1, \theta_2)}{d\varphi} = -aX(\theta_1, \theta_2) \sin \varphi + aY(\theta_1, \theta_2) \cos \varphi = 0,$$

и решим полученное уравнение правдоподобия относительно φ :

$$\varphi = \arctg[Y(\theta_1, \theta_2)/X(\theta_1, \theta_2)].$$

Подставляя полученное решение в (34), получим

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = \sup_{\varphi} L(a, \varphi, \theta_1, \theta_2) = a \sqrt{X^2(\theta_1, \theta_2) + Y^2(\theta_1, \theta_2)} - \frac{a^2}{2N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (35)$$

Выполним теперь максимизацию логарифма функционала отношения правдоподобия (35) по амплитуде. Производную функции (35) по переменной a приравняем нулю,

$$\frac{dL(a, \theta_1, \theta_2)}{da} = \sqrt{X^2(\theta_1, \theta_2) + Y^2(\theta_1, \theta_2)} - \frac{a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt = 0,$$

и решим полученное уравнение правдоподобия относительно a :

$$a = N_0 \sqrt{X^2(\theta_1, \theta_2) + Y^2(\theta_1, \theta_2)} \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (36)$$

Подставляя решение (36) в выражение (35) вместо априори неизвестной амплитуды радиосигнала a , получим

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sup_a L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{N_0}{2} [X^2(\theta_1, \theta_2) + Y^2(\theta_1, \theta_2)] \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (37)$$

На основе выражения (37) можно построить структуру приёмного устройства. Получить функцию (37) как непрерывную функцию моментов появления θ_1 и исчезновения θ_2 радиосигнала не представляется возможным, поэтому приёмник должен формировать отсчёты $L_{mg} = L(\theta_{1\min} + m\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + g\Delta\theta_2)$, $m = 1, \dots, n_1$, $g = 1, \dots, n_2$ случайного поля (37) для дискретного набора значений моментов появления и исчезновения радиосигнала. Тогда определитель должен состоять из $n_1 n_2$ каналов.

На рис. 4 изображена блок-схема одного канала максимально правдоподобного определителя, который формирует логарифм (37) для фиксированных значений моментов появления $\theta_{1\min} + m\Delta\theta_1$ и исчезновения $\theta_{2\min} + g\Delta\theta_2$ радиосигнала. Здесь И — интеграторы, работающие на интервале времени $[\theta_{1\min} + m\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + g\Delta\theta_2]$, элементы « $\times$ », « $()^2$ », « $+$ », « $\div$ » осуществляют умножение, возведение в степень, сложение и деление сигналов соответственно. Максимально правдоподобные оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала определяются по номерам канала с максимальным выходным сигналом.

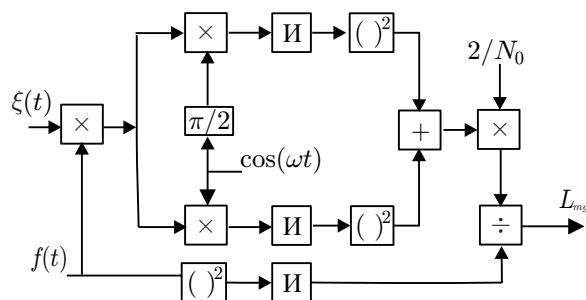


Рис. 4. Блок-схема одного канала максимально правдоподобного определителя моментов появления и исчезновения радиосигнала

Необходимо отметить, что, помимо сложностей реализации алгоритма максимального правдоподобия (33), вызванных его многоканальностью, возникают трудности в определении характеристик оценок по положению абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (37).

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Для упрощения аппаратной и программной реализации определителя максимального правдоподобия и нахождения его характеристик можно воспользоваться квазиоптимальными оценками. Для этого представим логарифм (2) в виде суммы двух слагаемых: $L(a, \varphi, \theta_1, \theta_2) = L_1(a, \varphi, \theta_1) + L_2(a, \varphi, \theta_2)$, где

$$L_1(a, \varphi, \theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi) dt, \quad (38)$$

$$L_2(a, \varphi, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t - \varphi) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) \cos^2(\omega t - \varphi) dt, \quad (39)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$. Обозначим $L_{ja\varphi}(\theta_j) = \max_{a,\varphi} L_j(a, \varphi, \theta_j)$ и введём в рассмотрение оценки

$$\theta_{mj}^* : L_{ja\varphi}(\theta_{mj}^*) = \sup_{\theta_j} L_{ja\varphi}(\theta_j). \quad (40)$$

Квазиоптимальные оценки (40) не являются оценками максимального правдоподобия, но, как будет показано ниже, их эффективность асимптотически (при увеличении ОСШ) совпадает с эффективностью максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и фазой. Выполняя аналогично (34)–(37) максимизацию функций (38) и (39) по переменным a и φ , получаем

$$L_{1a\varphi}(\theta_1) = \sup_{a,\varphi} L_1(a, \varphi, \theta_1) = \frac{N_0}{2} [X_1^2(\theta_1) + Y_1^2(\theta_1)] \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (41)$$

$$L_{2a\varphi}(\theta_2) = \sup_{a,\varphi} L_2(a, \varphi, \theta_2) = \frac{N_0}{2} [X_2^2(\theta_2) + Y_2^2(\theta_2)] \bigg/ \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (42)$$

где

$$X_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) \cos(\omega t) dt, \quad Y_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (43)$$

$$X_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \cos(\omega t) dt, \quad Y_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (44)$$

На рис. 5 показана блок-схема устройства формирования квазиоптимальных оценок (40) моментов появления и исчезновения радиосигнала, построенная на основе выражений (41) и (42). Здесь И1 и И2 — интеграторы, работающие на интервалах времени $[\theta_{1\min}, \theta]$ и $[\theta, \theta_{2\max}]$, ЛЗ — линии задержки на время $\theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, фиксирующие положения абсолютных максимумов сигналов на отрезках времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ и $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ соответственно. Таким образом, использование оценок (40) позволяет существенно упростить техническую реализацию приёмника. Действительно, для реализации алгоритма максимального правдоподобия (32) требуется построение многоканального приёмного устройства по моментам появления и исчезновения радиосигнала. Для нахождения оценок (40) достаточно двухканальной схемы.

Выполним теперь анализ алгоритма оценивания (40). Исследуем случайные процессы (41) и (42), формируемые квазиоптимальным алгоритмом оценки. Подставляя наблюдаемую реализацию $\xi(t)$ в выражения (43) и (44), а затем (43) и (44) в (41) и (42) соответственно, получаем

$$L_{ja\varphi}(\theta_j) = \frac{[G_j(\theta_{0j}, \theta_j) \cos \varphi_0 + N_{jc}(\theta_j)]^2 + [G_j(\theta_{0j}, \theta_j) \sin \varphi_0 + N_{js}(\theta_j)]^2}{2(-1)^j Q(\theta, \theta_j)}. \quad (45)$$

Здесь

$$G_j(\theta_{0j}, \theta_j) = (-1)^j Q[\theta, \min(\theta_{0j}, \theta_j)], \quad j = 1, 2;$$

$$N_{jc}(\theta_j) = (-1)^j \frac{2a_0}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_j} n(t) f(t) \cos(\omega t) dt; \quad (46)$$

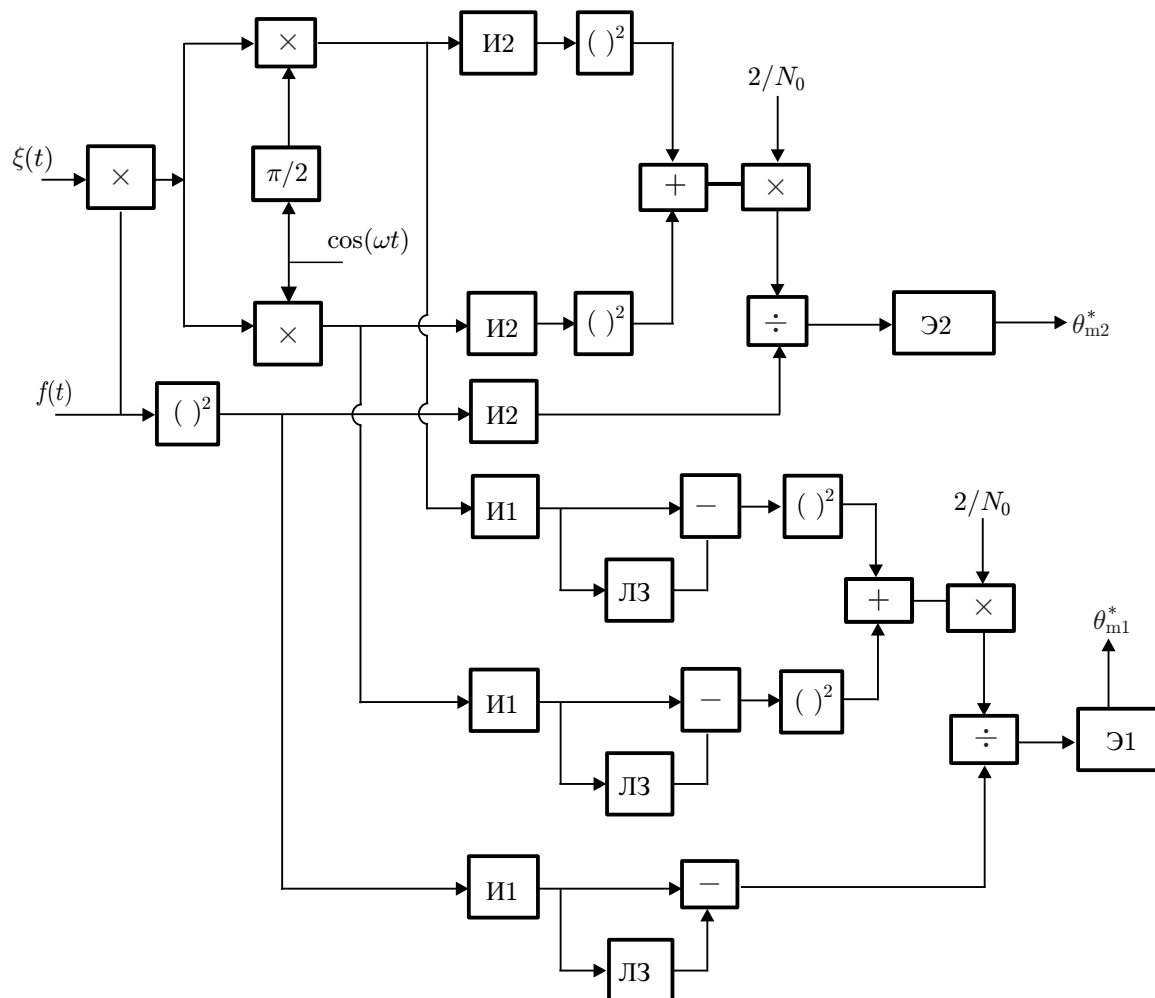


Рис. 5. Блок-схема квазиоптимального определителя моментов появления и исчезновения радиосигнала

$$N_{js}(\theta_j) = (-1)^j \frac{2a_0}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_j} n(t) f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (47)$$

а функция $Q(\theta_1, \theta_2)$ определена в (7) и удовлетворяет условиям (8). Шумовые составляющие $N_{jc}(\theta_j)$ и $N_{js}(\theta_j)$ представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса и поэтому также являются гауссовскими процессами. Они обладают нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$\begin{aligned} \langle N_{jc}(\theta_{j1}) N_{jc}(\theta_{j2}) \rangle &= \langle N_{js}(\theta_{j1}) N_{js}(\theta_{j2}) \rangle = (-1)^j Q[\theta, \min(\theta_{j1}, \theta_{j2})], \\ \langle N_{jc}(\theta_{j1}) N_{js}(\theta_{j2}) \rangle &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Процессы $N_{1c}(\theta_1)$ и $N_{2c}(\theta_2)$ содержат, согласно выражению (46), интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах, а следовательно являются статистически независимыми. Аналогично статистически независимы случайные процессы $N_{1s}(\theta_1)$ и $N_{2s}(\theta_2)$ (47).

Перейдём в выражении (45) к переменным $\lambda_i = (-1)^i Q(\theta, \theta_i)$, $\lambda_i \in [\Lambda_{i \min}, \Lambda_{i \max}]$, $\Lambda_{1 \min} = Q(\theta_{1 \max}, \theta)$, $\Lambda_{1 \max} = Q(\theta_{1 \min}, \theta)$, $\Lambda_{2 \min} = Q(\theta, \theta_{1 \min})$, $\Lambda_{2 \max} = Q(\theta, \theta_{1 \max})$, $i = 1, 2$. Тогда для

случайных процессов (45) как функций переменных λ_i можно записать, что

$$L_{ja\varphi}(\lambda_j) = \frac{\min^2(\lambda_{0j}, \lambda_j) + 2 \min(\lambda_{0j}, \lambda_j) N_{j1}(\lambda_j) + N_{jc}^2(\lambda_j) + N_{js}^2(\lambda_j)}{2\lambda_j}, \quad (48)$$

где $\lambda_{0j} = (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j})$, а $N_{jc}(\lambda_j) = N_{jc}(g_j(\lambda_j))$, $N_{js}(\lambda_j) = N_{js}(g_j(\lambda_j))$ и

$$N_{j1}(\lambda_j) = N_{jc}(\lambda_j) \cos \varphi_0 + N_{js}(\lambda_j) \sin \varphi_0, \quad j = 1, 2$$

— гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$\langle N_{jc}(\lambda_{j1}) N_{jc}(\lambda_{j2}) \rangle = \langle N_{js}(\lambda_{j1}) N_{js}(\lambda_{j2}) \rangle = \langle N_{j1}(\lambda_{j1}) N_{j1}(\lambda_{j2}) \rangle = \min(\lambda_{j1}, \lambda_{j2}).$$

Перейдём в выражении (48) к новым переменным $l_j = \lambda_j / \lambda_{0j}$, $l_j \in [\Lambda_{j \min} / z_{0j}^2, \Lambda_{j \max} / z_{0j}^2]$, $j = 1, 2$:

$$L_{ja\varphi}(l_j) = z_{0j}^2 \frac{\min^2(1, l_j)}{2l_j} + z_{0j} \frac{\min(1, l_j) N_{1j}(l_j)}{l_j} + \frac{N_{jc}^2(l_j) + N_{js}^2(l_j)}{2l_j}. \quad (49)$$

Величина $z_{01}^2 = \lambda_{01} = a_0^2 \int_{\theta_{01}}^{\theta} f^2(t) dt / N_0$ представляет собой ОСШ для радиосигнала с амплитудой a_0 и моментами появления θ_{01} и исчезновения θ . Величина $z_{02}^2 = \lambda_{02} = a_0^2 \int_{\theta}^{\theta_{02}} f^2(t) dt / N_0$ — ОСШ для радиосигнала с амплитудой a_0 , моментами появления θ и исчезновения θ_{02} . Обозначим также ОСШ для принятого сигнала:

$$z_0^2 = z_{01}^2 + z_{02}^2 = \frac{a_0^2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt = Q(\theta_{01}, \theta_{02}). \quad (50)$$

При достаточно больших ОСШ, таких, что $z_{01}^2 \gg 1$ и $z_{02}^2 \gg 1$, последним слагаемым в (49) можно пренебречь и записать приближённо

$$L_{ja\varphi}(l_j) \approx z_{0j}^2 \frac{\min^2(1, l_j)}{2l_j} + z_{0j} \frac{\min(1, l_j) N_{1j}(l_j)}{l_j}. \quad (51)$$

Эти функции являются гауссовскими случайными процессами с математическими ожиданиями

$$S_{ja\varphi}(l_j) = z_{0j}^2 [\min(1, l_j)]^2 / (2l_j) \quad (52)$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = z_{0j}^2 \min(l_{1j}, 1) \min(l_{2j}, 1) \min(l_{1j}, l_{2j}) / (l_{1j} l_{2j}). \quad (53)$$

При больших ОСШ z_{0j} положение максимума решающей статистики находится в малой окрестности положения максимума её математического ожидания [6]. Математические ожидания (52) достигают максимальных значений при $l_j = 1$. Поэтому исследуем поведение случайных процессов (51) в малых окрестностях точек $l_j = 1$. Для этого, разложив функции (52) по l_j , а (53) — по l_{1j}, l_{2j} в ряды Тейлора в окрестности единицы, получим

$$S_{aj}(l_j) \approx z_{0j}^2 (1 - |l_j - 1|) / 2, \quad (54)$$

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) \approx z_{0j}^2 (1 - |l_{1j} - 1| / 2 - |l_{2j} - 1| / 2 - |l_{1j} - l_{2j}| / 2). \quad (55)$$

Будем аппроксимировать при больших ОСШ решающую статистику (51) гауссовскими случайными процессами $Y_j(l_j)$ с математическими ожиданиями (54) и корреляционными функциями (55) на интервалах возможных значений переменных l_j . Положения максимумов случайных процессов $Y_j(l_j)$

$$l_{mj} : Y_j(l_{mj}) = \sup_{l_j} Y_j(l_j) \quad (56)$$

связаны с оценками моментов появления и исчезновения радиосигнала взаимно-однозначными преобразованиями. Поэтому функции распределения оценок (40) можно получить на основе функций распределения случайных величин (56):

$$F_j(x) = P\{l_{mj} < x\} = P\left[\sup_{l_j \leq x} Y_j(l_j) > \sup_{l_j > x} Y_j(l_j)\right]. \quad (57)$$

Введём в рассмотрение случайные процессы

$$\eta_j(l_j) = [Y_j(l_j) - Y_j(x)] / z_{0j}, \quad x \in [L_{j \min}, L_{j \max}], \quad (58)$$

использование которых позволяет переписать выражение (57) в виде

$$F_j(x) = P\left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) > \sup_{l_j > x} \eta_j(l_j)\right]. \quad (59)$$

По определению $\eta_j(l_j)$ в (58) являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами, обладающими математическими ожиданиями

$$S_j(l_j) = z_{0j}(|x - 1| - |l_j - 1|)/2$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = \begin{cases} \min(|l_{1j} - x|, |l_{2j} - x|), & (l_{1j} - x)(l_{2j} - x) \geq 0; \\ 0, & (l_{1j} - x)(l_{2j} - x) < 0. \end{cases} \quad (60)$$

Согласно выражению (60), отрезки реализаций случайных процессов $\eta_j(l_j)$ на интервалах $[L_{j \min}, x]$ и $(x, L_{j \max}]$ статистически независимы. Поэтому аналогично работе [10] мы можем записать для распределения (57), (59) выражение

$$F_j(x) = \int_0^\infty P_{2j}(u) dP_{1j}(u), \quad (61)$$

где

$$P_{1j}(u) = P\left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) < u\right], \quad P_{2j}(v) = P\left[\sup_{l_j > x} \eta_j(l_j) < v\right].$$

Случайные процессы $\eta_j(l_j)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими процессами [9] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j} = z_{0j} \begin{cases} 1/2, & L_{j \min} \leq l_j \leq 1; \\ -1/2, & 1 < l_j \leq L_{j \max}, \end{cases} \quad k_{2j} = 1. \quad (62)$$

Следовательно, функции $P_{1j}(u)$ представляют собой вероятности недостижения границы u марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $L_{j \min} \leq l_j \leq 1$, а $P_{2j}(v)$ — вероятности недостижения границы v марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $1 < l_j \leq L_{j \max}$.

Аналогично работе [9] имеем

$$P_{1j}(u) = \int_0^u W_{1j}(y, L_{j\min}) dy, \quad P_{2j}(v) = \int_0^v W_{2j}(y, L_{j\max}) dy, \quad (63)$$

где $W_{2j}(y, l_j)$ — решения прямого уравнения ФПК (18) с коэффициентами (62) при граничных условиях $W_{2j}(y = -\infty, l_j) = W_{2j}(y = u, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{2j}(y, l_j = x) = \delta(y - u)$, а $W_{1j}(y, l_j)$ — решения обратного уравнения ФПК

$$\frac{\partial W_{1j}(y, l_j)}{\partial l_j} + k_{1j} \frac{\partial}{\partial y} [W_{1j}(y, l_j)] + k_{2j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [W_{1j}(y, l_j)] = 0 \quad (64)$$

с коэффициентами (62) при граничных условиях $W_{1j}(y = -\infty, l_j) = W_{1j}(y = v, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{1j}(y, l_j = x) = \delta(y - v)$. Решая уравнения (18) и (64) методом отражения с переменной знака [9], подставляя полученные решения в выражения (63), а затем (63) в (61), находим функцию распределения случайной величины (56):

$$F_j(x) = \begin{cases} P \left[\frac{z_{0j}^2}{4} (x - L_{j\min}), \frac{z_{0j}^2}{4} (1 - x), \frac{z_{0j}^2}{4} (L_{j\max} - 1) \right], & L_{j\min} \leq x \leq 1; \\ 1 - P \left[\frac{z_{0j}^2}{4} (L_{j\max} - 1), \frac{z_{0j}^2}{4} (x - 1), \frac{z_{0j}^2}{4} (x - L_{j\min}) \right], & 1 < x \leq L_{j\max}. \end{cases} \quad (65)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{2\sqrt{2\pi x_2}} \int_0^\infty \int \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi - u)^2}{8x_2} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi + u)^2}{8x_2} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp(-u) \Phi \left(\frac{2x_1 - u}{2\sqrt{x_1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \exp \left[-\frac{(2x_1 + u)^2}{8x_1} \right] \right\} \exp \left(-\frac{\xi - u}{2} - \frac{x_2}{2} \right) \times \\ & \times \left[\Phi \left(\sqrt{x_3} + \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\sqrt{x_3} - \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) \right] d\xi du. \end{aligned}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции распределения (65) при увеличении ОСШ. Предполагая, что истинные значения моментов появления и исчезновения являются внутренними точками своих априорных интервалов и устремляя z_{0j} к бесконечности, находим предельное выражение для функции распределения (65):

$$F_{0j}(x) = \begin{cases} P_0 \left[z_{0j}^2 (1 - x)/4 \right], & L_{j\min} \leq x \leq 1; \\ 1 - P_0 \left[z_{0j}^2 (x - 1)/4 \right], & 1 < x \leq L_{j\max}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} P_0(x) = P(+\infty, x, +\infty) = & \int_0^\infty \exp(-u) \left[\Phi \left(\frac{u - 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \exp(u) \Phi \left(-\frac{u + 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \right. \\ & \left. - \exp(-u + 4x) \Phi \left(\frac{u - 6x}{2\sqrt{x}} \right) + \exp(2u + 4x) \Phi \left(-\frac{u + 6x}{2\sqrt{x}} \right) \right] du, \end{aligned}$$

и предельную плотность вероятности случайных величин (56):

$$W_{0j}(x) = \frac{3z_{0j}^2}{2} \exp(z_{0j}^2 |x - 1|) \left[1 - \Phi \left(\frac{3z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right] - \frac{z_{0j}^2}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right]. \quad (66)$$

Разложим выражение $(-1)^j Q(\theta, \theta_j)$ в ряд Тейлора по переменной θ_j в окрестности θ_{0j} и ограничимся в этом разложении членами первого порядка малости:

$$(-1)^j Q(\theta, \theta_j) \approx (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j}) + (-1)^j \rho_j^2 N_0(\theta_j - \theta_{0j}) / (2a_0^2 T_{\max}),$$

где $\rho_j^2 = 2f^2(\theta_{0j})a_0^2 T_{\max} / N_0$. Отсюда получаем

$$l_{mj} - 1 \approx (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j}) / (T_{\max} z_{0j}^2). \quad (67)$$

Используя выражения (67) и (66), найдём асимптотические значения смещения и рассеяния квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала (40):

$$B_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = 0, \quad V_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = 26T_{\max}^2 / \rho_j^4. \quad (68)$$

Они совпадают с формулами (31). Как видно из выражения (68), точность квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала (40) асимптотически (при увеличении ОСШ) совпадает с точностью максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения радиосигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой. Следовательно, оценки (40) асимптотически являются оценками максимально правдоподобными, а их применение позволяет существенно упростить техническую реализацию максимально правдоподобного определителя моментов появления и исчезновения радиосигнала (33).

Таким образом, асимптотические значения рассеяний максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой (31) и асимптотические значения рассеяний квазиоптимальных оценок (68) совпадают. Отсюда следует, что асимптотические значения рассеяний максимально правдоподобных оценок (33) моментов появления и исчезновения сигнала с априори неизвестными амплитудой и начальной фазой также определяются формулами (31) и (68). Действительно, рассеяние оценок (33) моментов появления и исчезновения сигнала с априори неизвестными амплитудой и начальной фазой не может быть меньше, чем рассеяние (31) оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой и начальной фазой. В то же время рассеяние оценок (33) не может быть больше, чем рассеяние квазиоптимальных оценок (68).

Следовательно, зависимости, приведённые на рис. 2, 3, характеризуют выигрыш в точности максимально правдоподобных оценок (33) или квазиоптимальных оценок (40) по сравнению с квазиправдоподобными оценками (4). Так, например, при $\delta_a = 0,5$ и $\Delta\varphi = \pm\pi/8$ рассеяние максимально правдоподобных оценок (33) и квазиоптимальных оценок (40) более чем в 30 раз меньше, чем рассеяние квазиправдоподобных оценок (4).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезированы квазиправдоподобный, максимально правдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с произвольной формой огибающей функции и неизвестными амплитудой и начальной фазой. Найдены асимптотические характеристики качества функционирования синтезированных алгоритмов. Наилучшей точностью оценки среди рассмотренных обладает максимально правдоподобный алгоритм, однако

его техническая или программная реализация является наиболее сложной. Точность более простого квазиоптимального алгоритма оценки асимптотически совпадает с точностью максимально правдоподобного алгоритма. Показано, что априорное незнание амплитуды и начальной фазы сигнала при больших отношениях сигнал/шум асимптотически не влияет на точность максимально правдоподобных и квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения сигнала. Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации об амплитуде и фазе сигнала, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и степени простоты реализации алгоритма.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин В. Г. // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27, № 1. С. 61.
2. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 5. С. 1024.
3. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37, Вып. 1. С. 52.
4. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, Вып. 2. С. 91.
5. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Кондратович П. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 6. С. 455.
6. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
7. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
9. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. 488 с.
10. Терентьев А. С. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 4. С. 652.

Поступила в редакцию 21 августа 2015 г.; принята в печать 29 декабря 2015 г.

ESTIMATION OF APPEARANCE AND DISAPPEARANCE MOMENTS OF A RADIO SIGNAL WITH UNKNOWN AMPLITUDE AND INITIAL PHASE

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, and S. V. Korolkov

We synthesize the quasi- and maximum-likely and the quasi-optimal algorithms for estimating the appearance and disappearance moments of a radio signal with an arbitrary shape of the envelope function and unknown amplitude and initial phase. Asymptotic characteristics of the synthesized-algorithm functioning efficiency are found.