

УДК 621.384.6+621.373

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДВУХЧАСТИЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ К ОПИСАНИЮ ОДНОПРОХОДНОГО ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ В РЕЖИМЕ СВЕРХЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ<sup>†</sup>

О. А. Шевченко, Н. А. Винокуров\*

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск, Россия

Описана теория однопроходного лазера на свободных электронах в режиме сверхлюминесценции, основанная на применении цепочки уравнений Боголюбова для многочастичных функций распределения. Специальный выбор переменных позволяет исключить запаздывание взаимодействия. Найден малый параметр (обратное число частиц на длине нарастания сигнала в сопутствующей системе отсчёта), разложение по которому позволяет пренебречь трёхчастичными корреляциями и решать лишь уравнения, содержащие одночастичную функцию распределения и двухчастичные корреляционные функции. Результаты расчётов хорошо согласуются с выводами, полученными при помощи разработанной ранее квазилинейной теории.

### ВВЕДЕНИЕ

Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) являются наиболее яркими источниками когерентного рентгеновского излучения [1, 2]. Конструктивно ЛСЭ представляет собой пучок ультрарелятивистских электронов, движущихся вдоль оси  $z$  по периодически искривлённой траектории. Испытывая поперечное ускорение, каждый электрон излучает периодический сигнал в направлении средней скорости  $\langle V_z \rangle$ . Максимальная спектральная плотность излучения пропорциональна квадрату длины  $L$  искривлённого участка траектории и приходится на длину волны  $\lambda = \lambda_u(c/\langle V_z \rangle - 1) \approx \lambda_u/(2\gamma_{\parallel}^2)$  (здесь  $c$  — скорость света и  $\gamma_{\parallel} = 1/\sqrt{1 - \langle V_z \rangle^2/c^2} \gg 1$ ), которая значительно меньше периода траектории  $\lambda_u$ . Впервые такой излучатель был рассмотрен В. Л. Гинзбургом [3] в 1947 году. В 1951 году для периодического искривления траектории электронов было предложено [4] использовать периодическое знакопеременное поперечное магнитное поле. Соответствующая магнитная система была названа ондулятором. При большой длине ондулятора  $L$  спектральная плотность ондуляторного излучения велика, поэтому ондуляторы широко применяются для получения рентгеновского излучения (см., например, [5]). Если времена прихода электронов пучка в ондулятор некоррелированы (что справедливо в случае статистически независимых актов эмиссии электронов с катода и пренебрежимо малого взаимодействия между ними), то спектральная интенсивность излучения равна спектральной плотности излучения одного электрона, умноженной на частоту прихода электронов  $\nu$ , т. е. пропорциональна току пучка  $I = \nu e$ , где  $e$  — элементарный заряд. Как и для других излучателей, при наличии «сторонней» электромагнитной волны наблюдаются вынужденные процессы — поглощение и вынужденное излучение. Механизм вынужденного ондуляторного излучения состоит в том, что волна с длиной  $\lambda$ , распространяющаяся вдоль оси  $z$ , ускоряет одни частицы и замедляет другие, после чего поле излучения образовавшихся электронных уплотнений с пространственным периодом  $\lambda$  суммируется с полем «сторонней» волны.

<sup>†</sup> Статья подготовлена для специального выпуска журнала к 100-летию В. Л. Гинзбурга

\* vinokurov@inp.nsk.su

Из-за отсутствия хороших зеркал рентгеновские ЛСЭ обычно работают в режиме сверхлюминесценции (Self-Amplified Spontaneous Emission, SASE). На вход длинного (порядка 100 м) ондулятора поступают электронные сгустки с длительностью менее 1 пс и зарядом порядка 0,1 нКл. Из-за взаимодействия электронов в ондуляторе через поле излучения равномерное продольное распределение электронов неустойчиво относительно группировки с пространственным периодом  $\lambda$ . Вследствие этой неустойчивости резонансная гармоника тока экспоненциально растёт вдоль ондулятора. Скорость экспоненциального роста амплитуды этой гармоники характеризуется так называемой длиной нарастания (порядка десяти метров). Источником сигнала служат начальные флуктуации плотности тока (шумы ЛСЭ-усилителя), которые возникают из-за неравномерности распределения времён прихода отдельных электронов в ондулятор. Времена прихода отдельных электронов меняются случайным образом как от сгустка к сгустку, так и в пределах одного сгустка.

Если задать начальное распределение электронов, то теоретически можно определить их конечное распределение и параметры излучения, но для этого необходимо решить уравнения движения для всех частиц совместно с уравнениями Максвелла. Поскольку число частиц в одном электронном сгустке велико, выполнить такое вычисление на данный момент не представляется возможным. Существуют два существенно разных подхода к решению этой проблемы, которые используются при компьютерном моделировании работы ЛСЭ [6, 7]. Один из этих подходов основан на уравнении Власова для сглаженного распределения частиц в шестимерном фазовом пространстве, которое решается совместно с уравнениями для поля излучения. В другом подходе для представления распределения электронов в пучке используются макрочастицы.

В случае моделирования возникновения генерации из дробового шума при использовании обоих подходов требуется уделять особое внимание начальным условиям. В частности, в программах, основанных на методе макрочастиц, используется специальная расстановка частиц, необходимая для подавления искусственно усиленного спонтанного излучения [8]. Не вызывает сомнения, что данный метод работает на линейной стадии, однако не является очевидным, что он даёт правильные результаты на стадии насыщения. В то же время в программах, основанных на уравнении Власова, сглаживание функции распределения приводит к искусственному подавлению начального дробового шума.

Следует заметить, что не всегда требуется знать параметры излучения для каждого сгустка. Для некоторых экспериментов существенными являются параметры, которые усреднены по многим сгусткам (подчиняющимся некоторым детерминированным статистическим законам) и могут быть вычислены методами статистической механики. Здесь можно отметить, что ЛСЭ позволяют хорошо проиллюстрировать фундаментальные идеи статистической физики. В частности, усреднение по абстрактному ансамблю макроскопически эквивалентных систем в случае ЛСЭ является просто усреднением по разным электронным сгусткам, пролетающим через ондулятор. В случае длинных электронных сгустков, когда отдельные области пучка не успевают провзаимодействовать друг с другом, такое усреднение может быть необходимым и в одном сгустке. Усреднённые параметры излучения могут быть также использованы для проверки программ, моделирующих одиночные сгустки. Для этого необходимо усреднить результаты работы таких программ для различных начальных условий [9].

Таким образом, актуальной задачей является разработка адекватной аналитической теории и численного алгоритма, в которых рассматриваются усреднённые параметры электронного пучка и излучения в ЛСЭ. Задача усреднения по начальным условиям применительно к ЛСЭ уже рассматривалась ранее многими авторами, но, как правило, её решение ограничивалось линейным случаем, для которого можно определить функцию Грина. При этом процедура усреднения по начальным условиям становится элементарной.

Последовательный нелинейный метод решения данной задачи был предложен в работе [10]. Он основан на цепочке уравнений Боголюбова—Борна—Грина—Кирквуда—Ивона (ББГКИ), в которой используются только первые два уравнения для одночастичной функции распределения и двухчастичной корреляционной функции. В данной статье представлен короткий обзор этого метода, а также приводятся примеры его использования для некоторых частных случаев. Применение метода ББГКИ к ЛСЭ имеет ряд интересных особенностей. Во-первых, до влёта в ондулятор взаимодействие электронов практически отсутствует, а продольные координаты частиц статистически независимы. Поэтому решается задача с простыми начальными условиями (полностью факторизованная  $N$ -частичная функция распределения, т. е. нулевые корреляционные функции). Во-вторых, ондулятор имеет конечную длину, и после выхода электронов из ондулятора их взаимодействие прекращается, что делает задачу похожей на задачу рассеяния (отсутствие взаимодействия в начальном и конечном состояниях). В-третьих, каждый электронный сгусток представляет собой конкретную реализацию  $2N$ -мерного вектора продольных координат и энергий  $N$  электронов. Поэтому усреднение по этим реализациям — это просто усреднение результатов измерений параметров каждого электронного сгустка и соответствующего импульса излучения по большому числу таких измерений, проведённых с разными электронными сгустками.

## 1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ЭВОЛЮЦИЮ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Общий подход, позволяющий естественным образом учесть флуктуации концентрации электронов, заключается в использовании уравнения для двухчастичной функции распределения (второго уравнения в цепочке ББГКИ), которое сводится к уравнению для двухчастичной корреляционной функции. Вывод данного уравнения для электронного пучка в ЛСЭ не совсем тривиален, т. к. взаимодействие электронов осуществляется через поле излучения, обладающее собственными степенями свободы. В общем случае приходится отдельно рассматривать данные степени свободы и вводить для них собственную функцию распределения [11]. Однако излучение в ЛСЭ при отсутствии внешнего поля на входе однозначно определяется движением электронов, а параксиальное приближение и возможность разделить продольное и поперечное движения позволяют при помощи правильного выбора независимой переменной свести задачу к случаю мгновенно взаимодействующих частиц [10].

### 1.1. Уравнения движения частиц

При выводе уравнений движения мы делаем ряд общепринятых допущений, которые включают в себя усреднение по периоду ондулятора, параксиальное приближение для уравнений, описывающих поле излучения, и резонансный характер взаимодействия излучения с частицами. Движение частиц в ондуляторе является параксиальным, а их траектории практически не возмущаются полем излучения. Поэтому будем считать, что поперечное движение электронов фиксировано и не зависит от продольного. Другими словами, мы можем полагать, что электроны движутся вдоль предварительно вычисленных по начальным условиям и полю ондулятора траекториям. Выберем  $z$  в качестве координаты, описывающей продольное положение каждого электрона, а в качестве второй зависимой переменной будем использовать малое относительное отклонение  $\Delta$  энергии от средней энергии. Для упрощения дальнейших выражений будем использовать систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$ .

При сделанных допущениях уравнения движения для  $k$ -й частицы с продольной координатой  $z^{(k)}$ , относительным отклонением энергии  $\Delta^{(k)}$  и начальными координатами в четырёхмерном

поперечном фазовом пространстве  $X^{(k)}$  могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = 1 - \frac{1}{2\gamma_{\parallel}^2} + \frac{\Delta^{(k)}}{\gamma_{\parallel}^2} - \Delta\beta[z^{(k)}, X^{(k)}], \quad \frac{d\Delta^{(k)}}{dt} = \sum_{l \neq k} \Phi\{z^{(k)}, X^{(k)}, z^{(l)}[t^{(l)}], X^{(l)}\},$$

$$t - z^{(k)} = t^{(l)} - z^{(l)}[t^{(l)}], \quad (1)$$

где  $\gamma_{\parallel}$  — релятивистский фактор для средней продольной скорости опорной частицы,  $t$  — время. Функция  $\Delta\beta[z^{(k)}, X^{(k)}]$  описывает изменение продольной скорости  $k$ -й частицы за счёт бетатронных колебаний (отклонения траектории этой частицы от опорной траектории, имеющей минимальное отклонение от оси  $z$ ). Её конкретный вид для дальнейшего изложения несущественен и может быть легко найден из уравнений для траектории частицы в ондуляторе. Взаимодействие двух электронов через поле излучения в данной системе описывается при помощи функции  $\Phi\{z^{(k)}, X^{(k)}, z^{(l)}[t^{(l)}], X^{(l)}\}$ , причём индекс  $l$  в данном выражении относится к излучающему электрону. Можно сказать, что  $\Phi$  — это продольная «сила», действующая на  $k$ -ю частицу со стороны  $l$ -й частицы. Мы предполагаем, что поле ондулятора равно нулю для отрицательных  $z$  и что  $\Phi[z^{(k)}, z^{(l)}] = 0$ , при  $z^{(k)} < z^{(l)}$  или  $z^{(l)} < 0$ . Явное выражение для  $\Phi$  в общем случае может быть получено путём решения уравнений для поля излучения [12]. В случае спирального ондулятора это выражение имеет следующий вид:

$$\Phi[z^{(1)}, \mathbf{R}^{(1)}, z^{(2)}, \mathbf{R}^{(2)}] = 2 \frac{r_e k_0}{\gamma_0} \frac{K(z^{(1)})K(z^{(2)})}{1 + K^2(z^{(2)})} \times$$

$$\sin \left\{ k_w(z^{(1)} - z^{(2)}) + k_0 \frac{[\mathbf{R}^{(1)}(z^{(1)}) - \mathbf{R}^{(2)}(z^{(2)})]^2}{2(z^{(1)} - z^{(2)})} + \varphi(z^{(1)}) - \varphi(z^{(2)}) \right\}$$

$$\times \frac{\text{St}(z^{(1)} - z^{(2)})\text{St}(z^{(2)})}{z^{(1)} - z^{(2)}}. \quad (2)$$

Здесь  $\text{St}$  — функция Хевисайда,  $\mathbf{R}^{(1)}$  и  $\mathbf{R}^{(2)}$  — поперечные координаты частиц,  $r_e$  — классический радиус электрона,  $k_0$  — волновое число поля излучения,  $\gamma_0$  — релятивистский фактор опорной частицы,  $k_w$  — волновое число поля ондулятора,  $\varphi(z)$  — фаза ондулятора,  $K(z)$  — параметр ондуляторности. В рассматриваемом случае спирального ондулятора с поперечным полем  $B$  этот параметр даётся формулой  $K = eB/(k_w m c^2)$ , где  $m$  — масса электрона. Далее мы выберем единицу измерения длины таким образом, что  $k_w = 1$ .

Следует отметить, что (1) не является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая возникает в механике при описании движения частиц, взаимодействующих без запаздывания. В её правой части содержатся координаты частиц  $z^{(l)}$  в запаздывающие моменты времени  $t^{(l)} < t$ , поэтому уравнения этой системы относятся к классу так называемых уравнений с отклоняющимся аргументом [13]. Тем не менее она имеет однозначное решение, которое может быть найдено, если для каждой частицы известно время её влёта в ондулятор. Процедура нахождения решения данной системы может оказаться достаточно сложной в общем случае, когда необходимо учитывать зависимость времени запаздывания от поперечных координат. В нашем частном случае параксиального движения и узкополосного излучения система (1) может быть переписана как система ОДУ. Для этого необходимо ввести новую независимую переменную  $\xi = t - z$ , которая в дальнейшем будет играть роль времени. Эту переменную можно рассматривать как новую параметризацию мировых линий частиц в пространстве-времени (см. рис. 1). У неё также есть простой физический смысл. Если расположить вдоль оси  $z$  часы с одинаковыми показаниями времени и запустить их, используя световой импульс, распространяющийся из начала координат в направлении этой оси, то значение  $\xi$  в данной точке  $z$  будет равно «локальному времени», определяемому по показанию часов в этой точке. Существует прямая аналогия

между новой переменной и поясным временем. В случае с поясным временем можно сказать, что часы в каждом часовом поясе синхронизируются по восходу Солнца. Применение «нестандартных» синхронизаций часов (выбора мирового времени) в физике рассмотрено в работах [14–17]. В нашем случае гиперповерхностью одновременности  $\xi = t - z = \text{const}$  является фронт световой волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . В новых переменных матрица метрического тензора имеет своеобразный вид [15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для приращения пространственных и временных координат  $i$ -й частицы при её движении вдоль мировой линии выполняется (см. рис. 1) соотношение  $\Delta t = \Delta \xi + \Delta z = \Delta \xi(1 + dz^{(i)}/d\xi)$ , из которого следует, что

$$\frac{dz^{(i)}}{dt} = \frac{dz^{(i)}/d\xi}{1 + dz^{(i)}/d\xi}, \quad \frac{d\Delta^{(i)}}{dt} = \frac{d\Delta^{(i)}/d\xi}{1 + dz^{(i)}/d\xi}. \quad (3)$$

Запишем также обратное соотношение:

$$\frac{dz^{(i)}}{d\xi} = \frac{dz^{(i)}/dt}{1 - dz^{(i)}/dt}, \quad \frac{d\Delta^{(i)}}{d\xi} = \frac{d\Delta^{(i)}/dt}{1 - dz^{(i)}/dt}. \quad (4)$$

Принимая во внимание (1) и (4), можно написать окончательную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(k)}}{d\theta} &\approx [1 + 2\Delta^{(k)} - 2\gamma_{\parallel}^2 \Delta\beta(z^{(k)}, X^{(k)})] = v_i(z^{(k)}, \Delta^{(k)}, X^{(k)}), \\ \frac{d\Delta^{(k)}}{d\theta} &\approx \sum_{l \neq k} \Phi(z^{(k)}, X^{(k)}, z^{(l)}, X^{(l)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\theta = 2\gamma_{\parallel}^2 \xi$  и предполагается, что мало не только относительное отклонение энергии  $\Delta^{(k)}$ , но и величина  $\gamma_{\parallel}^2 \Delta\beta$ . Последнее предположение означает, что движение частицы в сопровождающей системе отсчёта опорной частицы полагается нерелятивистским. Для ЛСЭ представляют интерес именно такие пучки с малыми поперечными эмиттансами и разбросом энергий частиц.

В результате проделанной замены переменных получилась система ОДУ, решение которой однозначно определяется выбором начальных условий, образующих  $2N$ -мерное фазовое пространство. Начальные условия для системы (5) должны быть определены при  $\xi = \text{const}$ . Они могут быть восстановлены по моментам времени влёта частиц в ондулятор, если мы предположим, что частицы вне ондулятора не взаимодействуют друг с другом.

Следует отметить, что величины  $X^{(k)}$  не являются динамическими переменными. В данном случае это всего лишь набор параметров (четыре интеграла движения), который служит для «нумерации» траекторий частиц. Тем не менее для дальнейшего анализа удобно не делать различия

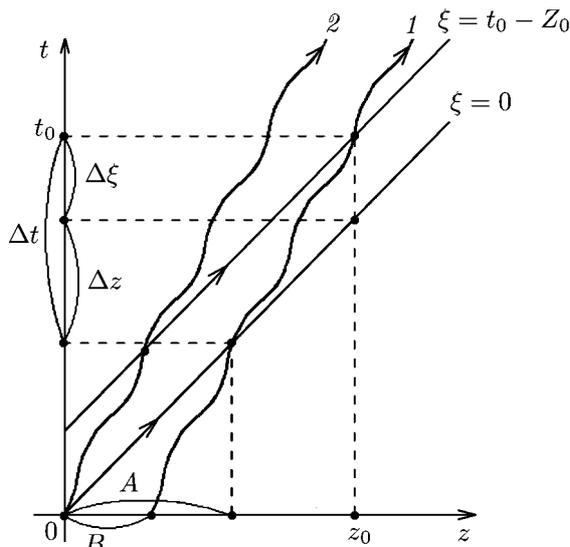


Рис. 1. Новая параметризация мировых линий частиц (1 и 2) в пространстве-времени. Сплошные прямые соответствуют электромагнитным волнам, отрезки A и B равны  $z^{(1)} - z^{(2)}$  при  $\xi = \text{const}$  и  $t = \text{const}$  соответственно

между продольными и поперечными координатами и рассматривать полное  $6N$ -мерное фазовое пространство. Для этого достаточно переписать систему (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(k)}}{d\theta} &\approx [1 + 2\Delta^{(k)} - 2\gamma_{\parallel}^2 \Delta\beta(z^{(k)}, X^{(k)})] = v_i(z^{(k)}, \Delta^{(k)}, X^{(k)}), \\ \frac{d\Delta^{(k)}}{d\theta} &\approx \sum_{l \neq k} \Phi(z^{(k)}, X^{(k)}, z^{(l)}, X^{(l)}), \quad \frac{dX^{(k)}}{d\theta} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Также удобно ввести следующие обозначения:  $\mathbf{x}_{\theta}^{(k)} = (z^{(k)}, \Delta^{(k)}, X^{(k)})$  — 6-ти мерный вектор координат для  $k$ -й частицы,  $d\mathbf{x}_{\theta}^{(k)}/d\theta = \tilde{\mathbf{V}}^{(k)}(\mathbf{x}_{\theta}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\theta}^{(N)}) = \sum_{l=1}^N \tilde{\mathbf{V}}^{(k,l)}(\mathbf{x}_{\theta}^{(k)}, \mathbf{x}_{\theta}^{(l)})$ . Здесь индекс  $\theta$  показывает, в какой момент времени берутся координаты частиц.

## 1.2. Микроскопическая плотность распределения

Система (6) не может быть решена непосредственно, т. к. число частиц является очень большим. Однако в решении этой системы нет необходимости, т. к. нас интересуют результаты, усреднённые по начальным условиям. Чтобы выполнить данное усреднение, удобно ввести микроскопическую плотность распределения (функцию Климонтовича) в одночастичном фазовом пространстве  $(z, \Delta, X)$  [11]:

$$N(z, \Delta, X; \theta) = \sum_k \delta[z - z^{(k)}(\theta)] \delta[\Delta - \Delta^{(k)}(\theta)] \delta[X - X^{(k)}]. \quad (7)$$

Здесь  $\delta(z)$  — дельта-функция.

Микроскопическая плотность распределения частиц в фазовом пространстве (7) удовлетворяет уравнению непрерывности, которое эквивалентно исходной системе уравнений движения (5):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \int dz_2 d\Delta_2 dX_2 \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) N(\epsilon_2; \theta) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} \right] N(\epsilon_1, \theta) = 0, \quad (8)$$

где  $\epsilon_i = (z_i, \Delta_i, X_i)$ . Величина  $N(z, \Delta, X; \theta)$  имеет немного необычный физический смысл. Она является плотностью распределения частиц в фазовом пространстве на гиперплоскости  $\theta = \text{const}$ , т. е. на фронте световой волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . Для описания динамики частиц в ЛСЭ в качестве независимой переменной обычно берётся  $z$ , а величины  $\tau^{(k)} = (z/V_{z0} - t^{(k)})k_0/k_w = z - \theta^{(k)}$  используются как продольные координаты. Здесь  $k_0 \approx 2\gamma_{\parallel}^2 k_w$  — резонансное волновое число, а  $V_{z0}$  — продольная скорость опорной частицы. Существует простое соотношение, связывающее плотности распределения для этих двух различных наборов координат:

$$N(z, \Delta, X; \theta) = \frac{1}{V_{z0}(z, \Delta, X)} N_z(\tau, \Delta, X; z) |_{\tau=z-\theta} \approx N_z(\tau, \Delta, X; z) |_{\tau=z-\theta}. \quad (9)$$

Также можно написать соотношение между  $N(z, \Delta, X; \theta)$  и обычными величинами, такими как ток  $I$  или степень группировки пучка:

$$I(z, t) = ek_0 \int V_{z0}(z, \Delta, X) N(z, \Delta, X; \theta) \Big|_{\theta=2\gamma_{\parallel}^2(t-z)} d\Delta dX \approx ek_0 \int N(z, \Delta, X; \theta) \Big|_{\theta=2\gamma_{\parallel}^2(t-z)} d\Delta dX,$$

$$b(z) = \frac{1}{N} \int V_{z0}(z, \Delta, X) N(z, \Delta, X; \theta) \exp[i(z - \theta)] d\Delta dX d\theta \approx$$

$$\approx \frac{1}{N} \int N(z, \Delta, X; \theta) \exp[i(z - \theta)] d\Delta dX d\theta.$$

Запишем также выражение для поперечной плотности тока, через которую выражается поле излучения электронного пучка, движущегося в ондуляторе [12]:

$$j_{\perp}(\mathbf{r}, z, \theta) \approx \int \frac{V_{\perp}}{1 - V_z} N[z, \Delta, X(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, z); \theta] d\Delta d\dot{\mathbf{r}}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$  — радиус-вектор и его производная по времени соответственно,  $V_{\perp}$  — поперечная скорость быстрых колебаний (для плоского ондулятора  $V_{\perp} = K\gamma^{-1} \sin(k_w z)$ , где  $\gamma$  — релятивистский фактор), а  $(1 - V_z)^{-1} \approx 2\gamma_{\parallel}^2$ . Напомним, что продольное расстояние между двумя частицами для заданного момента  $\theta$  в  $(1 - V_z)^{-1}$  раз больше, чем расстояние для заданного момента  $t$  (см. рис. 1). Поэтому в (10) появляется фактор  $(1 - V_z)^{-1}$ .

### 1.3. Усреднение по начальным условиям

Чтобы выполнить усреднение, необходимо ввести симметричную относительно перестановки частиц функцию распределения  $f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta)$  координат частиц в  $6N$ -мерном фазовом пространстве в некоторый момент времени  $\theta$ . Как отмечено в книге [18], неопределённость состояния системы связана только с неопределённостью начальных условий, поэтому все используемые ниже усреднения являются усреднениями по начальным условиям. Для случая однопролётного ЛСЭ смысл этого усреднения очевиден — это усреднение по отдельным электронным сгусткам, влетающим в ондулятор ЛСЭ, в каждом из которых  $N$  частиц некоторым образом распределены в шестимерном фазовом пространстве. Проинтегрировав функцию  $f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta)$  по  $N - s$  координатам частиц, можно также ввести  $s$ -частичные функции распределения  $f^{(s)}$ :

$$f^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \int f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N) dz_{s+1} d\Delta_{s+1} dX_{s+1}, \dots, dz_N d\Delta_N dX_N.$$

Усреднённое значение некоторой величины  $A(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ , зависящей от координат частиц  $x^{(i)} = (z^{(i)}, \Delta^{(i)}, X^{(i)})$ , определяется через функцию распределения стандартным образом:

$$\langle A \rangle = \int A(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) f^{(N)}(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) dx^{(1)} \dots x^{(N)}.$$

Для усреднённых значений микроскопической плотности распределения и её произведений получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle N(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \rangle &= N f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \equiv N F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta), \\ \langle N(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) N(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) \rangle &= N f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) + N(N - 1) f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta), \\ \langle N(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) N(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) N(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) \rangle &= N f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) + \\ &+ N(N - 1) [f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) + f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_3) + f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2)] + \\ &+ N(N - 1)(N - 2) f^{(3)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta), \\ &\dots \\ \langle N(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \dots N(\boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta) \rangle &= N f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \cdot \dots \cdot \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_N) + \dots + N! f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta). \quad (11) \end{aligned}$$

Используя эти выражения, можно применить операцию усреднения к уравнению непрерывности (8). В результате получается хорошо известная цепочка уравнений ББГКИ для  $s$ -частичных функций распределения [19]:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + L(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \right] f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1; \theta) &= \int V(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \theta) dz_2 d\Delta_2 dX_2, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + L(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + L(\boldsymbol{\varepsilon}_2) - \frac{1}{N} [V(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) + V(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1)] \right] f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2; \theta) &= \\ &= \int [V(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3) + V(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)] f^{(3)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3; \theta) dz_3 d\Delta_3 dX_3, \\ &\dots \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^N L(\boldsymbol{\varepsilon}_i) - \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N V(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) \right] f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N; \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$L(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = [1 + 2\Delta_i - 2\gamma_{\parallel}^2 \Delta\beta(z_i, X_i)] \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad V(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = -N\Phi(z_i, X_i, z_j, X_j) \frac{\partial}{\partial \Delta_i}.$$

Систему уравнений (12) можно представить в более удобном виде, если использовать корреляционные функции  $g^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \theta)$ , определяемые из соотношений

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) &= F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta), \\ f^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) &= F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta)F(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) + g^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) = F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta)F(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) + G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta), \\ f^{(3)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) &= F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta)F(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta)F(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) + \\ &+ F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta)G(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) + F(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta)G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta) + F(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta)G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta) + g^{(3)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \theta), \\ &\dots \\ f^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta) &= F(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \cdot \dots \cdot F(\boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta) + \dots + g^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N, \theta). \end{aligned}$$

Здесь введены специальные обозначения для одночастичной функции распределения  $F(1, \theta)$  и двухчастичной корреляционной функции  $G(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \theta)$ , которые будут использоваться в дальнейшем.

Если координаты частиц в фазовом пространстве в некоторый момент времени  $\theta$  распределены полностью независимо, то все  $s$ -частичные функции распределения можно представить в виде произведения одночастичных функций:

$$f^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \theta) = f^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \theta) \cdot \dots \cdot f^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}_s, \theta). \quad (13)$$

Из этого следует, что все корреляционные функции в этом случае равны нулю:  $g^{(s)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \theta) = 0$ .

Кооперативной длиной называется расстояние, на которое излучение смещается относительно электрона после прохождения сгустком одной длины нарастания. В ЛСЭ число взаимодействующих частиц, которое можно сравнить с хорошо известным параметром из физики плазмы — числом частиц в дебаевской сфере — можно оценить как число частиц на кооперативной длине.

Поскольку это число велико, взаимодействие является коллективным. Другими словами, каждый отдельный электрон взаимодействует одновременно с большим числом других электронов. Поэтому вклад двухчастичных взаимодействий, которые условно можно сравнить с парными столкновениями, является довольно слабым. Из вышесказанного следует, что в системе (12) неявно присутствует малый параметр, равный обратному числу взаимодействующих частиц. Его наличие даёт возможность считать, что многочастичные корреляции остаются малыми на всей длине ЛСЭ. Далее мы также везде будем предполагать отсутствие начальных корреляций между координатами частиц на входе в ондулятор ( $N$ -частичная функция распределения равна произведению  $N$  одинаковых одночастичных функций), так что вторая и высшие корреляционные функции вначале равны нулю. Данное предположение является естественным, если до попадания в ЛСЭ электроны друг с другом не взаимодействуют, но оно справедливо далеко не всегда. В частности, коллективные взаимодействия, обусловленные силами пространственного заряда, могут приводить к снижению уровня флуктуаций плотности заряда (подавлению дробового шума) при прохождении частиц от катода электронной пушки до входа в ондулятор (как это происходит в малолшумящих лампах бегущей волны [20]), а в электронно-оптических каналах с поворотными магнитами — к усилению этих флуктуаций [21]. Этот эффект приводит к наличию ненулевой корреляционной функции на входе в ондулятор.

Используя эти предположения, мы можем обрезать цепочку ББГКИ, сохранив лишь два уравнения для одночастичной функции распределения и двухчастичной корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + L(\epsilon_1) - \int dz_2 d\Delta_2 dX_2 F(\epsilon_2; \theta) V(\epsilon_1, \epsilon_2) \right] F(\epsilon_1; \theta) &= \int dz_2 d\Delta_2 dX_2 V(\epsilon_1, \epsilon_2) G(\epsilon_1, \epsilon_2; \theta), \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + L(\epsilon_1) + L(\epsilon_2) - \int dz_3 d\Delta_3 dX_3 [V(\epsilon_1, \epsilon_3) + V(\epsilon_2, \epsilon_3)] F(\epsilon_3; \theta) \right] &G(\epsilon_1, \epsilon_2; \theta) - \\ - \int dz_3 d\Delta_3 dX_3 V(\epsilon_1, \epsilon_3) F(\epsilon_1; \theta) G(\epsilon_2, \epsilon_3; \theta) - \int dz_3 d\Delta_3 dX_3 V(\epsilon_2, \epsilon_3) F(\epsilon_2; \theta) G(\epsilon_3, \epsilon_1; \theta) &= \\ &= \frac{1}{N} [V(\epsilon_1, \epsilon_2) + V(\epsilon_2, \epsilon_1)] F(\epsilon_1; \theta) F(\epsilon_2; \theta), \quad (14) \end{aligned}$$

и пренебрегая трёхчастичной корреляционной функцией во втором уравнении. Справедливость такого пренебрежения может быть проверена решением третьего уравнения цепочки с подставленными туда решениями уравнений (14). В физике плазмы аналогичное пренебрежение трёхчастичными корреляциями используется при выводе кинетического уравнения Балеску—Ленарда [19].

Сила продольного взаимодействия двух электронов (2) имеет осциллирующий характер, поэтому третье слагаемое в левой части первого уравнения и четвёртое слагаемое в левой части второго уравнения системы (14) можно положить равными нулю. В результате получается следующая относительно простая система уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 \right] F(\epsilon_1, \theta) &= -N \int \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} G(\epsilon_1, \epsilon_2; \theta) dz_2 d\Delta_2 dX_2, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} v_2 \right) G(\epsilon_1, \epsilon_2; \theta) &= -N \frac{\partial F(\epsilon_1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(\epsilon_1, \epsilon_3) G(\epsilon_2, \epsilon_3; \theta) dz_3 d\Delta_3 dX_3 - \\ &- N \frac{\partial F(\epsilon_2)}{\partial \Delta_2} \int \Phi(\epsilon_2, \epsilon_3) G(\epsilon_1, \epsilon_3; \theta) dz_3 d\Delta_3 dX_3 - \\ &- \left[ \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \Phi(\epsilon_2, \epsilon_1) \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \right] F(\epsilon_1) F(\epsilon_2), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$v_i = 1 + 2\Delta_i - 2\gamma_{\parallel}^2 \left[ \frac{\dot{x}_1^2(z_i, X_i)}{2} - \frac{\dot{y}_1^2(z_i, X_i)}{2} - \frac{\dot{x}_1^2(z_i, X_i)}{2\beta_u^2(z_i)} - \frac{\dot{y}_1^2(z_i, X_i)}{2\beta_u^2(z_i)} \right],$$

$\beta_u = \sqrt{2} \gamma / (Kk_w)$  в случае спирального ондулятора,

$$v_i = 1 + 2\Delta_i - 2\gamma_{\parallel}^2 \left[ \frac{\dot{x}_1^2(z_i, X_i)}{2} - \frac{\dot{y}_1^2(z_i, X_i)}{2} - \frac{\dot{y}_1^2(z_i, X_i)}{2\beta_u^2(z_i)} \right],$$

$\beta_u = \gamma / (Kk_w)$  в случае плоского ондулятора,  $x_1$  и  $y_1$  — декартовы координаты в поперечной плоскости. Следует отметить, что второе уравнение содержит неоднородную часть, которая описывает дробовой шум. Левая часть первого уравнения соответствует уравнению Власова, а правая часть — интегралу столкновений. Система уравнений (15) эквивалентна уравнениям Балеску—Ленарда в физике плазмы.

#### 1.4. Двухвременная корреляционная функция

Некоторые величины, такие как пиковая мощность или угловое распределение интенсивности излучения, могут быть определены непосредственно из одновременной корреляционной функции. Однако чтобы вычислить большинство величин, которые можно непосредственно наблюдать в эксперименте, недостаточно знать одновременную функцию распределения. Например, спектр тока пучка в некоторой точке  $z$  в ондуляторе может быть найден из двухвременной корреляционной функции, которая пропорциональна усреднённому произведению  $\langle N(\varepsilon, \theta_1)N(\varepsilon_2, \theta_2) \rangle$ . Во избежание недоразумений напомним, что усреднение проводится по начальным условиям. Другой величиной, непосредственно представляющей практический интерес, является усреднённая спектральная плотность излучения, которую можно найти с помощью корреляционной функции:

$$\langle A(\mathbf{r}_1, z_1, t_1)A(\mathbf{r}_2, z_2, t_2) \rangle = \langle A(\mathbf{r}_1, z_1, \xi_1)A(\mathbf{r}_2, z_2, \xi_2) \rangle, \quad (16)$$

где  $A(\mathbf{r}_1, z_1, t_1)$  — поле излучения, которое линейным образом выражается через  $N(\varepsilon_1, \theta_1)$ , поэтому обе части в (16) также пропорциональны  $\langle N(\varepsilon_1, \theta_1)N(\varepsilon_2, \theta_2) \rangle$ . В случае несгруппированного пучка выражение (16) зависит только от разности  $t_2 - t_1$  или (эквивалентно) от  $\xi_2 - \xi_1$ :

$$\langle A(\mathbf{r}_1, z_1, \xi_1)A(\mathbf{r}_2, z_2, \xi_2) \rangle \equiv C_{\text{rad}}(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{r}_2, z_2, \xi_2 - \xi_1). \quad (17)$$

В этом случае спектральная плотность излучения в некоторой заданной точке наблюдения  $(\mathbf{r}, z)$  может быть вычислена с помощью преобразования Фурье от корреляционной функции (17) по разности времён.

В произведении  $\langle N(\varepsilon_1, \theta_1)N(\varepsilon_2, \theta_2) \rangle$  множители берутся в разные моменты времени, поэтому для усреднения, вообще говоря, нужно знать совместную функцию распределения координат всех частиц для этих двух моментов. Для вычисления данной величины необходимо найти двухвременную корреляционную функцию, которая удовлетворяет следующему уравнению [22]:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 \right) G_2(\varepsilon_1, \theta_1; \varepsilon_2, \theta_2) = -N \frac{\partial F(\varepsilon_1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_3) G_2(\varepsilon_3, \theta_1; \varepsilon_2, \theta_2) dz_3 d\Delta_3 dX_3. \quad (18)$$

Это уравнение необходимо решать с начальным условием  $G_2(\varepsilon_1, \theta_1; \varepsilon_2, \theta_2)|_{\theta_1=\theta_2} = G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta_1)$ , т. е. его нельзя решить, не зная решения системы (15).

### 1.5. Приближение несгруппированного пучка

Несгруппированным пучком мы будем называть достаточно длинный пучок, для которого можно пренебречь зависимостью его параметров от времени. Это приближение можно использовать, когда длина пучка существенно больше кооперативной длины. В пределе бесконечно длинного пучка число частиц также стремится к бесконечности. В данном случае под параметром  $N$ , входящим в (15), следует понимать среднее число частиц на единицу длины (при заданном  $\theta$ ). Данное число легко выразить через средний ток пучка  $I$ :  $N = I/(2\gamma_{\parallel}^2 e)$ . При этом для одночастичной функции распределения необходимо использовать нормировку

$$\langle F(1) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \iint F(z, \Delta, X) d\Delta dX dz \right] = 1.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае существует стационарное решение уравнения (15), которое не зависит от времени, а значит, и от  $\theta$ . Это решение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} v_2 \right) \frac{\partial}{\partial z_1} [v_1 F(\epsilon_1)] &= -N \int \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} G(\epsilon_1, \epsilon_2) dZ_2 d\Delta_2 dX_2, \\ \left( \frac{\partial}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial z_2} v_2 \right) G(\epsilon_1, \epsilon_2) &= -N \frac{\partial F(\epsilon_1)}{\partial \Delta_1} \int \Phi(\epsilon_1, \epsilon_3) G(\epsilon_2, \epsilon_3, \theta) dz_3 d\Delta_3 dX_3 - \\ &\quad - N \frac{\partial F(\epsilon_2)}{\partial \Delta_2} \int \Phi(\epsilon_2, \epsilon_3) G(\epsilon_1, \epsilon_3, \theta) dz_3 d\Delta_3 dX_3 - \\ &\quad - \left[ \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \Phi(\epsilon_2, \epsilon_1) \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \right] F(\epsilon_1) F(\epsilon_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Далее для краткости мы также будем называть данное приближение стационарным. Двухвременная корреляционная функция в этом приближении зависит от разности времён:

$$G_2(\epsilon_1, \theta_1; \epsilon_2, \theta_2) = G_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \theta_2 - \theta_1).$$

### 1.6. Одномерная модель

Одномерная модель широко используется в теории ЛСЭ, и, хотя она не имеет строгого физического обоснования, результаты, полученные в её рамках, дают хорошее качественное представление о происходящих в ЛСЭ процессах. Мы ограничимся рассмотрением приближения несгруппированного пучка, а ондулятор будем считать спиральным, однородным и полубесконечным, а его начало расположим в точке  $z = 0$ . Уравнения движения (6) в одномерной модели приобретают простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(k)}}{d\theta} &= 1 + 2\Delta^{(k)}, & \frac{d\Delta^{(k)}}{d\theta} &= \sum_{l \neq k} \Phi[z^{(k)}, z^{(l)}], \\ \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2) &= -\frac{4\rho^3}{N} \text{St}(z_1 - z_2) \text{St}(z_2) \left\{ \frac{\exp[i(z_1 - z_2)]}{1 + i\alpha(z_1 - z_2)} + \text{к. с.} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\rho^3 = [1/(2\gamma)^3] (I/I_A) [K^2/(2k_w^2 \sigma^2)]$  — параметр Пирса,  $\sigma$  — среднеквадратичный поперечный размер пучка,  $\alpha = 1/(2k_0 k_w \sigma^2)$  — безразмерный параметр, характеризующий поперечный размер пучка,  $I_A = mc^3/e \approx 17$  кА — ток Альфвена. Из выражения для  $\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2)$  можно получить два предельных случая:  $\alpha \rightarrow \infty$  (соответствует модели тонкого пучка) и  $\alpha \rightarrow 0$  (соответствует модели заряженных листов).

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Как уже упоминалось ранее, невозможно получить точное аналитическое решение уравнений для корреляционной функции на нелинейной стадии. Для получения количественных результатов в этом случае необходимо использовать численное моделирование. Сложность полного 3-х мерного моделирования в основном имеет технический характер. Поскольку в нашей модели поперечные траектории частиц в пучке считаются фиксированными, динамическая задача является одномерной. Алгоритм численного решения системы (19) может быть основан на разбиении пучка в пространстве поперечных координат и углов на отдельные тонкие микропучки. При этом уравнение для корреляционной функции распадется на систему одномерных уравнений для каждого такого микропучка. Данный подход ранее уже использовался при написании программы RON [6]. Тем не менее создание полноценной 3-х мерной программы требует значительных усилий и не является целью данной работы. В этом разделе мы ограничимся получением численного решения уравнений корреляционной теории в рамках одномерной модели. Возможно, это и не очень интересно с практической точки зрения, но данное моделирование можно использовать для проверки результатов, которые получены в программах, использующих метод макрочастиц или уравнение Власова.

### 2.1. Расчёт одновременной корреляционной функции

Система уравнений (19) в одномерной модели сохраняет свой вид. Необходимо лишь внести следующие изменения в обозначения:  $\epsilon_i = (z_i, \Delta_i)$ ,  $v_i = (1 + 2\Delta_i)$ , величина  $\Delta_i$ , как и прежде, является относительным отклонением энергии от средней энергии, а  $z_i$  — продольной координатой электронов в ондуляторе. Интегрирование в (19) теперь следует вести по  $dz_2 d\Delta_2$  (в первом уравнении системы) и по  $dz_3 d\Delta_3$  (во втором). Силу продольного взаимодействия  $\Phi(\epsilon_1, \epsilon_2)$  можно определить из (20).

Поскольку мы рассматриваем стационарное приближение, одночастичная функция распределения должна быть нормирована следующим образом:

$$\int v_1 F(z_1, \Delta_1) d\Delta_1 = 1.$$

Чтобы исключить быстро осциллирующие слагаемые, удобно ввести медленную комплексную амплитуду  $\tilde{G}$  корреляционной функции:

$$G(z_1, \Delta_1; z_2, \Delta_2) = 2\text{Re}\{\tilde{G}(z_1, \Delta_1; z_2, \Delta_2) \exp[i(z_1 - z_2)]\}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19) и пренебрегая быстро осциллирующими слагаемыми, получим окончательную систему уравнений для численного решения:

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial}{\partial z_1} F(\epsilon_1) &= -2\text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \Delta_1} \tilde{I}(z_1, \Delta_1; z_1) \right], \\ \frac{1}{2} \left[ (v_1 + v_2) \left( \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (v_1 - v_2) \left( 2i + \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] \tilde{G}(\epsilon_1; \epsilon_2) &= \\ &= - \frac{\partial F(\epsilon_1)}{\partial \Delta_1} \tilde{I}^*(z_1; z_2, \Delta_2) - \frac{\partial F(\epsilon_2)}{\partial \Delta_2} \tilde{I}(z_2; z_1, \Delta_1) - \\ &\quad - \frac{2\pi}{N\lambda_0} \left[ \tilde{\Phi}^*(z_1 - z_2) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} + \tilde{\Phi}(z_2 - z_1) \frac{\partial}{\partial \Delta_2} \right] F(\epsilon_1) F(\epsilon_2), \quad (22) \end{aligned}$$

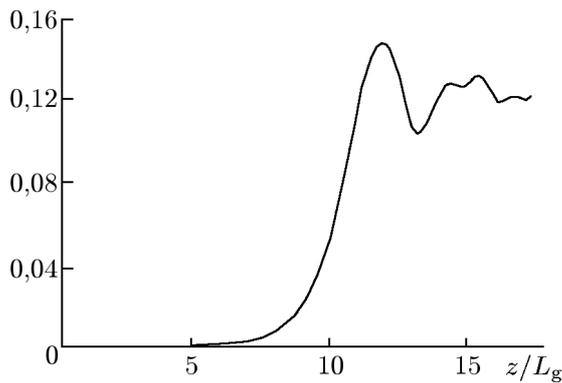


Рис. 2. Зависимость квадрата степени группировки пучка от продольной координаты в ондуляторе

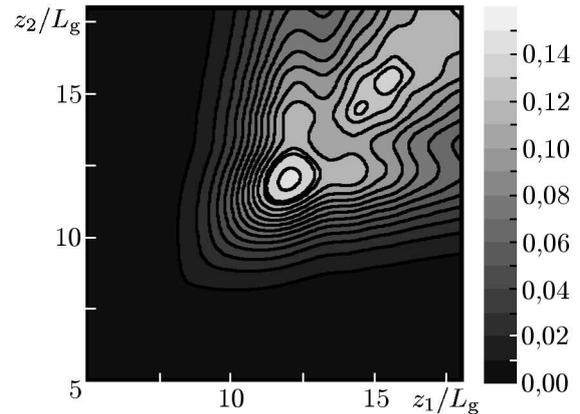


Рис. 3. Двухкоординатное распределение амплитуды корреляционной функции, проинтегрированной по энергии

где звёздочка означает комплексное сопряжение, функция  $\tilde{I}(z_1; z_2, \Delta_2)$  определяется формулой:

$$\tilde{I}(z_1; z_2, \Delta_2) = \int_0^{z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(z_1 - z_3) \tilde{G}(\epsilon_2; \epsilon_3) dz_3 d\Delta_3,$$

$\tilde{\Phi}(z) = -4\rho^3[1/(1 - i\alpha z)]$  — комплексная амплитуда продольной силы (20), умноженная на число электронов в пучке  $N_{\lambda_0}$ , приходящееся на одну длину волны излучения.

Система уравнений (22) решалась численно с использованием метода конечных разностей. Соответствующий алгоритм описан в работе [23]. При решении предполагалось, что начальные координаты электронов в пучке распределены независимо друг от друга, т. е. корреляции между ними отсутствуют. В этом случае граничные условия для (22) имеют вид  $\tilde{G}|_{z_1=0} = \tilde{G}|_{z_2=0} = 0$ ,  $F|_{z_1=0} = F_0(\Delta_1)$ , где  $F_0(\Delta_1)$  — функция распределения электронов по энергиям на входе в ондулятор. Решение достаточно найти для области  $z_1 \geq z_2$ , т. к. из симметрии корреляционной функции следует дополнительное условие  $\tilde{G}(1, 2) = \tilde{G}(2, 1)$ .

Далее в качестве иллюстрации представлены результаты моделирования, полученные для следующего набора параметров: параметр Пирса  $\rho = 0,01$ , разброс энергий  $\sigma_e = 0,2\rho$ ,  $\alpha = 50\rho$ . На рис. 2 показана зависимость степени группировки пучка от продольной координаты в ондуляторе. Длина нарастания по амплитуде на линейной стадии  $l_g \approx 40\lambda_w$ , где  $\lambda_w$  — период ондулятора. Экспоненциальный рост начинается при  $z \approx 4L_g$  и заканчивается насыщением при  $z \approx 10L_g$ . На рис. 3 показано распределение проинтегрированной по энергиям амплитуды корреляционной функции в плоскости  $(z_1, z_2)$ .

## 2.2. Расчёт двухвременной корреляционной функции и сравнение с квазилинейной теорией

Следует ещё раз напомнить, что одновременная двухчастичная корреляционная функция позволяет найти только усреднённую по сгусткам пиковую мощность излучения. Для вычисления усреднённой спектральной плотности необходимо знать двухвременную двухчастичную корреляционную функцию. В частности, для нахождения спектральной плотности мощности тока пучка в некоторой точке  $z$  внутри ондулятора необходимо знать следующую величину:

$$\langle \delta I(z, t_1) \delta I(z, t_2) \rangle = A \int v_1 v_2 G_2(z, \Delta_1, \theta_1; z, \Delta_1, \theta_2) d\Delta_1 d\Delta_2,$$

где  $\delta I$  — отклонение тока от среднего значения,  $A$  — некоторая постоянная и  $\theta_i = 2\gamma_{\parallel}^2(t_i - z)$ . Для нахождения этой функции необходимо решить уравнение (18) для стационарного случая с начальным условием  $G_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2; \tau)|_{\tau=0} = G(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Для вычисления входящей в это начальное условие одновременной корреляционной функции необходимо использовать решение, полученное в предыдущем пункте. Далее будут представлены результаты численного решения данного уравнения, а также проведено их сравнение с выводами, которые получены при помощи программ, использующих квазилинейные уравнения [24].

Вначале коротко напомним суть квазилинейного приближения [24]. В его рамках решается система уравнений для сглаженной плотности распределения  $f(\tau, \Delta, z)$  в одночастичном фазовом пространстве с общепринятыми координатами  $(\tau, \Delta)$  и  $z$  в качестве независимой переменной. Мы предполагаем, что данное распределение является периодической функцией  $\tau$ :

$$f(\tau, \Delta, z) = F_0(\Delta) + \sum_{\nu} f_{\nu}(\Delta, z) \exp[i(1 + \nu)\tau],$$

где  $\nu = H_{\nu}n$ , а  $T = 2\pi/H_{\nu}$  — период по  $\tau$ , который необходимо выбрать больше нескольких десятков кооперативных длин. В квазилинейном приближении записывается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial F_0}{\partial z} = 2\text{Re} \left( \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \Delta} A_{\nu} \right), \quad \frac{\partial f_{\nu}}{\partial z} + i(2\Delta - \nu)f_{\nu} = A_{\nu} \frac{\partial F_0}{\partial \Delta}, \quad \frac{\partial A_{\nu}}{\partial z} = 4\rho^3 \int f_{\nu}(\Delta, z) d\Delta.$$

Во втором уравнении мы пренебрегли слагаемыми, которые пропорциональны произведению амплитуды поля излучения  $A_{\nu}$  и компонент функции распределения, осциллирующих с удвоенной частотой. Это упрощение в нашем определении и называется квазилинейным приближением. Оно имеет простой физический смысл. Существуют две причины, из-за которых прекращается экспоненциальный рост сигнала в ЛСЭ. Одна из них связана полной группировкой пучка. Она важна в случае малого разброса продольных скоростей, например в лампах бегущей волны. В случае коротковолновых ЛСЭ разброс продольных скоростей достаточно большой, поэтому увеличение длины нарастания из-за роста разброса энергий наступает раньше, чем могут возникнуть высшие гармоники в модуляции плотности. Эта причина и описывается квазилинейными уравнениями. Для анализа работы ЛСЭ в режиме усилителя спонтанного излучения данные уравнения необходимо решать с начальными условиями, соответствующими дробовому шуму. Начальная функция распределения в этом случае может быть получена следующим образом. Запишем микроскопическую плотность распределения (аналог функции Климонтовича (7))

$$f_0(\tau, \Delta) = \frac{T}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \delta(\tau - \tau_i) \delta(\Delta - \Delta_i), \quad (23)$$

где  $N_T$  — число частиц на один период. Выполнив преобразование Фурье от (23), получим следующее выражение для спектра  $f_{0\nu}(\Delta)$  функции  $f_0(\tau, \Delta)$ :

$$f_{0\nu}(\Delta) = \frac{1}{T} \int_0^T f_0(\tau, \Delta) \exp[-i(1 + \nu)\tau] d\tau = \frac{1}{N_T} \sum_{k=1}^{N_T} \delta(\Delta - \Delta_k) \exp(-i\varphi_k),$$

где  $\varphi_k = (1 + \nu)\tau_k$  — случайные фазы с равномерным распределением. Для численного моделирования дельта-функции необходимо заменить ступенчатыми функциями:

$$f_{0\nu}(\Delta) = \frac{1}{N_T} \frac{1}{H_{\Delta}} \sum_m \Pi(\Delta - \Delta_m) \sum_{k=1}^{N_{\Delta m}} \exp(-i\varphi_k),$$

где  $\Pi(\Delta) = 1$  при  $\Delta \in (-0,5H_\Delta, 0,5H_\Delta)$  и  $\Pi(\Delta) = 0$  в других случаях,  $N_{\Delta_m} \approx N_T F_0(\Delta_m) H_\Delta$  — число частиц в  $m$ -м интервале энергий. Принимая во внимание, что для суммы большого числа случайных фазоров  $\sum_{k=1}^N \exp(i\varphi_k) = X + iY$  имеется распределение

$$F(X, Y) dX dY \approx \frac{1}{N\pi} \exp\left[-\frac{1}{N}(X^2 + Y^2)\right] dX dY = \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{N} \exp(-R^2/N) dR^2,$$

получим окончательное выражение для  $f_{0\nu}(\Delta_m)$ :

$$f_{0\nu}(\Delta_m) = \frac{1}{\sqrt{N_T}} \sqrt{\frac{H_\nu}{H_\Delta}} \sqrt{F_0(\Delta_m)} \sqrt{-\ln(I_1)} \exp(2\pi i I_2), \quad (24)$$

где  $H_\nu$  — шаг по  $\nu$ ,  $I_1$  и  $I_2$  — случайные числа с равномерным распределением в интервале  $(0, 1)$ .

Чтобы сравнивать корреляционную теорию с квазилинейным приближением, необходимо установить соответствие между величинами, которые используются в этих двух подходах. Для этого нужно воспользоваться соотношением

$$G_2(z_1, \Delta_1, z_2, \Delta_2, \theta_1 - \theta_2) \approx \sum_{\nu} \langle f_{\nu}(z_1, \Delta_1) f_{\nu}^*(z_2, \Delta_2) \rangle \exp\{i(1 + \nu)[(z_1 - z_2) - (\theta_1 - \theta_2)]\},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по начальным условиям. Из этого выражения можно определить две величины, которые следует вычислить и сравнить в обоих случаях:

$$J_0(z) = \int G(z, \Delta_1, z, \Delta_2) d\Delta_1 d\Delta_2 \approx \int \sum_{\nu} \langle f_{\nu}(z, \Delta_1) f_{\nu}^*(z, \Delta_2) \rangle d\Delta_1 d\Delta_2, \quad (25)$$

$$J_{\nu}(z) = \int G_2(z, \Delta_1, z, \Delta_2, \tau) \exp[i(1 + \nu)\tau] d\Delta_1 d\Delta_2 d\tau \approx T \langle f_{\nu}(z, \Delta_1) f_{\nu}^*(z, \Delta_2) \rangle. \quad (26)$$

Численное решение (18) и его сравнение с результатами квазилинейного подхода были выполнены в рамках модели заряженных листов для следующего набора параметров: параметр Пирса  $\rho = 5 \cdot 10^{-4}$ , разброс энергий  $\sigma_e = 0,5\rho$ , число частиц, приходящееся на одну длину волны излучения,  $N_{\lambda_0} = 10^4$ . Описание численного алгоритма решения квазилинейных уравнений может быть найдено в работе [24]. Усреднение в квазилинейных вычислениях выполнялось по 1000 различных начальных условий. Спектральное распределение, которое получается для одного начального условия в квазилинейном моделировании, показано на рис. 4. Представленные на этом рисунке графики показывают, что в одном проходе получается достаточно хаотичный спектр, который соответствует спонтанному излучению, прошедшему через узкополосный усилитель. Тем не менее после усреднения по достаточному числу проходов со случайным начальным условием (24) спектр становится вполне регулярным, как и должно получаться из уравнений с детерминированными начальными условиями.

На рис. 5–7 представлены результаты сравнения квазилинейного моделирования с численным решением уравнений корреляционной теории. Для сравнения использовались величины (25) и (26). Из представленных рисунков видно, что два существенно разных подхода дают почти идеально совпадающие результаты без какой-либо дополнительной подгонки параметров. Процесс насыщения проиллюстрирован на рис. 7. На начальной стадии экспоненциального роста спектр имеет достаточно большую ширину, а функция распределения по энергии практически не меняется (см. рис. 7а). К концу линейной стадии, перед началом насыщения, ширина спектра уменьшается и начинается рост разброса энергий (см. рис. 7б). На стадии насыщения разброс энергий становится большим и усиление прекращается (см. рис. 7в).

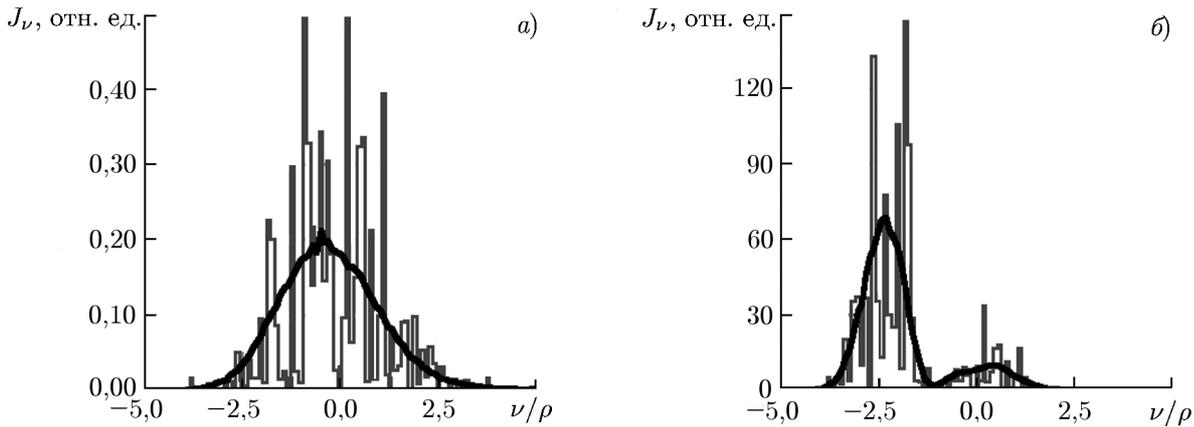


Рис. 4. Спектральные распределения тока пучка, полученные в квазилинейном моделировании при  $z = 10L_g$  (а) и  $z = 25L_g$  (б). Ступенчатые кривые соответствуют одному проходу, гладкая кривая — усреднению по 1 000 проходов

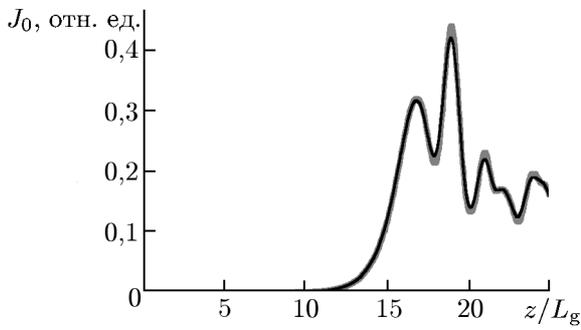


Рис. 5. Зависимость «мощности» флуктуаций тока от продольной координаты в ондуляторе. Толстая серая кривая соответствует подходу на основе корреляционной функции, тонкая чёрная — квазилинейному подходу

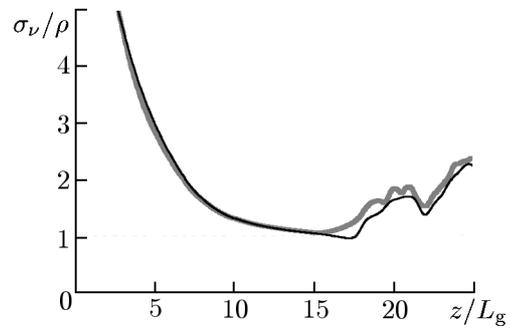


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичной ширины спектра  $\sigma_\nu/\rho$  от продольной координаты в ондуляторе. Толстая серая кривая соответствует подходу на основе корреляционной функции, тонкая чёрная — квазилинейному подходу

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы описали теорию сверхлюминесценции в ЛСЭ, основанную на цепочке уравнений БГКИ. По-видимому, это единственный последовательный способ описания данного процесса. Использование одномерности движения, близости скоростей электронов к скорости света и узкополосности усиления, а также очень простых начальных условий (отсутствие электромагнитного поля и корреляций координат частиц в фазовом пространстве) позволили упростить задачу и получить её решение. Полученные результаты согласуются с результатами квазилинейной теории ЛСЭ с большим усилением, что подтверждает правильность предлагаемого подхода.

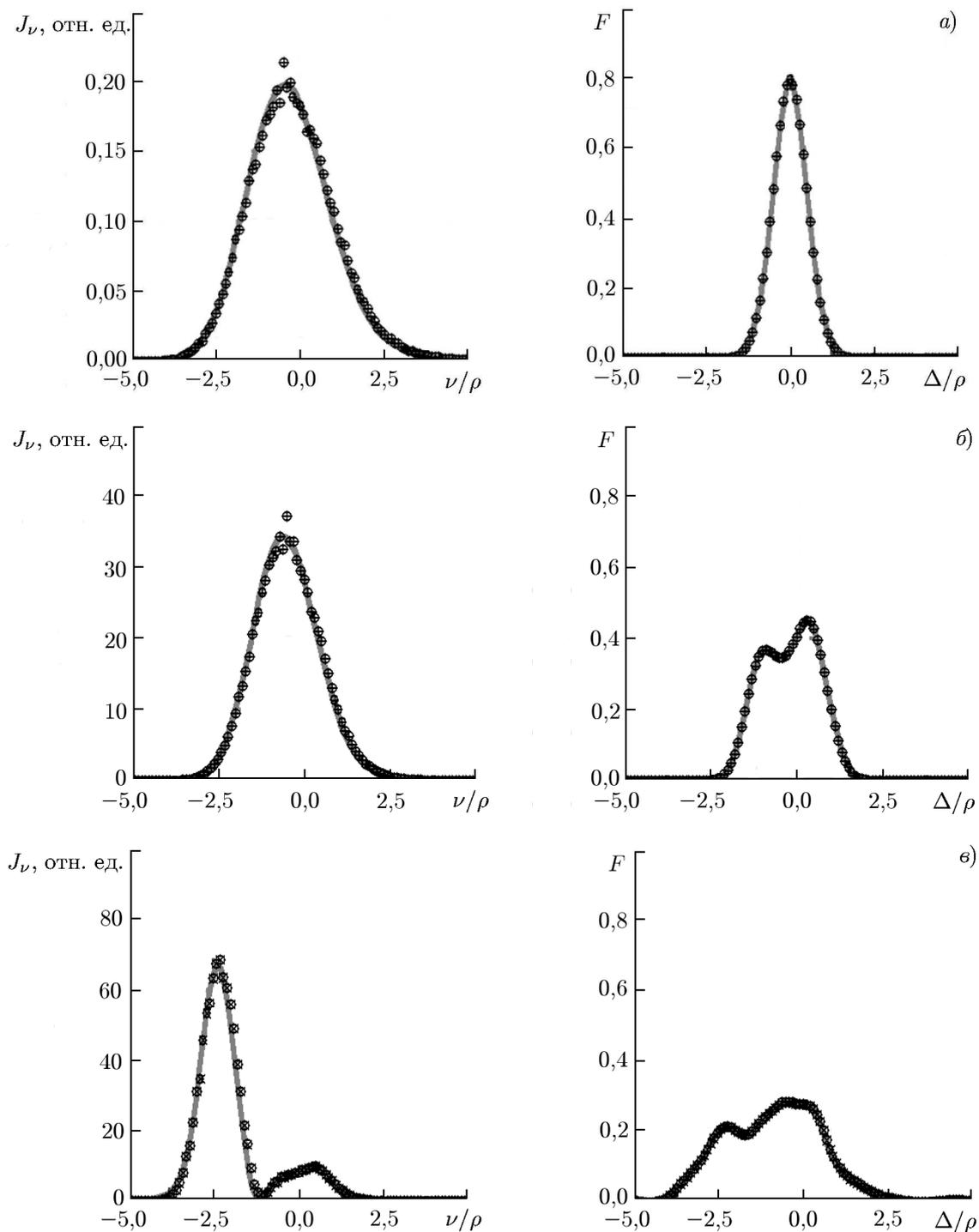


Рис. 7. Спектр (левый столбец) и распределение по энергиям (правый столбец) для различных продольных положений пучка в ондуляторе:  $z = 10L_g$  (а),  $z = 15L_g$  (б) и  $z = 25L_g$  (в). Непрерывная кривая соответствует результату вычислений с использованием корреляционной функции, точки — квазилинейному моделированию

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vinokurov N. // Rev. Accel. Sci. Technol. 2010. V. 3, No. 1. P. 77.
2. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. // Rev. Mod. Phys. 2016. V. 88, No. 1. Art. no. 015006.
3. Гинзбург В. Л. // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1947. Т. 11, № 2. С. 165.
4. Motz H. // J. Appl. Phys. 1951. V. 22, No. 5. P. 527.
5. Винокуров Н. А., Левичев Е. Б. // Успехи физ. наук. 2015. Т. 185, № 9. С. 917.
6. Dejus R. J., Shevchenko O. A., Vinokurov N. A. // Nucl. Instruments Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 1999. V. 429, No. 1. P. 225.
7. Reiche S. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 1999. V. 429, No. 1. P. 243.
8. Fawley W. M. // Phys. Rev. Spec. Top. — Accel. Beams. 2002. V. 5, No. 7. Art. no. 070701.
9. Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 1998. V. 407, No. 1. P. 285.
10. Shevchenko O. A., Vinokurov N. A. // Nucl. Instruments Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 2003. V. 507, No. 1. P. 84.
11. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980. 376 с.
12. Шевченко О. А. Теория и расчёт физических процессов в лазерах на свободных электронах с нерегулярной магнитной системой: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, ИЯФ СО РАН, 2005. 121 с.
13. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. 255 с.
14. Dirac P. A. M. // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21, No. 3. P. 392.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. М.: Наука, 1973. 504 с.
16. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
17. Малыкин Г. Б. // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179, № 3. С. 285.
18. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946. 120 с.
19. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975. 288 с.
20. Клеен В., Пёшль К. Введение в электронику сверхвысоких частот. Ч. 2. Лампы с длительным взаимодействием. М.: Сов. Радио, 1963. 271 с.
21. Shaftan T., Huang Z. // Phys. Rev. 2004. V. 7. Art. no. 080702.
22. Shevchenko O. A., Vinokurov N. A. // Proc. FEL2009, Liverpool, UK, 23–28 August 2009. P. 8.
23. Shevchenko O. A., Vinokurov N. A. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 2009. V. 603, No. 1. P. 46.
24. Vinokurov N. A., Huang Z., Shevchenko O., Kim K.-J. // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. Accel. Spectrometers. 2001. V. 475, No. 1. P. 74.

Поступила в редакцию 9 августа 2016 г.; принята в печать 24 ноября 2016 г.

**APPLICATION OF THE TWO-PARTICLE CORRELATION FUNCTION  
APPROACH TO THE DESCRIPTION OF A SINGLE-PASS FREE ELECTRON  
LASER OPERATED IN SUPERLUMINESCENCE MODE**

*O. A. Shevchenko and N. A. Vinokurov*

We describe the theory of a superluminescent single-pass free electron laser based on the Bogolyubov chain of equations for the multiparticle distribution functions. Special choice of the variables permitted us to eliminate the retardation of the interaction. The small parameter (inverse number of particles on the signal growth length in the accompanying reference frame) for the chain truncation is found. Expansion over this parameter makes it possible to neglect three-particle correlation functions and to solve the equations containing a single-particle distribution function and two-particle correlation functions only. The calculation results are in good agreement with the results of the quasilinear theory developed previously.