

УДК 621.385.6

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ МАГНЕТРОНЕ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

И. И. Винтизенко\*

Физико-технический институт Томского политехнического университета, г. Томск, Россия

Установлено влияние релятивизма на процессы и выходные параметры релятивистского магнетрона. Приведено решение уравнений движения электронов в релятивистском магнетроне плоской геометрии. Показано, что эти уравнения имеют вид, соответствующий нерелятивистскому случаю, если использовать нормировки для статических и высокочастотного полей.

### ВВЕДЕНИЕ

Теоретические работы, посвящённые исследованиям магнетронов как автоколебательных систем, начались в 50-х годах прошлого века [1]. В них рассматривалось движение отдельных электронов в заданных полях межэлектродного промежутка магнетрона. В дрейфовом приближении получены выражения для составляющих скорости и траектории электронов, а также для электронного коэффициента полезного действия (КПД) и анодного тока прибора.

В середине 70-х годов прошлого века, с появлением сильноточных электронных ускорителей, обладающих импульсной мощностью до  $10^{11}$  Вт при напряжении  $500 \div 1\,200$  кВ и токах в единицы и десятки килоампер, возник интерес к использованию магнетронов для генерации сверхмощного сверхвысокочастотного (СВЧ) излучения. Первые эксперименты с подобными генераторами, называемыми релятивистскими магнетронами из-за высокого уровня прикладываемых катод-анодных напряжений, позволили получить СВЧ импульсы с мощностью в сотни мегаватт при КПД  $10 \div 30\%$ . На самом же деле влияние релятивизма на движение электронов в подобных приборах не очень значительно, т. к. электроны взаимодействуют с замедленной электромагнитной волной, скорость которой  $20 \div 45\%$  от скорости света. Практически одновременно с первыми экспериментами появились работы, посвящённые теоретическим исследованиям релятивистских магнетронов и выполненные на основе указанного приближения [2–4]. Однако полученные в этих статьях выражения для основных характеристик релятивистского магнетрона громоздки, не позволяют наглядно продемонстрировать отличия релятивистского магнетрона от нерелятивистского и оценить правомерность названия «релятивистский магнетрон».

В данной статье рассматривается способ преобразования релятивистских уравнений, описывающих движение электронов в пространстве взаимодействия прибора плоской геометрии без учёта полей пространственного заряда. Этот способ позволяет использовать известные решения для нерелятивистского случая с поправочными релятивистскими коэффициентами.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ МАГНЕТРОНЕ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Уравнения движения электронов в декартовой системе координат (см. рис. 1) с учётом всех статических и высокочастотных полей записываются в виде

$$\ddot{x} = \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E}_x \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{m_0\gamma} \frac{e}{c} H \dot{y} - \frac{e}{m_0\gamma} E_0 \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} - \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E}_y \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} + \frac{e}{m_0\gamma c} \tilde{H} \dot{y},$$

\* vintigor@mail.ru

$$\ddot{y} = \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E}_y \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}\right) + \frac{1}{m_0\gamma} \frac{e}{c} H \dot{x} - \frac{e}{m_0\gamma} E_0 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}\right) - \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E}_x \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} - \frac{e}{m_0\gamma c} \tilde{H} \dot{x}, \quad (1)$$

где  $x$  — координата вдоль поверхности катода,  $y$  — координата вдоль направления от катода к аноду, по координате  $z$  система бесконечна,  $E_x = \tilde{E}_x$  и  $E_y = E_0 + \tilde{E}_y$  — составляющие суммарной напряжённости электрического поля,  $\tilde{E}_x$  и  $\tilde{E}_y$  — составляющие напряжённости высокочастотного электрического поля,  $\tilde{H}$  — напряжённость высокочастотного магнитного поля,  $E_0$  и  $H$  — напряжённости статических электрического и магнитного полей соответственно,  $\gamma = [1 - (\dot{x}/c)^2 - (\dot{y}/c)^2]^{-1/2}$  — релятивистский фактор,  $c$  — скорость света,  $e$  и  $m_0$  — заряд и масса покоя электрона соответственно, точками обозначены производные по времени  $t$ . Составляющие высокочастотного поля в плоском магнетроне имеют следующий вид [5]:

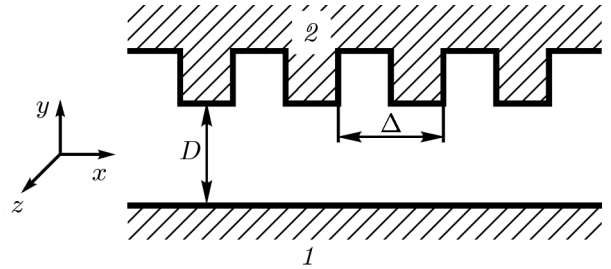


Рис. 1. Система координат и геометрические параметры пространства взаимодействия, 1 — катод, 2 — анод

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -\tilde{E} \cos[h(x - ut)] \operatorname{sh} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right), \\ \tilde{E}_y &= -\frac{\tilde{E}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \sin[h(x - ut)] \operatorname{ch} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right), \quad \tilde{H} = \tilde{H}_z = \frac{u}{c} \tilde{E}_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $h = \pi/\Delta$ ,  $\Delta$  — период магнетронной структуры по оси  $x$ ,  $u$  — фазовая скорость замедленной электромагнитной волны,  $\tilde{E}$  — амплитуда составляющей электрического поля  $\tilde{E}_y$  на катоде.

Подставив (2) в уравнения движения (1), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m_0\gamma c} H \dot{y} - \frac{e}{m_0\gamma} E_0 \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} - \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) \cos[h(x - ut)] \operatorname{sh} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right) + \\ &\quad + \frac{e}{m_0\gamma} \frac{\tilde{E}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left( \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} - \frac{u\dot{y}}{c^2} \right) \sin[h(x - ut)] \operatorname{ch} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right), \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m_0\gamma c} H \dot{x} + \frac{e}{m_0\gamma} E_0 \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2}\right) - \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E} \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2} - \frac{u\dot{x}}{c^2}\right) \sin[h(x - ut)] \times \\ &\quad \times \operatorname{ch} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right) + \frac{e}{m_0\gamma} \tilde{E} \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} \cos[h(x - ut)] \operatorname{sh} \left( h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Используем следующие упрощающие предположения:

$$u \approx \dot{x}, \quad \dot{y} \ll \dot{x}, \quad (4)$$

т. е. электрон движется со скоростью, близкой к скорости волны, и его движение под действием высокочастотных полей от катода к аноду происходит с нерелятивистской скоростью. Как известно для нерелятивистских магнетронов и как будет показано ниже для релятивистских,

при отсутствии СВЧ полей движение электронов представляет собой медленный дрейф центров их орбит и их быстрое вращение с циклотронной частотой. Поперечная (в направлении к аноду) скорость центра орбиты в зависимости от начальных условий вылета электрона равна нулю или близка к нему. В СВЧ полях анодного блока электроны приобретают скорость движения, близкую к скорости электромагнитной волны. Поперечная скорость электронов и в этом случае невелика, т. к. на электроны действует сила Лоренца, заворачивающая их к катоду. Отметим также и то, что именно величина этой скорости электронов определяет потери энергии на аноде, т. е. КПД прибора. Стремление максимально уменьшить эту величину лежит в основе проектирования любого магнетронного генератора. Экспериментальные данные [6] и компьютерное моделирование [7, 8] динамики электронов в релятивистском магнетроне также свидетельствуют о малой величине поперечной скорости.

При указанных условиях  $\gamma \approx \gamma_{\text{ph}} = \sqrt{1 - (u/c)^2}$  уравнения (3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}} c} H \dot{y} - \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} \tilde{E} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) \cos[h(x - ut)] \text{sh} \left(h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y\right), \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}} c} H \dot{x} + \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} E_0 - \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} \frac{\tilde{E}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) \times \\ &\quad \times \sin[h(x - ut)] \text{ch} \left(h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} y\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (4), из (5) можно получить

$$\ddot{x} = \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} H \dot{y} - \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}^3} \tilde{E}_x, \quad \ddot{y} = \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} H \dot{x} + \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}} E_0 - \frac{e}{m_0 \gamma_{\text{ph}}^3} \tilde{E}_y. \quad (6)$$

Таким образом, уравнения по форме соответствуют нерелятивистским уравнениям с нормированными на величину  $\gamma_{\text{ph}}$  постоянными электрическими и магнитными полями и нормированными на величину  $\gamma_{\text{ph}}^3$  компонентами высокочастотного поля.

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Предварительно рассмотрим некоторые частные случаи уравнений движения, как это было сделано для классических магнетронов. Первый случай — отсутствие постоянного электрического поля и высокочастотных полей. Решение уравнений (6) имеет вид

$$x = x_0 + r_0 \cos\left(-\frac{\Omega t}{\gamma_{\text{ph}}} + \varphi_0\right), \quad y = y_0 + r_0 \sin\left(-\frac{\Omega t}{\gamma_{\text{ph}}} + \varphi_0\right) \quad (7)$$

и соответствует движению электрона по окружности с радиусом  $r_0$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$  с угловой скоростью  $\Omega/\gamma_{\text{ph}}$  и линейной скоростью  $v = |\Omega| r_0/\gamma_{\text{ph}}$ , где  $\Omega = eH/(m_0 c)$  — циклотронная (ларморова) частота. Отличие от нерелятивистского случая состоит в уменьшении частоты вращения электронов за счёт увеличения их массы на величину релятивистского фактора и соответствующем уменьшении линейной скорости.

Второй частный случай — составляющие электрического поля постоянны во времени и пространстве. Тогда уравнения имеют решение

$$x = x_0 + \frac{e \gamma_{\text{ph}} E_y}{m \Omega} t + r_0 \cos\left(-\frac{\Omega t}{\gamma_{\text{ph}}} + \varphi_0\right), \quad y = y_0 - \frac{e \gamma_{\text{ph}} E_x}{m \Omega} t + r_0 \sin\left(-\frac{\Omega t}{\gamma_{\text{ph}}} + \varphi_0\right), \quad (8)$$

где  $m$  — релятивистская масса электрона. Движение представляет собой вращение по окружности, центр которой «дрейфует» с течением времени согласно формулам

$$x = x_0 + \frac{e\gamma_{\text{ph}}E_y}{m_0\Omega} t, \quad y = y_0 - \frac{e\gamma_{\text{ph}}E_x}{m\Omega} t. \quad (9)$$

В этих формулах  $x$  и  $y$  — координаты ведущего центра, вокруг которого вращается электрон с угловой скоростью  $\Omega/\gamma_{\text{ph}}$ . Радиус окружности, по которой вращается электрон, зависит от начальных условий: это или чистый дрейф, или движение по циклоиде [1]. В случае дрейфа его скорость равна  $v = cE_0/H$ , т. е. соответствует движению электрона в нерелятивистском случае, а при движении по циклоиде электрон отходит от плоскости катода на максимальное расстояние  $2r_0 = 2[m_0c^2\gamma_{\text{ph}}E_0/(eH^2)]$ , а затем возвращается обратно. Видно, что радиус вращения электрона увеличивается по сравнению с нерелятивистским случаем. Как будет показано ниже, увеличение радиуса вращения ведёт к снижению электронного КПД релятивистского магнетрона.

Уравнения движения (6) можно приближённо решить, пользуясь «дрейфовым» приближением, которое заключается в исключении инерциальных членов  $\ddot{x}$  и  $\ddot{y}$ . Достаточными условиями применимости дрейфового приближения [1] являются медленность изменения величин  $\tilde{E}_x$  и  $\tilde{E}_y$  в пространстве взаимодействия магнетрона на расстояниях порядка  $r_0$  и во времени порядка  $1/\Omega$ . Тогда уравнения движения для ведущего центра приобретают вид

$$\dot{x} = \frac{cE_0}{H} - \frac{\tilde{E}_y}{\gamma_{\text{ph}}^2}, \quad \dot{y} = \frac{c\tilde{E}_x}{\gamma_{\text{ph}}^2 H}. \quad (10)$$

Как следует из полученных выражений, в релятивистском магнетроне действие высокочастотных полей на электроны ослаблено в  $\gamma_{\text{ph}}^2$  раз.

Уравнения движения можно переписать в виде

$$\dot{x} = \frac{cE_0}{H} - \frac{\tilde{E}_y}{\gamma_{\text{ph}}^2} = v_0 - \frac{c}{\gamma_{\text{ph}}^2 H} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{c}{\gamma_{\text{ph}}^2 H} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (11)$$

где

$$\Phi = \frac{\tilde{E}}{h} \sin[h(x - ut)] \text{sh}(hy) \quad (12)$$

— скалярный потенциал компоненты электрического поля (2).

В системе координат, движущейся со скоростью электромагнитной волны  $u$  ( $x' = x - ut$ ), скалярный потенциал имеет вид

$$\Phi' = \frac{(u - v_0)Hy}{c} + \frac{\tilde{E} \sin(hx') \text{sh}(hy)}{h\gamma_{\text{ph}}^2}. \quad (13)$$

Это эффективный потенциал, являющийся суммой электростатического и высокочастотного потенциалов, действующий на электроны в движущейся системе координат и не зависящий от времени.

По аналогии с теорией классического магнетрона вид уравнений движения (11) и эффективного потенциала (13) позволяют заключить, что 1) траектории ведущих центров электронов совпадают с эквипотенциалами электрического поля, 2) ведущие центры движутся как частицы несжимаемой жидкости.

При точном синхронизме скорости волны и скорости ведущих центров ( $v_0 = u$ ) электронный КПД релятивистского магнетрона можно оценить по формуле

$$\eta = 1 - \frac{2r_0}{D} = 1 - \frac{2\gamma_{\text{ph}}mc^2E_0}{DH^2}. \quad (14)$$

Он оказывается ниже, чем в случае нерелятивистского магнетрона. Здесь  $D$  — расстояние между катодом и анодом.

В случае расфазировки ( $v_0 \neq u$ ) условие наличия анодного тока (а значит, СВЧ колебаний) записывается в виде

$$E_0 - \frac{uH}{c} < \frac{\tilde{E}ch(hr_0)}{\gamma_{ph}^2}. \quad (15)$$

Приведённое соотношение означает, что дефазирующее электроны поле  $E_0 - (uH/c)$  не должно превышать амплитуду составляющей высокочастотного поля  $\tilde{E}_y$  волны в плоскости питания  $y = r_0$  при  $hx' = \pm\pi/2$ . Однако ослабление в  $\gamma_{ph}^2$  раз влияния высокочастотного поля на движение электронов приводит к сокращению области правильных фаз, из которой электроны захватываются в спицы пространственного заряда. Это ведёт к уменьшению анодного тока по сравнению с нерелятивистским случаем.

## ВЫВОДЫ

Показано, что в релятивистском магнетроне плоской геометрии действие на электроны статических электрического и магнитного полей ослаблено в  $\gamma_{ph}$  раз, а высокочастотного электрического поля — в  $\gamma_{ph}^3$  раз. Получены уравнения движения, подобные нерелятивистскому случаю, с соответствующими нормировками для статических и высокочастотных полей. Это позволяет наглядно оценить влияние релятивизма на движение электронов в пространстве взаимодействия и выходные характеристики приборов. В релятивистском магнетроне по сравнению с нерелятивистским аналогом электронный КПД снижается примерно в  $\gamma_{ph}$  раз, ухудшаются условия фазировки электронов в спицы пространственного заряда. Для получения высоких значений КПД и генерируемой мощности необходимо конструировать приборы с максимальным замедлением электромагнитной волны на рабочем виде колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капица П. Л. Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 198 с.
2. Нечаев В. Е., Петелин М. И., Фукс М. И. // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3, № 15. С. 763.
3. Нечаев В. Е., Сулакшин А. С., Фукс М. И., Штейн Ю. Г. Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. Вып. 1. С. 114.
4. Andreev A. D., Hendricks K. J., Fuks M. I., Schamiloglu E. // J. Directed Energy. 2010. V. 3, No. 4. P. 349.
5. Зусмановский С. А. Магнетроны сантиметрового диапазона. М.: Сов. радио, 1950. Т. 1. 420 с.
6. Грошков Л. М., Нечаев В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8, № 2. С. 413.
7. Chan H.-W., Chen C., Davidson R. C. // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 57, No. 12. P. 1271.
8. Weatherall J. S. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. V. 18. No. 3. P. 603.

Поступила в редакцию 7 октября 2015 г.; принята в печать 14 июня 2016 г.

**SOLUTION OF THE ELECTRON MOTION EQUATIONS IN A RELATIVISTIC  
PLANE-GEOMETRY MAGNETRON***I. I. Vintizenko*

We have ascertained the influence of relativism on the processes and output parameters of a relativistic magnetron. The solution of the electron motion equations in a relativistic plane-geometry magnetron is presented. It is shown that these equations have the form corresponding to the nonrelativistic case, when one uses normalizing for the static and high-frequency fields.